Diskrete Mathematik

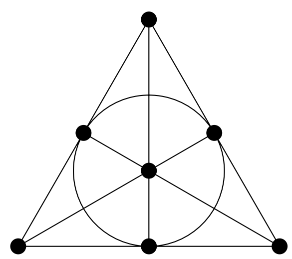
Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
19. Januar 2023
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1: 2-Färbbarkeit

Ein Mengensystem $F \subseteq 2^M$ auf einer Menge M heißt 2-*färbbar*, wenn es eine Abbildung $c : M \to \{0,1\}$ gibt, so dass es in jedem $A \in F$ Elemente $a, b \in A$ gibt mit $c(a) = 0$ und $c(b) = 1$ (in jede Menge in F kommen also beide Farben vor).
Wir betrachten nun die endliche projektive Ebene aus Aufgabe 11.4 für $q = 2$. Diese Ebene heißt *Fano-Ebene*. Eine Abbildung ist rechts. Wir können die Geraden als Mengensystem $F \subseteq 2^P$ auf der Menge der Punkte P auffassen.
Zeigen Sie, dass die Fano-Ebene nicht 2-färbbar ist.



Aufgabe 12.2: Perfekte Codes

Sei C der lineare Code über $\mathbb{Z}_3$ mit Erzeugermatrix

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass der Code 1-perfekt ist.

Aufgabe 12.3: Syndrome

Wir betrachten den Code $C \subseteq \mathbb{Z}_3^5$ mit Kontrollmatrix

$$H := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Ist der Code 1-fehlerkorrigierend?
2. Bestimmen Sie die Syndrome des Codes und decodieren Sie die Nachrichten $[1,0,1,1,0]$, $[2,1,2,1,1]$, und $[1,2,0,0,1]$.
3. Bestimmen Sie die Generatormatrix.

Aufgabe 12.4: Reed-Muller Codes

Seien C_1, C_2 zwei Codes der Länge n über $\mathbb{Z}_2$ (nicht notwendig linear). Seien $n_i := |C_i|$ und $d_i := d(C_i)$. Wir definieren einen neuen Code $C = C_1 * C_2$ durch

$$C := \ C_1 * C_2 \ := \ \{(a_1, a_1 + a_2) \mid a_i \in C_i, i = 1, 2\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass C Länge $2n$ hat mit $|C| = n_1 n_2$.
2. Zeigen Sie, dass $d(C) = \min(2d_1, d_2)$.
3. Nun definieren wir zu jedem $m \geq 1$ und $0 \leq r \leq m$ rekursiv einen Code $C(r, m)$ durch

   $$C(0,m) \ := \ \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \qquad C(m,m) \ := \ \mathbb{Z}_2^{2^m} \qquad C(r+1, m+1) \ := \ C(r+1, m) * C(r, m)\,,$$

   wobei **0** der Vektor mit m Nullen und **1** der Vektor mit m Einsen ist. Zeigen Sie, dass $|C(r, m)| = 2^s$ für $s = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$ und $d(C(r, m)) = 2^{m-r}$.

∗ Aufgabe 12.5: Einbettung der Fano-Ebene

Zeigen Sie, dass die Fano-Ebene nicht in die euklidische Ebene eingebettet werden kann, d.h. zeigen Sie, dass es keine sieben Punkte im $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass je zwei Punkte auf einer Geraden liegen und sich je zwei dieser Geraden in einem Punkt schneiden.

Hinweis: Eine Abbildung der Fao-Ebene im $\mathbb{R}^2$, in der nicht alle Geraden der Fano-Ebene auch eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ ist, finden Sie in Aufgabe 12.2.

Aufgabe 9.2 könnte nützlich sein.

∗ Aufgabe 12.6: Parallele Stützhyperebenen

Sei eine Menge V von Punkten im $\mathbb{R}^n$ gegeben mit $\mathrm{aff}(V) = \mathbb{R}^n$ und der Eigenschaft, dass es zu je zwei $x, y \in V$ eine affine Hyperebene H und eine Translation t gibt, so dass $x \in H$, $y \in H + t$ und alle anderen Punkte liegen zwischen H und $H + t$.

Zeigen Sie, dass $|V| \leq 2^n$.

Hinweis: Wir können annehmen, dass $0 \in V$. Wir betrachten die konvexe Hülle C von V und alle Translate $C + x$ für $x \in V$, sowie $2C$, die Skalierung von C mit Faktor 2. Zeigen Sie, dass $C + x \subseteq 2C$ und vergleichen Sie Volumina.