12 Designs III

t-(v,k,λ)-Design: Menge P von v Punkten

$\mathcal{B} \subseteq 2^P$ Blöcke, $|b| = k$ für alle $b \in \mathcal{B}$

zu jedem $T \subseteq P$, $|T| = t$ gibt es genau λ Blöcke b mit $T \subseteq b$.

Def Designs mit $\lambda = 1$ heißen Steinersysteme

$t = 2$ heißen Blockpläne

$t=2$, $\lambda = 1$, $k=3$: Steiner-Tripel-Systeme

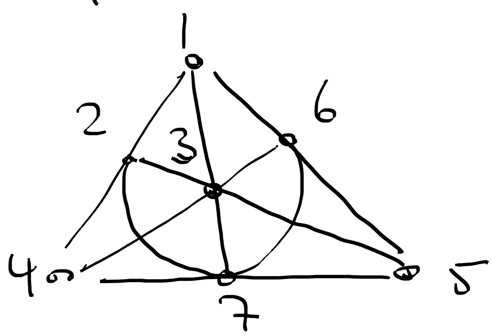
Def $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Projektive Ebene der Ordnung q:

Paar aus Punkten P und Geraden $G \subseteq 2^P$:

- je zwei Punkte definieren Gerade
- je zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt
- $q+1$ Punkte auf jeder Geraden
- $q+1$ Geraden durch jeden Punkt

$\Rightarrow q^2+q+1$ Punkte | Geraden

Bsp: $q = 2$: Fano-Ebene



Satz: q Primzahlpotenz $\Rightarrow$ es gibt proj. Ebene der Ord. q

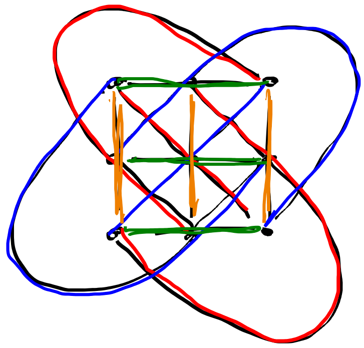
[Aufgabe 11.4]

Bsp: Proj. Ebenen sind $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$-Designs

Fano: $2-(7,3,1)$-Design.

Bsp: Steiner-Tripelsysteme:

- $v=7$: Fano
- $v=15$: Kirkman
- $v=9$:



Allgemeine Steiner-Tripelsysteme:

$$b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \Rightarrow b = \frac{1}{3}\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{6} \in \mathbb{Z}$$

$$r = \lambda \frac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}} \Rightarrow r = \frac{1}{2}(v-1) \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ $v \equiv 1 \pmod 6$ oder $v \equiv 3 \pmod 6$

$\Rightarrow v \in \{3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, \ldots\}$

$\rightarrow$ konstruieren Steiner-Tripel-Systeme für $v = 6m+3$,
also $2-(6m+3, 3, 1)$-Designs

$\rightarrow$ setze:

$n = 2m+1$

$P = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_3$

$$\mathcal{B} := \{\{(p,i) \mid i \in \mathbb{Z}_3\} \mid p \in \mathbb{Z}_n\}$$
$$\cup \{\{(a,i),(b,i),(c,i+1)\} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_n, a \neq b, 2c = a+b, i \in \mathbb{Z}_3\}$$
$$=: \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

→ dann:

$v := |P| = 3n = 6m+3$ ✓

$b := |B| = n + 3\binom{n}{2} = \frac{1}{3}\left(v + \frac{v(v-3)}{2}\right) = \frac{1}{3}\binom{v}{2} = \lambda \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$ ✓

n ungerade ⇒ 2 ist invertierbar in $\mathbb{Z}_n$: $2^{-1} = m+1$

Falls $a = c$ ⇒ $2a = a+b$ ⇒ $a = b$ ↯, also $a, b \neq c$.

Sei nun $T = \{(d,i), (e,j)\}$ 2-Teilmenge von P

→ müssen zeigen: T ist in genau einem $b \in B$

drei Fälle:

- $d = e$: nur $b \in B_1$ möglich, und da nur
  $T \subseteq \{(d,i) \mid i \in \mathbb{Z}_3\}$
- $d \neq e$: nur $b \in B_2$ möglich
  - $i = j$: Sei $f = (m+1)(d+e)$
    dann $T \subseteq \{(d,i), (e,i), (f, i+1)\}$
    und das ist die einzige Möglichkeit
  - $i \neq j$: Dann $j = i+1$ oder $i = j+1$
    $j = i+1$: $f := 2e - d$
    ⇒ $T \subseteq \{(d,i), (f,i), (e, i+1)\}$
    einzige Möglichkeit
    $i = j+1$ analog.

⇒ (P, B) ist 2-$(6m+3, 3, 1)$-Design.

→ auf ähnliche (aber nicht offensichtliche) Weise lassen sich 2-$(6m+1, 3, 1)$-Designs konstruieren.

Def $D=(P,B)$ Steiner-Tripel-System

Sei $P' \subseteq P$ so, dass

$$|b \cap P'| \geq 2 \Rightarrow |b \cap P'| = 3 \quad \forall b \in B$$

$$B' := \{ b \in B \mid b \subseteq P' \}$$

Dann heißt $D' := (P', B')$

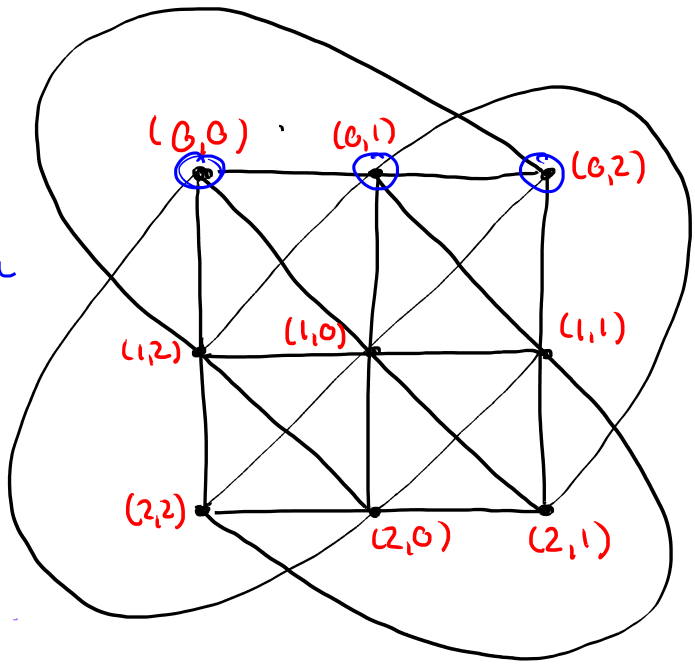
Steiner-Tripel-Teilsystem

Prop Teilsysteme sind Steiner-Tripel-Systeme $\boxtimes$

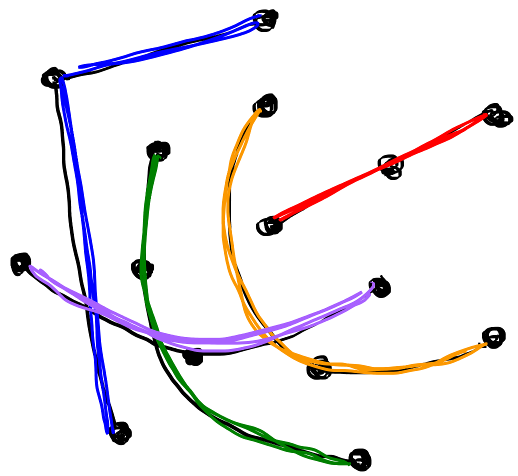
Bsp: $m = 1 \to n = 3$

$\Rightarrow$ 2-(9,3,1)-System

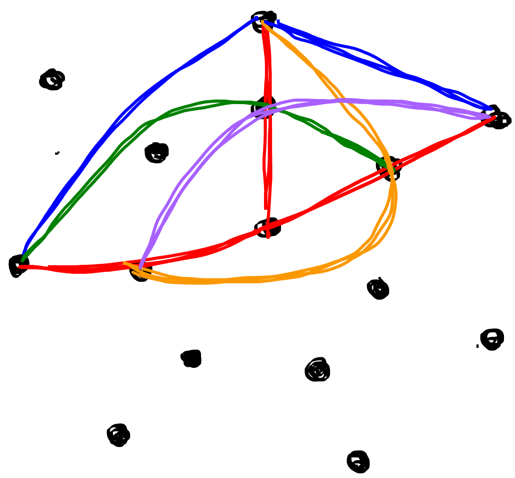
2-(3,3,1)-Teilsystem



2-(15,3,1)-Design



2-(7,3,1)-Design



Zu gegebenem v muss System nicht eindeutig sein:

v	3	7	9	13	15	19
#	1	1	1	2	80	11084874829