

Profilloptimierung im Rahmen eines durchgängigen Produktentstehungsprozesses

Thea Göllner • Hendrik Lüthen • Marc E. Pfetsch • Stefan Ulbrich

Zusammenfassung

Wir betrachten die Optimierung der Topologie, der Geometrie, der Zerlegung und der Abwicklung von Profilquerschnitten aus verzweigten Blechen im Rahmen des durchgängigen Produktentstehungsprozesses des SFB 666. Hierbei kommen sowohl Methoden der nichtlinearen und der PDE-restringierten Optimierung als auch der diskreten Optimierung und der Bildverarbeitung zum Einsatz. Ziel ist die Demonstration der obigen Optimierungsmethoden von der Aufgabenspezifikation bis hin zur Fertigungsanweisung anhand eines Anwendungsbeispiels.

Abstract

We consider the optimization of the topology, the geometry, the partitioning and the production order of profile cross sections made of branched sheet metal parts that are designed within the product development process of the CRC 666. Here, methods from nonlinear and from PDE-constrained optimization as well as from discrete optimization and from image processing are applied. The aim of this article is to demonstrate the above mentioned optimization methods with an application example beginning with a specified optimization task and ending with an optimized production sequence.

Keywords

Topologie- und Geometrieoptimierung • PDE-restringierte Optimierung • Graphenpartitionierung

1 Einleitung

Die Formoptimierung lasttragender Strukturen hinsichtlich ihrer Steifigkeit spielt eine große Rolle in vielen Bereichen des Ingenieurwesens. Für die im SFB 666 erforschten verzweigten Strukturen bietet die Formoptimierung die Möglichkeit Bauteile zu generieren, die im Rahmen definierter Anforderungen und Restriktionen ihr Leichtbaupotential voll ausnutzen. Ein Fokus liegt hier auf der Durch-

gängigkeit der für die verschiedenen Methoden verwendeten Informationen, siehe [1].

Ein Forschungsschwerpunkt des SFB 666 ist die Entwicklung und Fertigung profilartiger verzweigter Blechbauteile, die zum Beispiel als Linearführung zum Einsatz kommen. Am Beispiel eines solchen Profilquerschnitts, der zur Führung eines Fassadenreinigers verwendet werden soll, werden wir die verschiedenen Möglichkeiten der Optimierung solcher Bauteile mit nichtlinearen und diskreten Methoden im Rahmen einer durchgängigen Produktentstehung aufzeigen. Dabei gehen wir wie folgt vor:

Wir beginnen in Abschnitt 2 mit der Generierung einer Querschnittstopologie, die Basis für die weiteren Betrachtungen sein wird. Hierfür wird ein SIMP-Verfahren (engl.: *solid isotropic material with penalization*) verwendet, siehe zum Beispiel [2, 3]. Bei diesem Verfahren wird zu einem vorgegebenen Bauraum, einem vorgegebenen Belastungsszenario und einer vorgegebenen Materialmenge eine optimale Dichteverteilung des Materials bestimmt. Dabei ist es möglich, bestimmte Bereiche mit oder ohne Material zu fixieren. Das Ergebnis ist eine optimale Dichteverteilung des Materials, die wir im folgenden als einen Profilquerschnitt auffassen wollen. Da nicht alle Restriktionen, die die Fertigbarkeit des Profils sicherstellen, bei diesem Ansatz in die Optimierung einfließen können, soll das generierte Ergebnis danach unter Verwendung weiterer Nebenbedingungen an die Bauteilform optimiert werden. Sowohl beim SIMP-Verfahren als auch bei der anschließenden Geometrieoptimierung wird die Nachgiebigkeit (engl.: *compliance*) der Struktur als zu minimierende Zielfunktion verwendet. Mit Hilfe von Methoden der Bildverarbeitung werden in Abschnitt 3 Grapheninformationen extrahiert, die die Topologie des Profilquerschnitts beschreiben. Diese Grapheninformationen werden in Abschnitt 4 verwendet, um ein Modell für die PDE-restringierte Geometrieoptimierung des Querschnitts aufzustellen. Die neue Beschreibung des Querschnitts basiert auf der Unterteilung der Form in polygonale Teilbereiche, deren Eckpunkte als Optimierungsvariablen

verwendet werden. Hier können die zuvor nicht berücksichtigten Nebenbedingungen mit in die Optimierung einbezogen werden. Zur Unterstützung der Fertigung wird das Ergebnis der Geometrieoptimierung in Abschnitt 5 hinsichtlich der Unterteilung in gleiche oder in ähnliche Einzelteile untersucht. Hier finden Methoden der Graphenpartitionierung Anwendung. Schließlich wird in Abschnitt 6 eine Abwicklung des Querschnitts unter Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen mit Hilfe diskreter Optimierungsmethoden gefunden. Abschließend geben wir eine kurze Zusammenfassung über die vorgestellten Methoden und Ergebnisse.

2 Generierung einer Querschnittstopologie

Basis für die weiteren Betrachtungen bildet die Lösung eines Topologieoptimierungsproblems mit Hilfe der SIMP-Methode [3]. Verfahren dieser Art wurden bereits erfolgreich auf Profilquerschnitte im Rahmen des SFB 666 angewendet, vgl. [4].

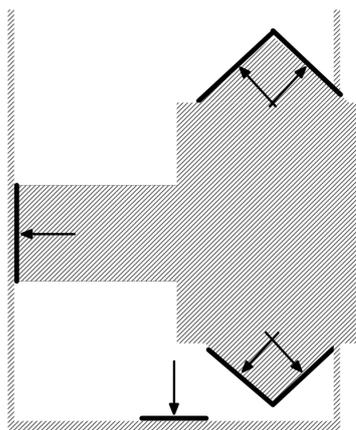


Abb. 1: Bauraumdiagramm. Schwarze Bereiche stellen Material dar, schraffierte Bereiche müssen frei von Material sein, Belastungen werden durch Pfeile dargestellt.

Anhand von Informationen über den zu verwendenden Bauraum und das Belastungsszenario, die durch Kollegen des Fachgebiets für Produktentwicklung und Maschinenelemente (pmd) des Fachbereichs Maschinenbau der TU Darmstadt generiert wurden, wurde die Topologie eines Profilquerschnitts optimiert. Der zu verwendende Bauraum betrug $50 \text{ mm} \times 70 \text{ mm}$. Es wurden verschiedene Bereiche vorgegeben, in denen Material vorhanden sein muss, sowie Bereiche, die frei von Material sein sollten. Zusätzlich wurden Lasten vorgegeben, die auf das Profil wirken. Diese waren

sowohl Kräfte, die im Querschnitt senkrecht auf die Laufflächen (schräg verlaufende schwarze Bereiche in Abbildung 1) wirken, als auch Belastungen auf die verbleibenden zwei achsenparallelen Blechstücke. Außerdem wurden Kräfte vorgegeben, die senkrecht aus der Querschnittsebene heraus wirken, beispielsweise die Gewichtskraft des Bauteils. Insgesamt wurde also ein dreidimensionales Lastszenario betrachtet. Der im Diagramm unten liegende Bereich mit Material war eingespannt. Eine Skizze des zweidimensionalen Bauraumdiagramms für den Profilquerschnitt ist in Abbildung 1 zu sehen. Die schwarzen Bereiche stehen für vorhandenes Material, die grau schraffierten Bereiche für Bauraum, der frei bleiben muss, die Pfeile stellen die Belastungen in der Querschnittsebene dar.

Basierend auf diesen Informationen wurde die Topologie des Profilquerschnitts optimiert. Abbildung 2 zeigt das Ergebnis der dreidimensionalen Topologieoptimierung mit dem SIMP-Verfahren für eine Materialmenge von 20% des Bauraums. Die Graustufen geben die Materialmenge an: Je dunkler ein bestimmtes Pixel ist, desto höher ist die Dichte des dort vorhandenen Materials. Weiße Bereiche sind frei von Material.

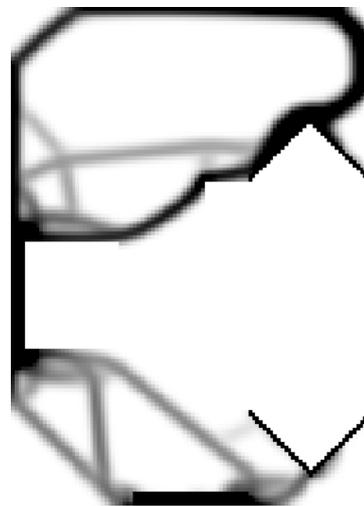


Abb. 2: Lösung der Topologieoptimierung. Die Graustufen stellen die Dichteverteilung des verwendeten Materials dar.

3 Graphenextraktion aus einem Graustufenbild

Um die Topologie strukturell erfassen zu können, soll das Ergebnis der Topologieoptimierung so exakt wie möglich durch einen Graph wiedergegeben

werden. Es soll also ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e für die Dicke der Kanten bestimmt werden. Dafür wird das Bild zunächst gerundet, um ein Schwarz-Weiß-Bild zu erhalten. Die gewählte Rundungsoperation setzt Dichtewerte auf 1, wenn sie einen gegebenen Schwellwert überschreiten. Die Wahl dieses Schwellwertes ist abhängig von der vorgegebenen Materialmenge. Hierdurch ist allerdings eine leichte Änderung der Topologie möglich. Bei der Führungsschiene des Fassadenreinigers sieht man das z. B. an der Verbindung zwischen dem oberen Ende der unteren linken Lauffläche mit dem Restprofil (vgl. Abbildungen 2 und 4).

In dem resultierenden Schwarz-Weiß-Bild wird das sog. Skelett berechnet, das heißt, dass die dargestellte Form auf eine Dicke von einem Pixel geschrumpft wird, ohne die Topologie des Bildes zu verändern (vgl. [5]). In unserem Beispiel ist das Skelett im wesentlichen durch Abbildung 4 (oben) gegeben. Im Skelett können die Verzweigungspunkte bestimmt werden, also solche, in denen mehrere Kanten in einem Punkt zusammenlaufen. Diesen werden noch die Endpunkte aller Kanten hinzugefügt, die noch keine Verzweigungspunkte waren. In unserem Beispiel sind das unter anderem die beiden Endpunkte der unteren Lauffläche. Die Verzweigungspunkte werden im nächsten Schritt vergrößert (vgl. [6]). Dabei können die vergrößerten Umgebungen von mehreren Verzweigungspunkten zu einem größeren Objekt zusammenwachsen. Die Schwerpunkte dieser Objekte bilden die Knoten V von G (vgl. Abbildung 3).

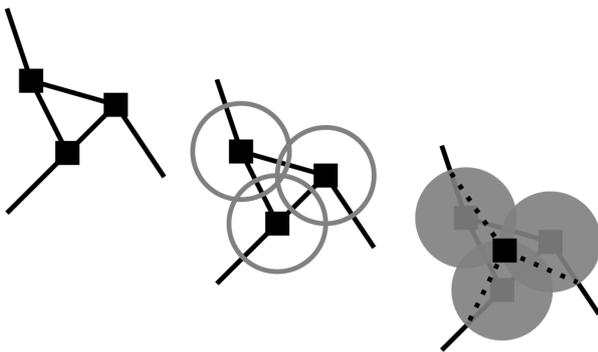


Abb. 3: Zusammenwachsen der Verzweigungspunkte zu größeren Gebieten: Skelett mit Verzweigungspunkten (links), Vergrößerung der Verzweigungspunkte (mitte), Schwerpunkt des grauen Bereichs als Knoten von V (rechts)

Wenn alle diese Objekte entfernt werden, bilden die übrig gebliebenen, zusammenhangslosen Linien die

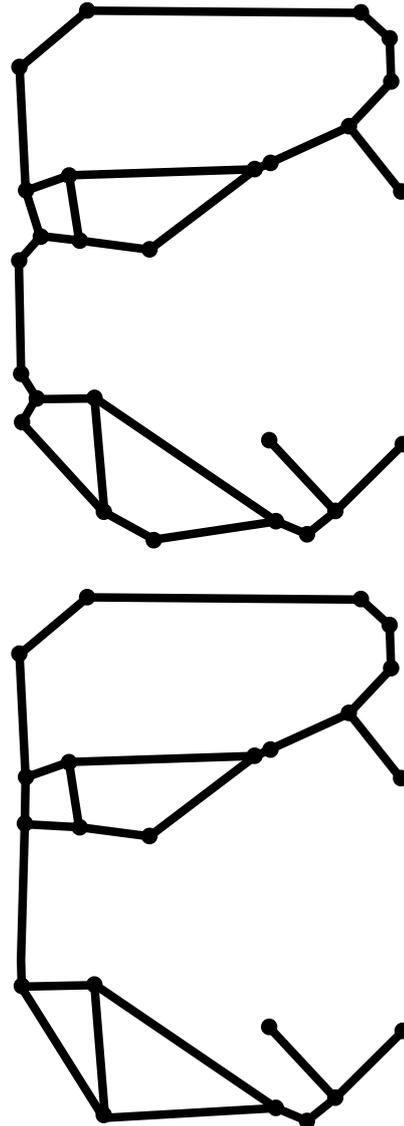


Abb. 4: Extrahierter Graph (oben) und vereinfachter Graph (unten)

Kanten E des Graphen G . Innerhalb des Programmes ist es zusätzlich möglich, die automatisch erkannten Verzweigungspunkte zu verändern. In Kanten, die einen Knick besitzen, wird nicht automatisch im Knick ein zusätzlicher Verzweigungspunkt angelegt, weshalb dieser manuell ergänzt werden kann. Unnötige Verzweigungspunkte können ebenfalls entfernt werden, wenn dadurch die Topologie nicht beeinflusst wird. Um die noch fehlende Dicke c_e einer Kante zu bestimmen, wird zunächst ein Faktor f berechnet, der angibt, um wie viel das Skelett vergrößert werden muss, damit das gerundete Schwarz-Weiß-Bild überdeckt werden kann. Anschließend wird eine Kante e aus dem Skelett entfernt und der Rest um den Faktor f vergrößert.

Dieses Bild wird vom Schwarz-Weiß-Bild abgezogen. Es verbleibt nur noch die Kante e . Hiervon wird der Flächeninhalt errechnet (es werden die Fläche aus dem Schwarz-Weiß-Bild, aber die Werte aus dem Graustufenbild verwendet) und durch ihre Länge geteilt, um die Dicke zu erhalten. Die Länge ergibt sich dabei als der Abstand zwischen den beiden Endpunkten. Spätestens durch das Hinzufügen zusätzlicher Verzweigungspunkte kann eine Kante als hinreichend gerade angenommen werden, weshalb der Abstand der Endpunkte der tatsächlichen Länge entspricht. Falls dieses Vorgehen nicht funktionieren sollte, werden die Werte aus dem Graustufenbild verwendet, die durch die Kante im Skelett beschrieben werden. Dies kann zum Beispiel vorkommen, wenn die Kante zu kurz ist und das vergrößerte Skelett die zu berechnende Kante bereits überdeckt. Alle Dicken werden als relative Werte gespeichert, da sonst die Auflösung des Bildes über die Dicke einer Kante mitentscheidet. Um daraus die absoluten Werte zu erhalten, kann z. B. der größte Dickenwert auf die maximal zulässige Blechdicke gesetzt und die anderen Werte im Bezug darauf errechnet werden. Ein weiteres Verfahren wird in Abschnitt 6 beschrieben.

Abbildung 4 (oben) zeigt den Graphen, der entsteht, wenn das Verfahren auf das Bild aus Abbildung 2 angewendet wird. Die zusätzlichen Kantengewichte werden hier nicht gezeigt. Diese werden zusammen mit dem Graphen in einem mit dem Fachgebiet Datenverarbeitung in der Konstruktion (DiK) abgesprochenen Format gespeichert und weitergeleitet. Der extrahierte Graph spiegelt nicht in jedem Detail die gewünschte Form wider, die man in Abbildung 2 erkennen kann. Aus diesem Grund wurde der Graph an wenigen Stellen angepasst. So sind an der linken Seite beispielsweise mehrere Knoten zu einem zusammengefasst worden, um eine gerade Profilkante zu erzeugen (vgl. Abbildung 4 (unten)).

4 Geometrieoptimierung des Profilquerschnitts

Ausgehend von den zuvor generierten Grapheninformationen soll nun die Geometrie des Profilquerschnitts weiter optimiert werden. Dazu werden die Informationen über die Querschnittstopologie sowie über Blechdicken und -längen aus dem Graphen in eine Querschnittsform übersetzt und zuge-

hörige PDE-restringierte Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \min \quad & J(y, u) \\ \text{s. t.} \quad & C(y, u) = 0 \\ & h(u) \leq 0 \\ & y \in Y, u \in U \end{aligned} \quad (1)$$

aufgestellt. Hierbei bezeichnet $J : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$ die Zielfunktion, $C(y, u) = 0$ die Zustandsgleichung und $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Geometrieebenenbedingungen. Ferner sind durch $y \in Y$ und $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ die Zustands- und die Designvariablen gegeben. Für eine Übersicht über die Konzepte der PDE-restringierten Optimierung verweisen wir auf [7]. Das mechanische Bauteilverhalten der betrachteten Strukturen unter vorgegebener Belastung wird durch die linearen Elastizitätsgleichungen beschrieben, siehe zum Beispiel [8]. Die Zustandsvariable y gibt somit die Verschiebungen im Bauteil an, die aus auf das Bauteil wirkenden Kräften resultieren. Zur Optimierung der Steifigkeit der Strukturen wird deren Nachgiebigkeit minimiert, welche eine etablierte Zielfunktion in der Strukturoptimierung ist. Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, in dem Volumenkräfte f wirken, und für eine Teilmenge des Randes $\Gamma_N \subseteq \partial\Omega$, auf die Oberflächenkräfte g wirken, berechnet sie sich als

$$J_c(y, u) = \int_{\Omega(u)} f(u) \cdot y \, dx + \int_{\Gamma_N(u)} g(u) \cdot y \, ds. \quad (2)$$

4.1 Parametrisierung der Querschnittsform

Zur Parametrisierung der Bauteilgeometrie mit Hilfe endlich vieler Designvariablen wird die Querschnittsform in Teilgebiete unterteilt. Dazu wird zuerst für jeden Knoten im Graphen mit Grad 2 eine Unterteilung im Querschnitt eingefügt. Jeder Knoten v des Graphen mit Grad $\deg(v) \geq 3$ wird durch ein Polygon mit $\deg(v)$ Ecken dargestellt. Für einen Knoten von Grad 3 erhalten wir also ein dreieckiges Teilgebiet. In Abbildung 5 ist ein Beispiel für die Überführung von Grapheninformationen in eine Querschnittsform mit Teilgebieten zu sehen. Abbildung 6 zeigt eine Unterteilung des Querschnitts, der aus den zuvor generierten Grapheninformationen gewonnen wurde.

Die kartesischen Koordinaten der Teilgebieten-Eckpunkte werden als Designvariablen für die Geometrieoptimierung verwendet und im Designvektor u zusammengefasst. Jeder Punkt im Bauteil

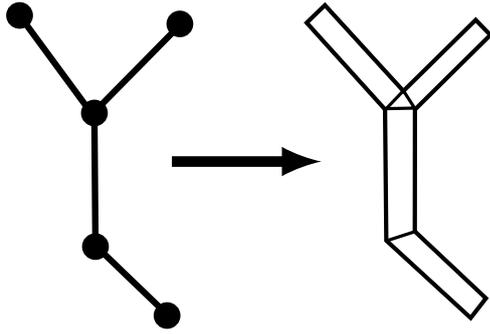


Abb. 5: Überführung von Grapheninformationen (links) in Teilgebiete eines Profilquerschnitts (rechts)

kann mit Hilfe dieser Eckpunkte beschrieben werden. Beispielsweise kann die Geometrie eines dreieckigen Teilgebiets mit Hilfe seiner Eckpunkte durch eine lineare Transformation verändert werden. Für Teilgebiete mit mehr als drei Ecken lassen sich analog andere Beschreibungen der im Teilgebiet liegenden Punkte formulieren.

Eine solche Parametrisierung lässt eine große Flexibilität der Querschnittsgeometrie zu, insbesondere bezüglich der Winkel zwischen den einzelnen Blechstücken. Für Querschnitte mit ausschließlich rechten Winkeln und eine Parametrisierung mit Hilfe rechteckiger und trapezförmiger Teilgebiete verweisen wir auf [9].

4.2 Geometrienebenbedingungen

Insbesondere Fertigungsrestriktionen, die im vorherigen Modell zur Topologieoptimierung nicht berücksichtigt werden konnten, sollen in die nachgeschaltete Formoptimierung einfließen. Nebenbedingungen an die Bauteilform müssen nun mit Hilfe der gewählten Designvariablen, also der Eckpunkte der einzelnen Dreiecksgebiete, formuliert werden. Als Nebenbedingungen an die Bauteilform werden zum einen die Bauraumrestriktionen, die schon im Topologieoptimierungsproblem verwendet wurden, übernommen.

Des Weiteren können nun auch Bedingungen an die einzelnen Blechstücke gestellt werden. Von besonderer Bedeutung sind hierbei Schranken an die Dicken oder auch die Längen der betrachteten Blechstücke. Solche Nebenbedingungen konnten bei der vorangegangenen Topologieoptimierung nicht berücksichtigt werden, spielen für die Fertigbarkeit der betrachteten Bauteile aber eine wichtige Rolle. Außerdem können beispielsweise

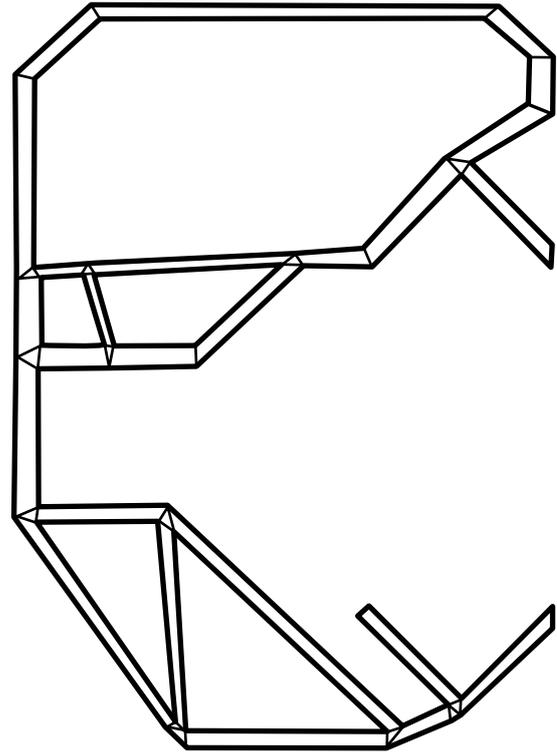


Abb. 6: Unterteilung des Querschnitts in Teilgebiete

Steigungen bestimmter Blechstücke oder Winkel zwischen ihnen durch entsprechende nichtlineare Nebenbedingungen an die Designvariablen formuliert werden.

4.3 Numerische Ergebnisse

Aus der Querschnittsform und den Informationen über die Teilgebiete wird mit Hilfe des MATLAB-internen Gittergenerators ein Finite-Elemente-Gitter erzeugt. Für eine Übersicht über Finite-Elemente-Methoden verweisen wir auf [10]. Die Berechnung der Verschiebungen erfolgt mit quadratischen Ansatzfunktionen. Im Folgenden wird von einer zweidimensionalen Berechnung ausgegangen. Das prinzipielle Vorgehen kann jedoch leicht auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden. Hierzu muss der Bauteilquerschnitt vor der Gittergenerierung in die dritte Dimension extrudiert werden.

Abbildung 7 zeigt den Profilquerschnitt mit den aus den Belastungen, siehe Abbildung 1, resultierenden Verschiebungen. Die Verschiebungen werden repräsentiert durch Graustufen, wobei ein dunklerer Grauton eine stärkere Verschiebung repräsentiert.

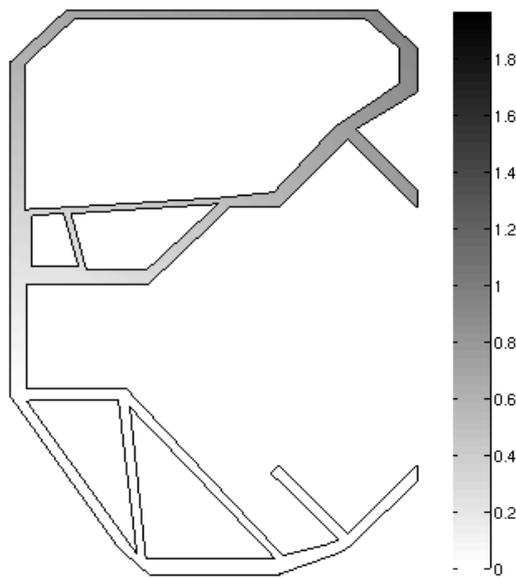


Abb. 7: Profilquerschnitt mit aus den Belastungen resultierenden Verschiebungen (repräsentiert durch Graustufen)

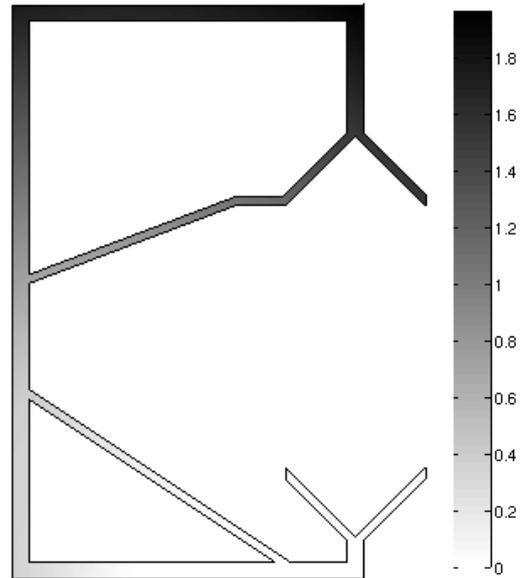


Abb. 8: Startlösung für die Geometrieoptimierung des Profilquerschnitts, Graustufen repräsentieren die Norm der Verschiebungen

Zur Sicherstellung einer fertigungsgerechten Konstruktion im Rahmen des SFB 666 wurde die Querschnittstopologie vereinfacht, bevor sie weiter optimiert wurde. Die Blechdicken wurden hierbei auf entweder 1 mm oder 2 mm fixiert. Der Graph aus Abbildung 4 wurde daher entsprechend angepasst und das in den Abschnitten 3 und 4 beschriebene Vorgehen auf den neuen Graphen angewendet. Die angepasste Querschnittsgeometrie soll nun weiter optimiert werden. In Abbildung 8 ist die Startlösung für die Geometrieoptimierung zu sehen. Die Graustufen repräsentieren wieder die Norm der Verschiebung und es wurde die gleiche Grauskala wie in Abbildung 7 verwendet. Der deutlich dunklere Grauton in der oberen Hälfte des Querschnitts verdeutlicht den Steifigkeitsverlust durch die Vereinfachung der Profilgeometrie. Durch die Vereinfachung steigt der Wert der Nachgiebigkeit, siehe (2), um 62,56 %, der Wert der maximalen Verschiebung steigt um 19,06 %. Das Bauteilvolumen verringert sich um 7,00 %.

Für die Optimierung der Querschnittsgeometrie aus Abbildung 8 wurde ein MATLAB-internes Innere-Punkte-Verfahren verwendet. Für eine Einführung in Innere-Punkte-Verfahren verweisen wir auf [11]. Die Blechdicken der einzelnen Blechstücke wurden durch Nebenbedingungen fixiert, sodass die vorher festgelegten Dicken von 1 mm und 2 mm beibehalten wurden. So wurden durch die Optimierung nur



Abb. 9: Optimierte Geometrie des Profilquerschnitts, Graustufen repräsentieren die Norm der Verschiebungen

Blechlängen und -positionen verändert. Außerdem wurde eine obere Schranke an das Querschnittsvolumen gestellt. Über Schranken an die einzelnen Designvariablen, d. h. obere und untere Schranken an die Koordinaten der Eckpunkte der Teilgebiete, wurde eine zu starke Abweichung von der Startgeometrie verhindert. Der Wert der Nachgiebigkeit

konnte durch die Optimierung um 44,44 % im Vergleich zum Startquerschnitt aus Abbildung 8 reduziert werden. Die maximale Verschiebung verringerte sich um 17,61 %. Das Volumen des Profilquerschnitts nahm um 5,10 % ab. Die optimierte Geometrie des Profilquerschnitts ist in Abbildung 9 zu sehen.

Insgesamt konnte ein großer Teil des Steifigkeitsverlusts, der aus der Vereinfachung des Querschnitts resultiert, durch die Geometrieoptimierung kompensiert und dabei sogar Gewicht eingespart werden. Grundsätzlich kann die Geometrieoptimierung natürlich auch ohne zusätzliche Vereinfachungen direkt auf den Querschnitt aus Abbildung 7 angewendet werden, allerdings ist diese Topologie aufwändiger zu fertigen.

5 Graphenpartitionierung

Bei der Herstellung eines Bauteils wird ein sehr großer Teil der Zeit darauf verwendet, die Anlage auf die Produktion eines bestimmten Einzelteils zu justieren. Vor allem wenn ein Bauteil aus verschiedenen Einzelteilen besteht, die auf derselben Produktionsanlage hergestellt werden, sind die Rüstzeiten groß. Um diese Zeiten zu verkürzen, werden hier Unterteilungen in Einzelteile gesucht, die entweder komplett identisch sind oder so ähnlich wie möglich.

5.1 Zerlegung in gleiche Teile

Die Fragestellung, ob ein Bauteil sich aus einer vorgegebenen Anzahl an komplett identischen Einzelteilen fertigen lässt, kann als ganzzahliges Optimierungsproblem formuliert werden. Dabei wird das Bauteil als Graph $G = (V, E)$ aufgefasst und k als die Anzahl der Einzelteile angenommen. Gesucht wird eine Partition $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ der Knoten, so dass die auf den Knoten induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ isomorph sind. Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\Psi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, für die gilt $(v, w) \in E_1$ genau dann wenn $(\Psi(v), \Psi(w)) \in E_2$. Zum Lösen des Optimierungsproblems werden folgende drei Binärvariablen eingeführt. Die Variable x_v^k gibt an, ob Knoten v in Partition k liegt. Die Variable $y_{v,w}$ beschreibt, ob die Kante $\{v, w\}$ eine Kante in G ist und ob zudem v und w in der gleichen Partition liegen. Die Variable $z_{v,w}$ nimmt den Wert 1 an, wenn Knoten v mit Knoten w identifiziert wird. Im Fall

$k = 2$ entscheidend für die Isomorphie sind dabei die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} z_{v,s} + z_{v,t} + z_{w,s} + z_{w,t} &\leq 2 + (y_{v,w} - y_{s,t}), \\ z_{v,s} + z_{v,t} + z_{w,s} + z_{w,t} &\leq 2 - (y_{v,w} - y_{s,t}). \end{aligned}$$

Diese sorgen dafür, dass das Knotenpaar (v, w) nur dann mit dem Knotenpaar (s, t) identifiziert wird, wenn $y_{v,w} = y_{s,t}$ gilt. Das bedeutet, dass ein Knotenpaar (v, w) nur mit einem anderen Knotenpaar (s, t) identifiziert werden kann, wenn entweder je eine Kante zwischen v und w sowie zwischen s und t existiert oder keine Kante zwischen v und w sowie keine Kante zwischen s und t existiert. Dies entspricht direkt der obigen Definition eines Graphen-Isomorphismus. Für den Fall $k > 2$ existieren verwandte Modelle.

Es entsteht zusätzlich das Problem, dass die Teilgraphen nicht zusammenhängend sein könnten. Da jede Zusammenhangskomponente ein Einzelteil darstellt, läge dann eine Zerlegung in mehr als k Einzelteile vor. Damit die $G[V_i]$ zusammenhängend sind, werden Flussvariablen eingeführt und von jedem Knoten ein Mindesteinfluss von 1 gefordert.

Da es selten vorkommt, dass ein Bauteil aus zwei exakt gleichen Einzelteilen besteht, kann das Modell auch dahingehend erweitert werden, dass es eine Partition $k + 1$ gibt, die nicht zu den restlichen Partitionen isomorph sein muss. Eine naheliegende Zielfunktion dabei ist, die Größe dieser Partition zu minimieren.

5.2 Zerlegung in ähnliche Teile

Mit obigem Verfahren muss das Bauteil unter Umständen in sehr viele Einzelteile zerlegt werden. Eine mögliche Erweiterung besteht darin, keine exakte Isomorphie zu fordern, sondern *ähnliche* Teile zu erlauben. Die Idee dahinter ist, die Anlage für ein weiteres Einzelteil zwar umzurüsten, diesen Rüstvorgang aber so kurz wie möglich zu halten. Zu diesem Zweck wird eine Funktion gesucht, die den Abstand zweier Graphen voneinander misst. Die Partition wird dann so gewählt, dass die einzelnen $G[V_i]$ diese Funktion minimieren.

Eine Möglichkeit ist zwei Graphen durch den Grad ihrer Knoten zu vergleichen. Wenn es in G_1 zwei Knoten gibt, deren Grad $\deg(v)$ gleich 3 ist, in G_2 aber vier solcher Knoten existieren, dann werten wir das als einen Unterschied von 2. Summiert

über alle Knotengrade können wir damit ein Ähnlichkeitsmaß aufstellen.

Für die Berechnung einer Partition in Teile, die dieses Maß minimieren, wird ein ganzzahliges Optimierungsproblem aufgestellt. Hierbei werden Binärvariablen $z_{v,i}^k$ eingeführt, die angeben, ob $\deg(v) = i$ gilt und v in Partition k liegt. Damit lässt sich $z_i^{k_1, k_2} := \sum_{v \in V} |z_{v,i}^{k_1} - z_{v,i}^{k_2}|$ definieren, das angibt, um wie viele Knoten von Grad i sich Partitionen k_1 und k_2 unterscheiden. Daraus ergibt sich die Zielfunktion als

$$\min \sum_{k_1 < k_2} \sum_i z_i^{k_1, k_2}.$$

Wenn dieses Modell auf den Graphen der Führungsschiene des Fassadenreinigers angewendet wird, ergibt sich die Partition, wie sie in Abbildung 10 zu sehen ist. Dabei kann man sehen, dass die obere Lauffläche aus zwei Einzelteilen zusammengesetzt ist. Die im SFB erforschte Technologie ist aber genau an dieser Stelle sinnvoll einsetzbar [1], was der Fertigung der Lauffläche aus einem Stück entspricht. Nebenbedingungen dafür können nicht allgemein aufgestellt werden und hängen vom speziellen Bauteil ab.

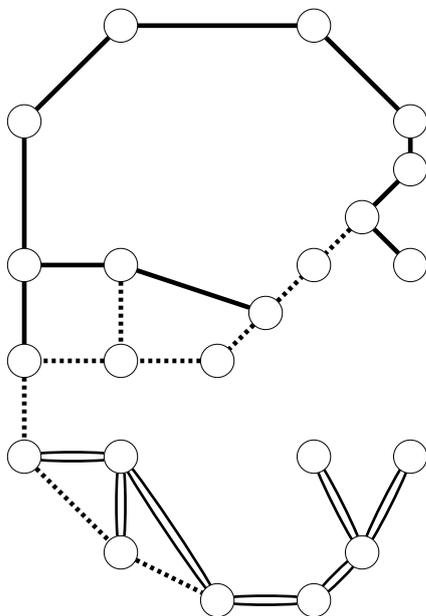


Abb. 10: Knoten-Grad-Ähnlichkeit: Zerlegung der Führungsschiene des Fassadenreinigers in drei ähnliche Einzelteile: durchgezogene, gestrichelte und doppelte Linien

Das eben beschriebene Maß hat den großen Vorteil, dass es sehr leicht zu berechnen ist, andererseits aber den Nachteil, dass selbst wenn die Differenz von G_1 und G_2 das Maß 0 hat, G_1 und G_2 nicht isomorph sein müssen (vgl. Abbildung 12).

Ein Ausweg ist die sog. *Graph Edit Distance*, welche misst, wie viel ein Graph verändert werden muss, um daraus den anderen zu erhalten. Bei einer Distanz von 0 sind die Graphen G_1 und G_2 somit isomorph. Dieses Maß hat allerdings den Nachteil, dass allein die Bestimmung der Distanz von G_1 zu G_2 im Allgemeinen ein aufwändiges Problem darstellt. Die zusätzliche Partitionierung des Graphen steigert die Komplexität für beide Ähnlichkeitsmodelle. Für unser Beispiel kann die Zerlegung noch bestimmt werden (siehe Abbildung 11), der Rechenaufwand ist jedoch groß. Um die Ähnlichkeit zu berechnen, wurde dabei unter anderem das *Graph Matching Toolkit* [12] verwendet. Für die Zukunft ist geplant, diese Berechnungen zu beschleunigen.

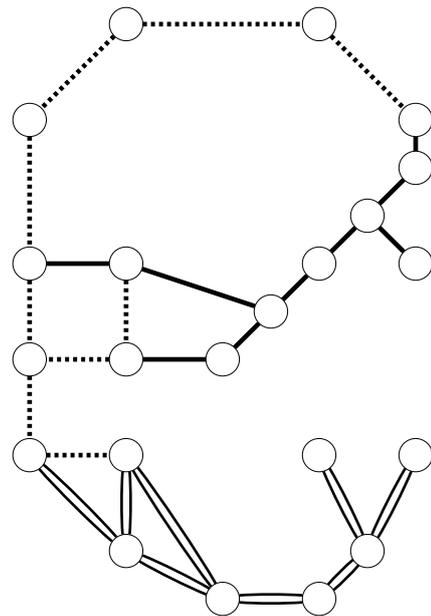


Abb. 11: Graph Edit Distance: Zerlegung der Führungsschiene des Fassadenreinigers in drei ähnliche Einzelteile: durchgezogene, gestrichelte und doppelte Linien

6 Abwicklung

Die vorhandenen Optimierungsergebnisse können darüber hinaus auch noch verwendet werden, um

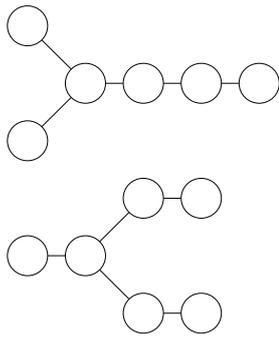


Abb. 12: Zwei nicht-isomorphe Graphen, die nach der Knoten-Grad-Ähnlichkeit einen Abstand von 0 haben, nach Graph Edit Distance einen Abstand von 2

eine Fertigungssequenz für die Herstellung des Bauteils zu bestimmen. Dafür kann das Steinerbaumverfahren verwendet werden, das in [13, 14] beschrieben ist. Im wesentlichen wird eine Fertigungssequenz bestimmt, die möglichst nahe an einer gegebenen Geometrie liegt. Als Eingabe dient wieder der Graph, der durch das in Abschnitt 3 beschriebene Verfahren gewonnen wurde. Dazu muss nur noch die relative Dicke der Kanten in eine absolute umgerechnet werden. In dem Fall der Führungsschiene des Fassadenreinigers liegt die minimale Dicke bei 0,5 mm und die maximale Dicke bei 2 mm, als Zieldicke streben wir daher 1,25 mm an. Der Faktor, mit dem die relativen Dicken multipliziert werden, errechnet sich aus dem Produkt der durchschnittlichen relativen Dicke mit der geforderten Dicke (1,25 mm). Für die Eingabe wird noch darauf geachtet, dass die minimale Blechdicke nicht unter- und die maximale Blechdicke nicht überschritten wird.

Als Ergebnis erhalten wir die Fertigungssequenz, wie sie in Abbildung 13 dargestellt ist. Diese unterscheidet sich von dem Ergebnis aus Abschnitt 5 unter anderem deswegen, da hier nicht auf die Ähnlichkeit der Einzelteile geachtet wird. Allerdings werden mehr Fertigungsrestriktionen beachtet als in dem Verfahren aus Abschnitt 5.

Eine mögliche Vorgehensweise für die Zukunft wäre es, beide Verfahren zu kombinieren und bei der Fertigungssequenz zusätzlich darauf zu achten, die Einzelteile möglichst ähnlich zu fertigen.

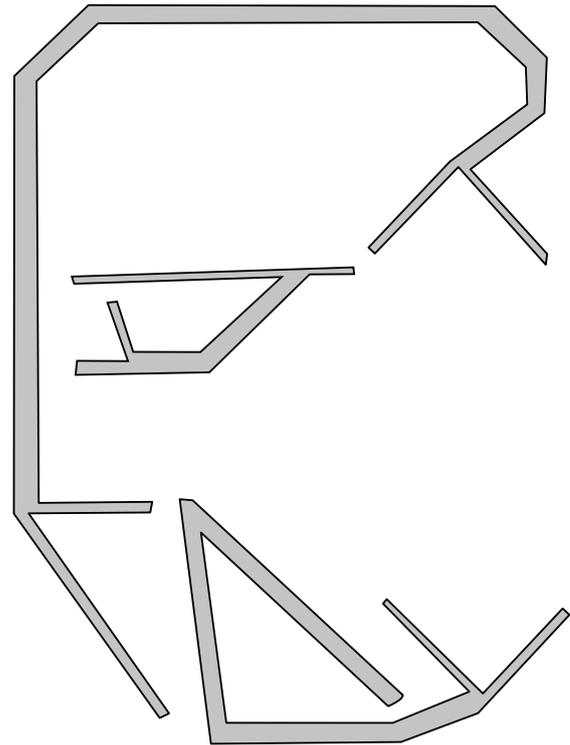


Abb. 13: Fertigungssequenz der Führungsschiene des Fassadenreinigers und Zerlegung in drei fertigmögliche Einzelteile. Das Ausgangsmaterial und die gespaltenen Flansche sind durch verschiedene Blechdicken dargestellt.

7 Zusammenfassung

Im Rahmen eines durchgängigen Produktentstehungsprozesses wurde ein Profilquerschnitt bezüglich Steifigkeit und Fertigbarkeit optimiert. Dabei wurden sowohl Methoden der nichtlinearen, PDE-restringierten Optimierung als auch der diskreten Optimierung verwendet. Die notwendigen Informationen, zum Beispiel über Belastungsszenario und Bauraumrestriktionen, wurden vorab am Fachgebiet für Produktentwicklung und Maschinenelemente (pmd) des Fachbereichs Maschinenbau der TU Darmstadt generiert und als eine strukturierte Entwicklungsaufgabe formuliert. Diese Entwicklungsaufgabe wurde dann als mathematisches Optimierungsproblem modelliert und es wurde eine optimierte Lösung generiert. Im Anschluss an den Optimierungsprozess können die gewonnenen Informationen über die Querschnittsgeometrie und über die Zerlegung und Abwicklung des Querschnitts an das Fachgebiet für Datenverarbeitung in der Konstruktion (DiK) des Fachbereichs Maschinenbau der TU Darmstadt

übermittelt werden, um dort in ein CAD-Modell des optimierten Bauteils überführt zu werden und so die Fertigung weiter zu unterstützen. Die hier vorgestellten Optimierungsprozesse bilden somit einen wesentlichen Bestandteil des im SFB 666 verfolgten durchgängigen Produktentstehungsprozesses.

Literatur

- [1] Groche, P.; Birkhofer, H.; Bauer, O.; Göllner, T.; Gramlich, S.; Kaune, V.; Rullmann, F.; Weitzmann, O.: *Potenziale einer durchgängigen Produktentstehung – Nutzung technologieinduzierter Eigenschaften zur Entwicklung von Blechstrukturen*. Konstruktion, 85–90, 2012
- [2] Bendsoe, M.P.; Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, 2003
- [3] Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B., Sigmund, O.: *Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 43(1):1–16, Springer, 2011
- [4] Göllner, T.; Günther, U.; Hess, W.; Pfetsch, M.; Ulbrich, S.: *Optimierung von Geometrie und Topologie flächiger verzweigter Blechbauteile und von Mehrkammerprofilen*. Tagungsband 4. Zwischenkolloquium Sonderforschungsbereich 666, Hrsg. P. Groche, 15–24, Meisenbach, 2012
- [5] Lam, L.; Lee, S.-W.; Suen, C.Y.: *Thinning Methodologies – A Comprehensive Survey*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(9):869–885, 1992
- [6] van den Boomgard, R.; van Balen, R.: *Methods for Fast Morphological Image Transforms Using Bitmapped Binary Images*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Image Processing, 54(3):254–258, 1992
- [7] Hinze, M.; Pinnau, R.; Ulbrich, M.; Ulbrich, S.: *Optimization with PDE Constraints*. Springer, 2008
- [8] Greve, R.: *Kontinuumsmechanik: Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer, 2003
- [9] Hess, W.: *Geometry Optimization with PDE Constraints and Applications to the Design of Branched Sheet Metal Products*. Dissertation, Dr. Hut, 2010
- [10] Brenner, S.C.; Scott, L.R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2002
- [11] Geiger, C.; Kanzow, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 2002
- [12] Riesen, K.; Emmenegger, S.; Bunke, H.: *A Novel Software Toolkit for Graph Edit Distance Computation*. Proc. 9th Int. Workshop on Graph Based Representations in Pattern Recognition, LNCS 7877, Hrsg. W. G. Kropatsch et al., 142–151, 2013
- [13] Ferreira, C.; Günther, U.; Martin, A.: *Mathematical Models and Polyhedral Studies for Integral Sheet Metal Design*. SIAM Journal on Optimization, 22(4): 1493–1517, 2012
- [14] Günther, U.: *Integral Sheet Metal Design by Discrete Optimization*. Dissertation, Dr. Hut, 2010