Analyse und Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen für Freiformflächen beliebiger Topologie

Von der Fakultät Mathematik der Universität Stuttgart
als Habilitationsschrift genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Ulrich Reif

aus Schwäbisch Hall

Hauptberichter:	Prof. Dr. K. Höllig
Mitberichter:	Prof. Dr. C. de Boor
	Prof. Dr. J. Hoschek
	Prof. Dr. L. L. Schumaker

Eingereicht am 9. 4. 1998
Habilitationsvortrag am 18. 11. 1998

Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart
Dezember 1998

für meine Eltern

Vorwort

Mein Interesse für Subdivisionsalgorithmen für Freiformflächen beliebiger Topologie wurde im Jahr 1990 von Prof. Dr. Klaus Höllig geweckt. Einerseits übten die verblüffende Einfachheit und Eleganz dieser Verfahren sofort eine starke Faszination auf mich aus, andererseits empfand ich die Tatsache, dass zum damaligen Zeitpunkt praktisch keine gesicherten analytischen Erkenntnisse vorlagen, als großen Anreiz für eigene Untersuchungen auf diesem Gebiet. Diese Arbeit stellt die seither gewonnenen Ergebnisse in einem einheitlichen Kontext dar und ergänzt sie durch eine Reihe neuer, bislang unpublizierter Resultate.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klaus Höllig, der mich in den vergangenen Jahren in vielfältiger Weise unterstützt und gefördert hat. Durch zahlreiche Gespräche, Anregungen und Ratschläge hat er meine Arbeit entscheidend geprägt, mir gleichzeitig aber auch die notwendige Freiheit gegeben, um eigene Wege einzuschlagen. Folgenden Kollegen bin ich für fachliche Diskussionen und konstruktive Zusammenarbeit dankbar: Ch. Bajaj, H. Bohl, W. Dahmen, W. Degen, N. Dyn, A. Kipp, L. Kobbelt, P. Lesky, D. Levin, J. Peters, H. Pottmann, H. Prautzsch, A. Ron, J. Warren und D. Zorin. Allen Mitarbeitern des 2. Lehrstuhls des Mathematischen Instituts A der Universität Stuttgart danke ich herzlich für die gute Zusammenarbeit; hervorheben möchte ich dabei Herrn Dr. Rainer Kraft, der mir bei Fragen und Problemen in Computerangelegenheiten stets kompetent und geduldig weitergeholfen hat. Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern und Schwiegereltern und ganz besonders meiner Frau Anke. Ihre beständige Unterstützung gaben mir großen Rückhalt und die notwendigen Freiräume bei der Erstellung dieser Arbeit.

Abschließend noch eine Bemerkung zur Orthographie: Die vorliegende Arbeit wurde nach den Regeln der neuen deutschen Rechtschreibung verfasst, wie sie auf der Wiener Orthographiekonferenz vom 22. bis 24. 11. 1994 beschlossen wurden [SG94]. Nach diesem bereits heute zulässigen Standard[1] wird derzeit an den meisten deutschen Schulen unterrichtet. Verbindlich werden soll er für die öffentlichen Verwaltungen im August dieses Jahres und für die Allgemeinheit im Jahr 2005. Angesichts einer anhaltenden Debatte in der Öffentlichkeit, unterschiedlicher gerichtlicher Entscheidungen und einem ablehnenden Votum des deutschen Bundestags ist das Schicksal der Reform aber heute zumindest ungewiss.

Stuttgart, im April 1998 — Ulrich Reif

[1] Dies wurde vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden–Württemberg mit Schreiben von 16. 2. 1998 bestätigt.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

1. Reguläre Subdivisionsalgorithmen

Verfolgt man die Geschichte der Subdivisionsalgorithmen zu ihren Anfängen zurück, so stößt man in der Literatur auf zwei Wurzeln, die, obgleich sie Varianten ein und desselben Verfahrens zum Gegenstand haben, in Stil und Intention stark differieren. Es handelt sich zum einen um Arbeiten von G. DE RHAM [dR47, dR56, dR59] und zum anderen um einen wesentlich später, aber offensichtlich unabhängig davon verfassten Artikel von G. M. CHAIKIN [Cha74]. Beide Autoren beschreiben einen Algorithmus zum iterativen Glätten von Polygonzügen.

De Rham betrachtet in seiner ersten Arbeit folgendes Verfahren [dR47]: In jedem Iterationsschritt werden die Seiten eines Polygonzugs in drei gleiche Teile geteilt und anschließend benachbarte Unterteilungspunkte miteinander verbunden, siehe Abbildung 1.1. Später verallgemeinert de Rham diesen Ansatz auf beliebige Teilverhältnisse $1 : w : 1$ für $w > 0$ [dR56, dR59]. Dieses elementare Konstruktionsprinzip wird einer eingehenden mathematischen Analyse unterzogen und insbesondere die Glattheit der erzeugten Grenzkurven untersucht, wobei sich unter anderem herausstellt, dass nur im Fall $w = 2$ stetige Differenzierbarkeit vorliegt.

Chaikins Algorithmus ist prinzipiell identisch, er wählt aber speziell das Teilverhältnis $1 : 2 : 1$, siehe Abbildung 1.2. Für ihn steht die Anwendbarkeit des Verfahrens in der Computergrafik im Mittelpunkt seines Interesses. Da nur Mittelungen, das heißt Additionen und Bitshifts, zur Berechnung der neuen Ecken erforderlich sind, ist der Algorithmus hocheffizient implementierbar. Zudem werden nur einige wenige Iterationsschritte benötigt, um aus einem Polygonzug eine visuell glatte Kurve zu generieren, deren Form intuitiv durch Veränderung der Ausgangsdaten modifiziert werden kann.

Beide Aspekte haben bis heute nichts von ihrer Aktualität und Faszination verloren: Einerseits sind Subdivisionsalgorithmen geometrische Verfahren, die aufgrund ihres elementaren Charakters eine mathematische Analyse per se rechtfertigen. Andererseits sind sie wegen ihrer meist extrem einfachen algorithmischen Form von großer Nützlichkeit in der Computergrafik und der geometrischen Datenverarbeitung. In der vorliegenden Arbeit sind sowohl analytische als auch konstruktive Gesichtspunkte berücksichtigt, wobei der Anspruch, eine vereinheitlichte mathematische Theorie zur Analyse von Subdivisionsalgorithmen für Freiformflächen beliebiger Topologie zu entwickeln, deutlich im Vordergrund steht.

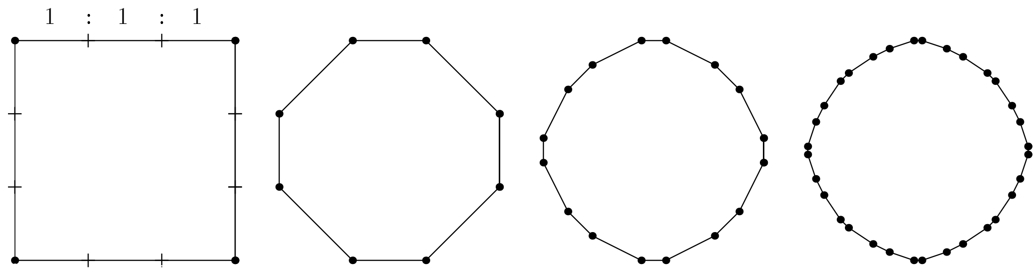


Abbildung 1.1. De Rhams Trisektionsalgorithmus.

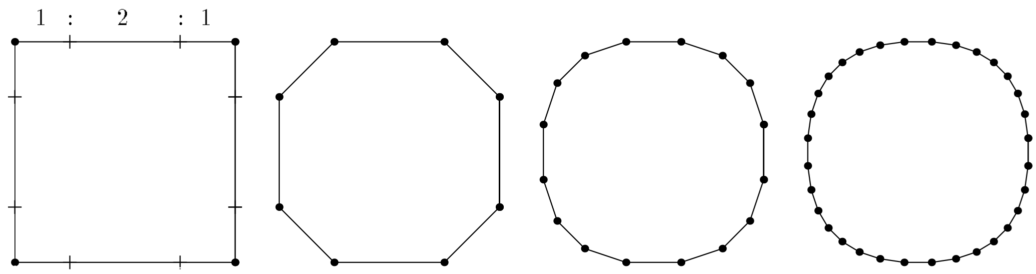


Abbildung 1.2. Chaikins Algorithmus.

Eine erste mathematische Analyse von Chaikins Algorithmus findet sich in [Rie75]. Hier wird die bereits von Chaikin erwähnte Tatsache ausgearbeitet, dass die erzeugten Grenzkurven bei geeigneter Parametrisierung uniforme quadratische Splines und damit stetig differenzierbar sind. Genauer gesagt entspricht ein Schritt von Chaikins Algorithmus gerade dem simultanen Einfügen von neuen Knoten zwischen je zwei benachbarte gegebene Knoten eines uniformen quadratischen Splines. Subdivisionsalgorithmen, die auf dem Knoteneinfügen bei B-Splines und Boxsplines basieren, haben seither weite Verbreitung gefunden, siehe beispielsweise [Boe80, CLR80, LR80, DM84, Boe85, dBHR93]. Da Algorithmen dieser Art in der Regel gegen den ursprünglich definierten Spline konvergieren [CS85, DDL85, Dah86, dBHR93, PK94], erübrigt sich hier eine gesonderte Analyse der erzeugten Grenzkurven bzw. –flächen.

Diese Situation ändert sich, wenn Subdivisionsalgorithmen betrachtet werden, die sich nicht aus Splinefunktionen ableiten. Beispiele hierfür sind das bereits erwähnte Trisektionsverfahren von de Rham [dR47] oder die Vierpunktregel [Dub86, DGL87]. Dies ist ein interpolierendes Verfahren, bei dem zwischen je zwei aufeinanderfolgende Ecken eines Polygonzugs $\{\mathbf{p}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ein neuer Punkt eingefügt wird. Es gilt für den verfeinerten Polygonzug $\{\tilde{\mathbf{p}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ genauer

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}_{2j} &:= \mathbf{p}_j \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2j+1} &:= (1/2+w)(\mathbf{p}_j+\mathbf{p}_{j+1}) - w(\mathbf{p}_{j-1}+\mathbf{p}_{j+2})\,,\end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $w > 0$ ein Parameter ist. Abbildung 1.3 illustriert den Algorithmus für die kanonische Wahl $w = 1/16$. Für den allgemeinen Fall linearer stationärer

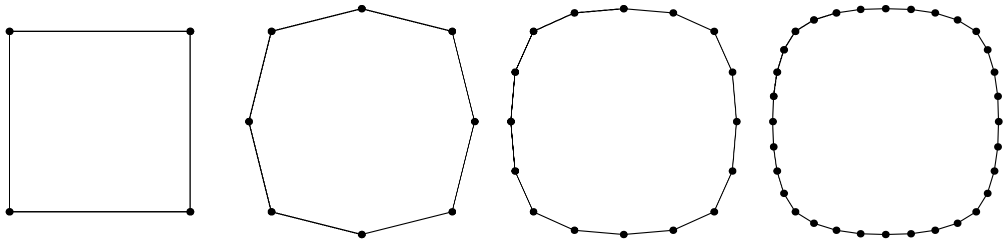


ABBILDUNG 1.3. Vierpunktregel für $w = 1/16$.

Algorithmen der Form

$$\tilde{\mathbf{p}}_{2j} := \sum_k a_k \mathbf{p}_{j-k}\,, \quad \tilde{\mathbf{p}}_{2j+1} := \sum_k b_k \mathbf{p}_{j-k} \tag{1.2}$$

mit Parametern $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und ebenso für analoge multivariate Verfahren über regulären Gittern ist in den letzten Jahren eine umfangreiche Theorie entwickelt worden, siehe beispielsweise [GD86, MP87b, MP87a, MP89, DGL91, Dyn91, CDM91, DL92, Kob98a]. Vergleichsweise wenig ist dagegen für den nichtstationären oder nichtlinearen Fall bekannt, wie er beispielsweise auftritt, wenn konvexitätserhaltende Algorithmen konstruiert werden [DLL92, KvD97, MU94] oder wenn Variationstechniken zur Formoptimierung eingesetzt werden [Kob95b, Kob95a, Kob96]. Allgemeine Resultate zu Corner-Cutting-Algorithmen finden sich in [dB87, dB90], während asymptotisch stationäre Verfahren in [DL92, DL95] untersucht werden.

2. Subdivisionsalgorithmen für Freiformflächen beliebiger Topologie

Bereits seit längerer Zeit gibt es aber auch Verfahren, die sich in den oben kurz skizzierten Kontext nicht nahtlos einordnen lassen und deren Analyse trotz ihrer meist sehr einfachen Struktur lange Zeit ein offenes Problem war, nämlich Subdivisionsalgorithmen für Freiformflächen beliebiger Topologie. Hierunter versteht man Verfahren zur iterativen Verfeinerung beliebiger räumlicher Kontrollnetze; es wird also anschaulich gesprochen keine regelmäßige periodische Struktur vom Typ beispielsweise eines Schachbretts oder einer Bienenwabe vorausgesetzt.

Die Idee für derartige Algorithmen geht auf E. CATMULL zurück; erste Ansätze finden sich bereits in [Cat74]. Angeregt durch Chaikins Verfahren zur Glättung von Polygonzügen entwickelte Catmull etwas später Verfahren, die Verallgemeinerungen der Subdivisionsalgorithmen für biquadratische und bikubische Tensorproduktsplineflächen sind. Die Idee ist im Prinzip einfach: Wo immer möglich, werden die Standardgewichte des regulären Falls zur Verfeinerung des Kontrollnetzes verwendet. In der Nähe von Irregularitäten, also dort, wo $n \neq 4$ Vierecke oder Vierecke und n-Ecke zusammenstoßen, werden spezielle Gewichte gemäß gewisser Heuristiken frei festgelegt. Eine erste Implementierung derartiger Algorithmen durch J. CLARK ergab für geeignet gewählte spezielle Gewichte sehr

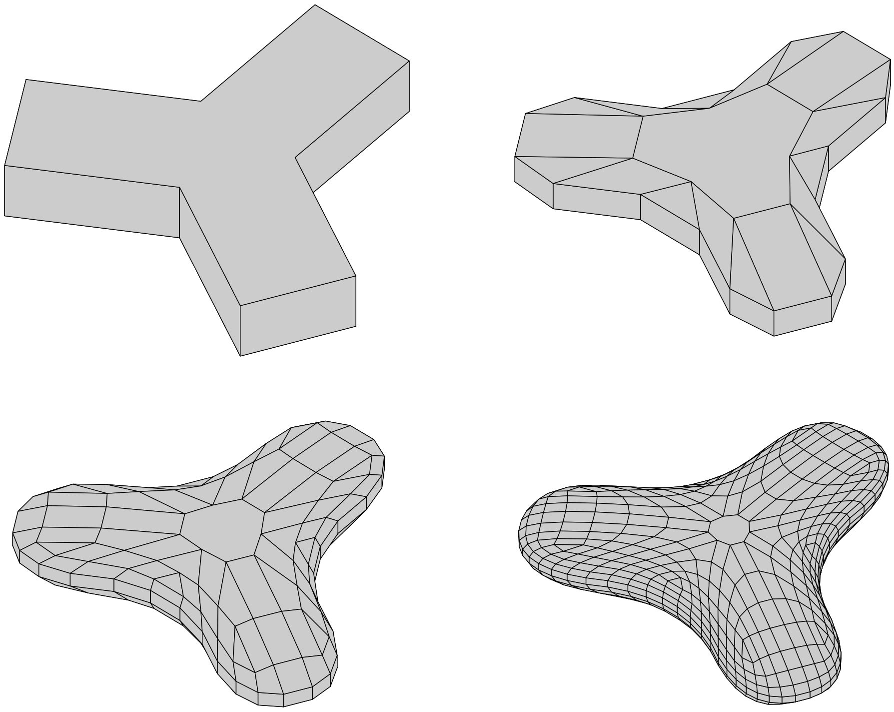


Abbildung 1.4. Drei Iterationen des Doo-Sabin-Algorithmus.

gute experimentelle Resultate, das heißt optisch glatte Flächen, von denen Catmull und Clark im bikubischen Fall sogar vermuteten, sie seien krümmungsstetig. Die beiden Algorithmen wurden erstmals in [CC78] veröffentlicht. Zeitgleich erschien im selben Journal eine Abhandlung von D. Doo und M. Sabin [DS78], in der erste analytische Betrachtungen und verbesserte Gewichte für den biquadratischen Fall zu finden sind. Seither werden die Verfahren für den biquadratischen und den bikubischen Fall als *Doo-Sabin-Algorithmus* bzw. *Catmull-Clark-Algorithmus* bezeichnet. Abbildung 1.4 illustriert den Doo-Sabin-Algorithmus; Abbildungen zum Catmull-Clark-Algorithmus finden sich in Kapitel 4.

Die Algorithmen von Doo-Sabin und Catmull-Clark wurden in der Folge hinsichtlich der Wahl der speziellen Gewichte verallgemeinert [BS86], es entstanden aber auch neue, verwandte Verfahren. Zu nennen sind hier unter anderem ein Algorithmus von Ch. Loop, der eine Verallgemeinerung des Subdivisionsalgorithmus für quartische Splines über Dreiecken ist [Loo87], der Butterfly-Algorithmus von N. Dyn, D. Levin und J.A. Gregory [DLG90] sowie ein Algorithmus von M. Leber [Leb94]. Die beiden letztgenannten Verfahren sind Verallgemeinerungen der Vierpunktregel für Dreiecks- bzw. Vierecksnetze. Weiterhin verdient eine von L. Kobbelt entwickelte Klasse von Verfahren, die auf der Anwendung von Variationsmethoden beruht, aufgrund exzellenter Formeigenschaften besondere Beachtung [Kob95b, Kob97, Kob98b].

Trotz ihrer komplexen analytischen Struktur sind Subdivisionsflächen zum Lösen von Interpolations– und Approximationsproblemen geeignet und selbst Glattheitsfunktionale lassen sich zur Formoptimierung einsetzen [DHK93]. Industrielle Anwendung finden Subdivisionsalgorithmen derzeit aber hauptsächlich in der Computergrafik. Das prominenteste Beispiel hierfür ist der kürzlich fertiggestellte, vollständig computeranimierte Kurzfilm *Geri's Game* der Firma Pixar. Hier werden Unterteilungsalgorithmen zur Erzeugung fast aller bewegten Motive eingesetzt. Man macht sich dabei die hohe Effizienz der Verfahren ebenso zunutze wie die Eigenschaft der Flächen, als eine aufsteigende Folge immer detailreicherer Approximationen darstellbar zu sein. Da der Verfeinerungsprozess insbesondere auch lokal, das heißt auf einzelne Flächenteile begrenzt, durchgeführt werden kann, wird eine Multiskalentechnik für Freiformflächen beliebiger Topologie verfügbar, wie sie mit dem Wavelet-Konzepts für reguläre Parametergebiete bereits in hoher Vollkommenheit zur Verfügung steht. Erste Ansätze für diese vielversprechende Entwicklung werden in [EDD$^+$95, LDW97, Zor97] beschrieben.

Die immer wieder empirisch belegten guten praktischen Eigenschaften der oben genannten Subdivisionsalgorithmen standen lange Zeit in einem auffallenden Kontrast zu dem Fehlen substanzieller analytischer Resultate. Bereits die Arbeit von Doo und Sabin [DS78] enthält eine Reihe wichtiger Ansätze; so wird insbesondere die Iteration in der Umgebung irregulärer Punkte durch eine zyklische *Subdivisionsmatrix* beschrieben, deren Eigenwerte mittels diskreter Fouriertransformation bestimmt und auch ein Zusammenhang zwischen dem Spektrum der Subdivisionsmatrix und der Glattheit der erzeugten Grenzfläche hergestellt. Dies hat jedoch eher skizzenhaften Charakter und es dauert danach noch einige Jahre, bis A.A. Ball und D.J.T. Storry in einer Reihen von Arbeiten einen ersten ernsthaften Versuch unternehmen, die Konvergenz des Catmull-Clark-Algorithmus gegen stetig differenzierbare Grenzflächen zu beweisen [BS86, BS88, BS90]. Trotz einer Reihe richtiger Teilergebnisse bleibt dieses Unterfangen jedoch letztendlich erfolglos. Die Gründe hierfür werden in [Rei93] aufgezeigt.

In derselben Arbeit sowie später auch in [Rei95d] wird von U. Reif ein neuer Ansatz zur Analyse von Subdivisionsalgorithmen vorgeschlagenen: Eine Subdivisionsfläche $\mathbf{x}$ wird danach nicht als Grenzwert einer Folge von Kontrollnetzen betrachtet, sondern vielmehr als Vereinigung ringförmiger Flächenstücke $\mathbf{x}_m$, die einen irregulären Punkt umschließen,

$$\mathbf{x} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{x}_m \,. \tag{1.3}$$

Diese Flächenstücke lassen sich jeweils als Linearkombination räumlicher Kontrollpunkte $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0; \ldots; \mathbf{B}_m^Q]$ mit skalaren Basisfunktionen $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_0, \ldots, \varphi_Q]$ darstellen,

$$\mathbf{x}_m = \sum_{q=0}^{Q} \varphi_q \mathbf{B}_m^q = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{B}_m \,. \tag{1.4}$$

Die Basisfunktionen $\boldsymbol{\varphi}$ lassen sich dabei mittels Standardmethoden für reguläre Subdivisionsalgorithmen analysieren, sofern sie nicht sogar explizit bekannt sind. Im Falle linearer stationärer Algorithmen, und genau von diesem Typ sind fast alle oben beschriebenen Verfahren, gibt es eine *Subdivisionsmatrix* A, die die Vektoren der Kontrollpunkte aufeinander abbildet,

$$\mathbf{B}_m = A\mathbf{B}_{m-1}\,, \quad \mathbf{B}_m = A^m\mathbf{B}_0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{1.5}$$

Von entscheidender Bedeutung ist nun die Einführung des Begriffs der *charakteristischen Abbildung*. Sind die Eigenwerte $\lambda_0, \ldots, \lambda_Q$ der Matrix A betragsmäßig in absteigender Form angeordnet, $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_Q$ die zugehörigen Eigen– und Hauptvektoren und gilt $1 = \lambda_0 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$, dann ist die charakteristische Abbildung definiert als der ebene Flächenring

$$\Psi := \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]\,. \tag{1.6}$$

Nun kann in [Rei93, Rei95d] gezeigt werden, dass ein Subdivisionsalgorithmus reguläre, stetig differenzierbare Grenzflächen erzeugt, wenn die charakteristische Abbildung regulär parametrisiert und injektiv ist. Ausgehend von diesem allgemeinen Resultat gelingt J. Peters und U. Reif in [PR98a] schließlich der Beweis, dass die Algorithmen von Doo-Sabin und Catmull-Clark tatsächlich glatte Grenzflächen erzeugen. Eine Analysis des Butterfly-Algorithmus und einer verbesserten Variante findet sich in [Zor97].

Am Beginn der Untersuchungen von Verfahren höherer Glattheit steht ein negatives Resultat. In [Rei96a] wird gezeigt, dass unter gewissen elementaren Symmetrieannahmen Subdivisionsalgorithmen, die außerhalb der irregulären Punkte stückweise polynomiale C^k-Grenzflächen von Bigrad d erzeugen, nur dann nichttrival krümmungsstetig sein können, wenn die Abschätzung $d \geq 2(k+1)$ gilt. Diese Abschätzung hat insofern einen universellen Charakter, als hier weder lineare noch stationäre Algorithmen vorausgesetzt werden müssen. Eine Verallgemeinerung dieses Resultats wird in [PR97] angegeben. Für den Catmull-Clark-Algorithmus und alle seine Varianten ist beispielsweise $d = 3$ und $k = 2$ und somit nichttriviale Krümmungstetigkeit ausgeschlossen. Hinreichende Bedingungen für lineare stationäre Verfahren höherer Glattheit werden erstmals in [Pra95] und später auch in [PR97, Pra97b, Zor98] angegeben. Im Wesentlichen handelt es sich hierbei um gekoppelte nichtlineare Bedingungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen vom Typ

$$\lambda_q = \lambda_1^r\,, \quad \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_q \in \operatorname{span}\bigl\{(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_1)^\alpha(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_2)^\beta : \alpha+\beta = r\bigr\}, \tag{1.7}$$

die für gewisse $q, r \in \mathbb{N}$ gelten müssen. Alle diese Ergebnisse zeigen nun, dass die Konstruktion solcher Verfahren sehr starken Restriktionen unterworfen ist, deren Erfüllung durch geeignete Justierung freier Parameter in Standardalgorithmen kaum zu erreichen ist. Gerade diese Erkenntnis erwies sich aber insofern als fruchtbar, als der Versuch, die obigen Bedingungen als konstruktives Element zu begreifen, auf ein neues Modell zur Darstellung von Freiformflächen beliebiger Topologie führte — die **t**opologisch **u**nbeschränkten **r**ationalen **B**-**S**plines (TURBS).

3. Topologisch unbeschränkte rationale B-Splines

TURBS werden in [Rei96b, Rei98] erstmals beschrieben; etwa zeitgleich und unabhängig entwickelt H. Prautzsch ein verwandtes Konzept [Pra97a], das am Ende von Kapitel 6 skizziert wird. Bevor wir uns aber den TURBS zuwenden, zunächst ein kurzer Blick auf die bis dato bekannten Ansätze zur Darstellung von Freiformflächen beliebiger Topologie:

Neben impliziten Flächendarstellungen, wie sie beispielsweise in [Baj88, BCX95, Pet96] beschrieben werden, sind im Wesentlichen die drei Konzepte

- Subdivision
- geometrische Glattheit
- singuläre Parametrisierung

für parametrisierte Freiformflächen beliebiger Topologie zu unterscheiden. Subdivisionsalgorithmen sind historisch betrachtet der erste erfolgreiche Ansatz zur Lösung des Problems. Den Nachteil, dass Subdivisionsflächen in der Regel entweder aus unendlich vielen polynomialen Flächenstücke zusammengesetzt sind oder überhaupt keine Darstellung in geschlossener Form besitzen, vermeidet das Prinzip der geometrischen Glattheit. Hier werden endlich viele, meist polynomiale oder rationale Patches so zusammengefügt, dass eine im Sinne der Differenzialgeometrie glatte Fläche entsteht. Der entscheidende, von B.A. Barsky und T.D. DeRose in [BD84, DeR85] entwickelte Gedanke ist dabei, die üblicherweise verwendeten parametrischen Glattheitsbedingungen durch das Zulassen von Umparametrisierungen abzuschwächen. Aus der Fülle der Literatur zu diesem Thema seien hier mit [Hah89, LH89, HM90, Deg90, Rei95a, Pet95] nur einige wenige Arbeiten angeführt: Aus jüngerer Zeit stammt die Idee, auch für Freiformflächen beliebiger Topologie ausschließlich parametrische Glattheitsbedingungen zu verwenden. Die damit verbundenen Kompatibilitätsprobleme in irregulären Ecken werden dabei dadurch gelöst, dass dort singuläre Parametrisierungen zugelassen werden. Durch Hinzunahme weiterer Bedingungen kann garantiert werden, dass diese Singularitäten im geometrischen Sinne hebbar sind, dass also reguläre, glatte Umparametrisierungen existieren [Pet91, Rei93, NP94, Rei95b, Rei97, BR97].

Alle drei hier beschriebenen Verfahren haben gemeinsam, dass sie zur Darstellung einfach glatter, also normalenstetiger Flächen gut geeignet sind, die Konstruktion krümmungsstetiger Flächen bereits mit erheblichen technischen Schwierigkeiten verbunden ist, während für Glattheit höherer Ordnung kaum praktisch verwertbare Resultate vorliegen. Mit den TURBS gelingt nun eine Synthese der drei Konzepte: TURBS sind in irregulären Ecken hochgradig singulär parametrisiert, die Glattheit dort wird durch die Verwendung einer explizit vorgegebenen Reparametrisierung garantiert und sie sind verfeinerbar, gestatten also die Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen. Unter anderem besitzen TURBS die folgenden Eigenschaften:

- TURBS erlauben die Modellierung von Freiformflächen beliebiger topologischer Struktur und beliebiger Differenzierbarkeitsordnung k nach einem einfachen und einheitlichen Konstruktionsprinzip.

- TURBS sind stückweise polynomial bzw. rational vom Bigrad $d = r(k+1)$, wobei $r \geq 2$ ein Parameter ist, der die Flexibilität der erzeugten Flächen in den irregulären Punkten steuert. Damit ist der Grad gemäß den Abschätzungen in [Rei96a, PR97] minimal.
- TURBS sind eine natürliche Verallgemeinerung einer gewissen Klasse rationaler nichtuniformer Tensorproduktsplines mit äquidistanten multiplen Knoten und lassen sich damit in den heute weithin akzeptierten Standard zur Flächenmodellierung integrieren.
- TURBS lassen sich durch ein räumliches Kontrollnetz definieren, das die zugehörige Fläche approximiert. Damit ist eine wichtige Voraussetzung für den Einsatz in interaktiven Modelliersystemen gegeben.
- TURBS sind verfeinerbar, das heißt, sie lassen sich durch eine Splinefläche mit dyadisch verfeinerter Patchstruktur exakt reproduzieren. Dies impliziert einen linearen stationären Subdivisionsalgorithmus für die zugehörigen Kontrollnetze. Bei iterierter Anwendung konvergiert die Folge der Kontrollnetze quadratisch gegen die ursprünglich definierte Splinefläche. Somit entsteht eine Klasse von Subdivisionsalgorithmen beliebiger Glattheit.

4. Ergebnisse und Struktur der Arbeit

Im folgenden Kapitel werden die notwendigen formalen Grundlagen zur Untersuchung von Splineflächen beliebiger topologischer Struktur im Allgemeinen und von Subdivisionsflächen im Besonderen bereitgestellt. Diesem Zweck wird unter anderem deshalb ein relativ breiter Raum eingeräumt, weil sich in der vorhandenen Literatur erst sehr wenige Standards etabliert haben, auf die sich zurückgreifen ließe; dies betrifft sowohl die Nomenklatur als auch die mathematische Modellbildung. Dieser Umstand ist tatsächlich als ein gewisses Manko in der aktuellen Forschung auf diesem Gebiet anzusehen und es soll deshalb hier der Versuch unternommen werden, bekannte Ansätze zu integrieren und zu präzisieren und durch neue Aspekte, insbesondere die Strukturierung des Splinedefinitionsgebiets als topologischen Raum, zu ergänzen. Ein wichtiger Aspekt ist weiterhin, Subdivisionsflächen in natürlicher Weise als ein Teilmenge der Klasse der parametrisch glatten Splineflächen zu betrachten. Diese Sichtweise trägt den engen Verknüpfungen zwischen diesen beiden, bislang meist separat behandelten Ansätzen Rechnung.

Im dritten Kapitel werden lineare stationäre Subdivisionsalgorithmen in großer Allgemeinheit untersucht. Zunächst wird als wesentliche Verallgemeinerung der bislang verwendeten Ansätze die Forderung nach linearer Unabhängigkeit der Basisfunktionen $\boldsymbol{\varphi}$ fallengelassen. Das daraus resultierende Problem der Nichteindeutigkeit der Subdivisionsmatrix wird durch die Auswahl einer Klasse von Repräsentanten mit kanonischen Spektraleigenschaften gelöst.

Danach werden unter einer schwachen Regularitätsannahme notwendige Bedingungen für die Jordanform der Subdivisionsmatrix hergeleitet, um normalenstetige Grenzflächen zu erzeugen. Es stellt sich dabei heraus, dass es genau fünf

Klassen derartiger Matrizen gibt. Notwendige Spektralbedingungen waren bislang unbekannt; etwa zeitgleich mit dem Entstehen dieser Arbeit wurden aber von D. Zorin unabhängige Untersuchungen dazu durchgeführt, deren Resultate sich mit den hier angegebenen im Wesentlichen decken [Zor98].

Zur Ableitung weiterer Bedingungen wird das in [Rei93, Rei95d] für symmetrische Verfahren eingeführte Konzept der charakteristischen Abbildung auf beliebige Subdivisionsmatrizen verallgemeinert, die den notwendigen Bedingungen entsprechen. Nun kann gezeigt werden, dass die Nullstellenfreiheit der Jacobi-Determinante der charakteristischen Abbildung hinreichend für Normalenstetigkeit ist, während Vorzeichenwechsel Normalenstetigkeit ausschließen. Ist die hinreichende Bedingung erfüllt, dann impliziert die Injektivität der charakteristischen Abbildung die Regularität der Grenzflächen im Sinne der Differenzialgeometrie; umgekehrt ist die Injektivität der Einschränkung der charakteristischen Abbildung auf das Innere ihres Definitionsgebiets hierfür auch notwendig.

Von besonderem Interesse für die Anwendungen sind symmetrische lineare stationäre Verfahren. Für diese lassen sich eine Reihe wesentlich schärferer Aussagen ableiten. Aufgrund ihrer zyklischen Struktur ist hier die diskrete Fouriertransformation ein Hilfsmittel von zentraler Bedeutung. Es stellt sich nun heraus, dass die bislang immer wieder vermutete Notwendigkeit eines doppelten subdominanten Eigenwerts nicht gegeben ist. Vielmehr genügt ein Paar von Jordanblöcken dominierender Größe zur Konstruktion regulärer Grenzflächen. Als notwendige Bedingung ergibt sich weiterhin, dass dieses Paar zu den Fourierkomponenten mit Index 1 und $n-1$ der Subdivisionsmatrix gehören muss. Schließlich werden aus den hinreichenden Bedingungen bezüglich der Regularität und Injektivität der charakteristischen Abbildung stärkere, aber wesentlich einfacher zu verifizierende hinreichende Bedingungen abgeleitet.

In Kapitel 4 werden die klassischen Subdivisionsalgorithmen von Doo-Sabin und Catmull-Clark in verallgemeinerter Form sowie das Kantenmittenverfahren einer expliziten Analyse unterzogen. Dabei finden die in Kapitel 3 hergeleiteten hinreichenden Bedingungen für symmetrische Algorithmen Anwendung.

Für den Doo-Sabin-Algorithmus in seiner ursprünglichen Form und ebenso für ein große Klasse von Verallgemeinerungen kann die Konvergenz gegen reguläre Grenzflächen bewiesen werden. Dabei ergibt sich jedoch auch ein unvermutetes Resultat: Neben der unteren Schranke $\lambda_{\text{inf}} = 1/4$ für den subdominanten Eigenwert der Subdivisionsmatrix, die sich in natürlicher Weise ergibt, existiert auch eine bislang unbekannte obere Schranke $\lambda_{\text{sup}}(n)$, die von der Ordnung der Irregularität abhängt. Jenseits dieser Schranke weist die Jacobi-Determinante der charakteristischen Abbildung Vorzeichenwechsel auf; folglich erzeugt der Doo-Sabin-Algorithmus dann keine glatten Grenzflächen. Allerdings liegen die Werte von $\lambda_{\text{sup}}(n)$ im Intervall $(0.877, 1)$ und damit zu nahe bei 1, um für praktisch relevante Verfahren kritisch zu sein.

Der Catmull-Clark-Algorithmus in seiner in [BS86] vorgeschlagenen verallgemeinerten Form birgt dagegen keine derartigen Überraschungen. Sofern die drei verwendeten speziellen Gewichte einer gewissen Abschätzung genügen, die die Existenz eines subdominanten Eigenwerts impliziert, ist die charakteristische Abbildung wohldefiniert und bemerkenswerterweise nur noch von der Ordnung n, aber nicht mehr von den speziellen Gewichten selbst abhängig. In Erweiterung des Resultats in [PR98a] wird hier die Untersuchung nicht nur für endlich viele, sondern für beliebige n durchgeführt. Als Ergebnis bleibt die C^1-Regularität des Catmull-Clark-Algorithmus für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ festzuhalten.

Als Beispiel für einen besonders einfachen Subdivisionsalgorithmus wird schließlich das Kantenmittenverfahren untersucht. Zunächst wird dieses als Faktorisierung eines Boxspline-Subdivisionsalgorithmus identifiziert und damit einer Analyse zugänglich gemacht. Die Untersuchung der Subdivisionsmatrix ergibt für $n = 3$ eine Besonderheit: Es liegt hier der subdominante Eigenwert $\lambda = 1/4$ mit algebraischer Vielfachheit 6 und geometrischer Vielfachheit 4 vor. In diesem Fall greifen nun die in Kapitel 3 hergeleiteten Bedingungen in ihrer vollen Allgemeinheit und es kann schließlich die C^1-Regularität für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gezeigt werden.

Kapitel 5 hat Bedingungen für C^k-Subdivisionsalgorithmen zum Gegenstand. Zunächst werden symmetrische lineare stationäre Verfahren betrachtet. Die dabei gefundenen notwendigen Bedingungen für die Eigenwerte und –funktionen haben, wie bereits weiter oben beschrieben, für $k \geq 2$ einen extrem restriktiven Charakter. Die Schwierigkeiten, die bei der Konstruktion von Algorithmen höherer Regularität zu erwarten sind, werden durch die ebenfalls bereits erwähnte Gradabschätzung $d \geq r(k+1)$, die unter schwachen Regularitätsannahmen für eine große Klasse von Verfahren, die stückweise polynomiale Grenzflächen vom Grad d erzeugen, unterstrichen.

In Kapitel 6 wird das TURBS-Konzept entwickelt; damit werden gleichzeitig die lange offenen Probleme der Konstruktion von C^k-Freiformflächen und C^k-Subdivisionsflächen gelöst. Der verwendete Polynomgrad $d = r(k+1)$ ist angesichts der Gradabschätzung aus Kapitel 5 optimal, womit auch gezeigt ist, dass diese scharf ist. Die Möglichkeit, mit TURBS tatsächlich Freiformflächen zu modellieren, die den Anforderungen der Praxis gerecht werden, wird anhand einiger Beispiele exemplarisch dargestellt. Schließlich wird noch ein von H. Prautzsch vorgeschlagenes, nahe verwandtes Verfahren kurz vorgestellt.

5. Konventionen und Bezeichnungen

Im Folgenden seien wie üblich $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Mengen der natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen sowie $\mathbb{Z}_n$ die Menge der ganzen Zahlen modulo n. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\| \cdot \|$ werden *Skalarprodukt* und *Norm* im d-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Alle Elemente des $\mathbb{R}^d$ sind stets als *Zeilenvektoren* zu verstehen. Für vektorielle Größen werden in der Regel *fettgedruckte* Symbole verwendet. Elemente eines Zeilenvektors werden durch *Komma* getrennt, Elemente eines Spaltenvektors durch *Semikolon*; analoges gilt für Matrizen. Werden beispielsweise zwei Punkte $\mathbf{B}_1 = [1, 3, 2]$ und $\mathbf{B}_2 = [4, 1, 0]$ in $\mathbb{R}^3$ zu einer (2×3)-Matrix $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2]$ zusammengefasst, dann schreiben wir

$$\mathbf{B} = [1, 3, 2; 4, 1, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Bei derartigen Konstruktionen bezeichnen wir häufig $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1; \ldots; \mathbf{B}_N]$ auch als *Spaltenvektor* von Punkten in $\mathbb{R}^d$.

6. Wertung und Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit, die die derzeit bekannten Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der Subdivisionsalgorithmen für Kontrollnetze beliebiger Topologie zusammenfasst und vervollständigt, können eine Reihe wichtiger Probleme als gelöst betrachtet werden:

- Lineare stationäre C^1-Verfahren sind mit Ausnahme degenerierter Fälle durch verifizierbare notwendige und hinreichende Bedingungen charakterisiert.
- Die klassischen Algorithmen von Doo-Sabin und Catmull-Clark sind zusammen mit einer Klasse von Verallgemeinerungen vollständig analysiert und verifiziert.
- Bedingungen für Subdivisionsalgorithmen höherer Regularität werden angegeben. Mögliche Konstruktionsprinzipien werden dadurch erheblichen Einschränkungen unterworfen.
- Das TURBS-Konzept liefert einen einfachen konstruktiven Zugang zu Subdivisionsalgorithmen beliebiger Regularität. Es ist gleichzeitig ein Modell zur Darstellung von Freiformflächen beliebiger Topologie und Glattheit und stellt somit ein Bindeglied zwischen den klassischen Spline– und Subdivisionsmethoden dar.

Aber auch in der Zukunft sind eine Reihe interessanter Fragen zu untersuchen: Die noch ausstehenden Analysen einiger spezieller Verfahren, wie beispielsweise des Algorithmus von Loop, dürften mit den hier bereitgestellten Mitteln relativ einfach zu bewerkstelligen sein. Die Konstruktion interpolierender oder formerhaltender Subdivisionsalgorithmen höherer Regularität stellt dagegen eine echte Herausforderung dar; die Erfolgsaussichten, praktikable Verfahren zu finden, sind eher pessimistisch zu beurteilen. Die Algorithmen von Kobbelt scheinen hier am ehesten geeignet, doch existieren noch keinerlei Ansatzpunkte zu deren Analyse. Das wichtigste und wohl auch erfolgversprechendste Projekt für die Zukunft ist aber die Entwicklung von Multiskalenmethoden für Freiformflächen beliebiger Topologie auf Basis des TURBS-Konzepts. Als mögliche Anwendungen seien hier nur Multigridverfahren zur Lösung elliptischer Differenzialgleichungen auf geschlossenen Flächen, hierarchische Ansätze für diskrete und kontinuierliche Flächenapproximationsprobleme oder Waveletverfahren zur Flächenglättung genannt.

KAPITEL 2

Grundlagen

Gegenstand dieses Kapitels ist die Bereitstellung der notwendigen formalen Grundlagen zur Untersuchung von Splineflächen beliebiger topologischer Struktur im Allgemeinen und von Subdivisionsflächen im Besonderen. Aufgrund des starken Praxisbezugs der Problemstellung finden sich in der Literatur gelegentlich eher intuitive, dem jeweiligen Zwecke angepasste Beschreibungen der verwendeten Begriffe. Um aber dem hier angestrebten Ziel einer allgemeinen Theorie parametrisch glatter Splineflächen gerecht zu werden, ist eine mathematisch präzise Definition der verwendeten Strukturen unerlässlich. Das hier gewählte Abstraktionsniveau erweist sich zum einen als ausreichend für den Aufbau einer sauberen mathematischen Theorie; zum anderen ermöglicht es eine vereinheitlichte Sichtweise auf verschiedene Zugänge zu dieser Thematik. Insbesondere lassen sich Subdivisionsflächen nahtlos in die Klasse der parametrisch glatten Splineflächen integrieren.

Der Begriff „Spline“ ist hier in einem verallgemeinerten Sinne zu verstehen. Insbesondere sind die betrachteten Flächen nicht notwendig stückweise polynomial. Das verbindende Charakteristikum mit Splines im üblichen Sinne ist vielmehr die Segmentierung des Definitionsgebiets. Dieses besteht hier stets aus einer Vereinigung von Einheitsquadraten. Die Untersuchung von Splineflächen über Dreiecken kann weitgehend analog erfolgen, ist aber nicht Gegenstand dieser Abhandlung.

Der erste Abschnitt befasst sich mit der Definition parametrisch glatter Splineflächen beliebiger Topologie. Im zweiten Abschnitt werden speziell Splineflächen, die durch Subdivisionsalgorithmen entstehen, mit einer geeigneten Struktur versehen. Im dritten Abschnitt werden schließlich Formalismen zur Beschreibung von Subdivisionsalgorithmen entwickelt. Die Motivation der einzelnen Definitionen und Begriffsbildungen bleibt hier meist skizzenhaft; ausführlichere Darstellungen finden sich in [Rei95d, Rei97, Rei98].

1. C^k-Splineflächen beliebiger Topologie

Die hier gewählten Definitionen basieren auf Ideen, die in [HM90, Rei98] vorgestellt werden, und entwickeln diese weiter. Die Verbindung von Flächensegmenten entlang gemeinsamer Randkurven wird durch Einführung einer Äquivalenzrelation im Definitionsgebiet formalisiert. Dieses erhält damit die Struktur eines topologischen Raumes, was insbesondere für die Einführung eines geeigneten Stetigkeitsbegriffs unerlässlich ist. Glattheit höherer Ordnung im analytischen Sinne wird über die Glattheit spezieller Reparametrisierungen definiert und ist äquivalent zu der Übereinstimmung transversaler Ableitungen entlang gemeinsamer Patchränder. Ein schärferer Glattheitsbegriff, nämlich die Regularität der Fläche im differenzialgeometrischen Sinne, beruht auf der lokalen Darstellbarkeit der Fläche als Graph einer glatten skalaren Funktion h über der Tangentialebene. Als Maß für die lokale geometrische Vielfalt der erzeugbaren Flächen wird der Begriff der Flexibilität eingeführt. Diese gibt an, bis zu welchem Grad der Taylor-Jet der Funktion h beliebig vorgegeben werden kann. Schließlich wird die Verfeinerbarkeit von C^k-Splines diskutiert, also die Reproduktion einer gegebenen Fläche über einem dyadisch verfeinerten Parametergebiet.

1.1. C^0-Splineflächen. Stetige Splineflächen können allein durch topologische Begriffe definiert werden. Sei $I \subset \mathbb{N}$ eine endliche Indexmenge, $\gamma := [0,1]$ das Einheitsintervall und $\omega := \gamma \times \gamma$ das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$. ω hat Eckpunkte c_ℓ und Seiten $e_\ell, \ell \in \mathbb{Z}_4$, die gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind,

$$\begin{aligned} c_1 &:= (0,0)\,, & e_1(t) &:= (t,0) \\ c_2 &:= (1,0)\,, & e_2(t) &:= (1,t) \\ c_3 &:= (1,1)\,, & e_3(t) &:= (1-t,1) \\ c_4 &:= (0,1)\,, & e_4(t) &:= (0,1-t)\,, \qquad t \in \gamma\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Paare $(\omega, i), i \in I$, heißen *Zellen* und die Vereinigung all dieser Zellen bildet das *Splinedefinitionsgebiet* $\Omega := \omega \times I$.

Um die einzelnen Zellen in Beziehung zueinander zu setzen, ist auf der Menge aller Seiten $E := \{e_1, \ldots, e_4\} \times I$ eine Äquivalenzrelation $\mathcal{E}$ gegeben. Wir nennen $\mathcal{E}$ die *Nachbarschaftsrelation* von Ω und schreiben

$$(e_\ell, i) \precneqq (e_{\ell'}, i') \tag{2.2}$$

für zwei äquivalente, aber verschiedene Seiten (e_ℓ, i) und $(e_{\ell'}, i')$. Die Äquivalenzklassen von $\mathcal{E}$ heißen *Kanten* und die Mächtigkeit dieser Äquivalenzklassen sei stets 1 oder 2.

Die Nachbarschaftsrelation $\mathcal{E}$ induziert eine Relation $\mathcal{C}$ auf der Menge $C := \{c_1, \ldots, c_4\} \times I$ der Eckpunkte,

$$(e_\ell, i) \precneqq (e_{\ell'}, i') \;\Rightarrow\; (c_\ell, i) \precneqq (c_{\ell'+1}, i')\,, \tag{2.3}$$

wobei der Index $\ell \in \mathbb{Z}_4$ modulo 4 zu verstehen ist. Die Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}$ heißen *Knoten*.

Ist ω mit der natürlichen Topologie versehen, so erhält Ω durch Verkleben der einzelnen Zellen gemäß der Identifizierung

$$(e_\ell, i) \precneqq (e_{\ell'}, i') \;\Rightarrow\; (e_\ell(t), i) = (e_{\ell'}(1-t), i')\,, \quad t \in \gamma\,, \tag{2.4}$$

die Struktur eines *topologischen Raumes*, siehe Abbildung 2.1. Dieser wichtige Aspekt der folgenden Definitionen geht auf D. Zorin zurück [Zor97]. Diejenigen Kanten, die nur aus einer Seite bestehen, bilden den *Rand* $\partial\Omega$ des Definitionsgebiets. Das Komplement $\mathring{\Omega} := \Omega \backslash \partial\Omega$ ist das *Innere* von Ω. Knoten im Inneren von Ω heißen *innere Knoten*. Die *Ordnung* eines Knotens ist die Mächtigkeit

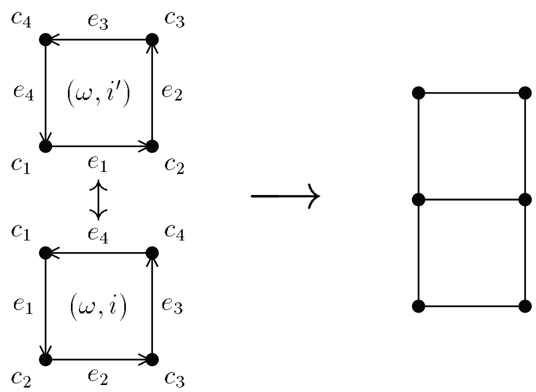


Abbildung 2.1. Verkleben benachbarter Zellen mit gemeinsamer Kante $(e_4, i) \precneqq (e_1, i')$ und Knoten $(c_4, i) \precneqq (c_2, i')$, $(c_1, i) \precneqq (c_1, i')$.

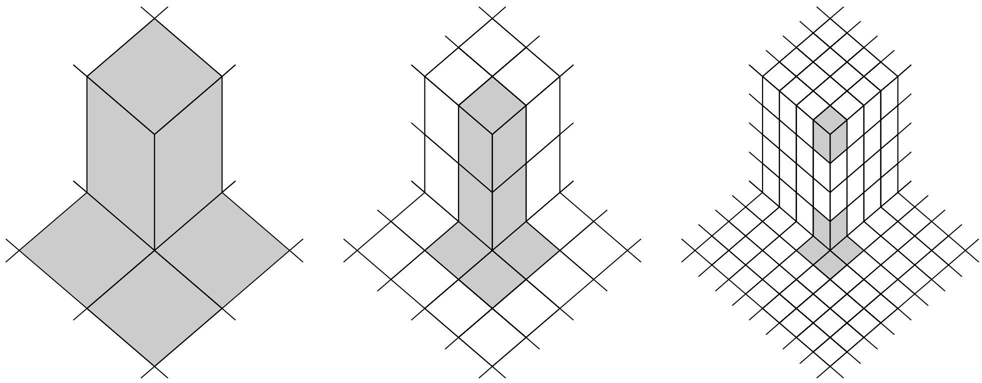


Abbildung 2.2. Zweimalige Verfeinerung eines Splinedefinitionsgebiets mit zwei irregulären Knoten der Ordnung drei und fünf. Das Splinedefinitionsgebiet rechts ist einfach. Abgebildet sind jeweils lokale Darstellungen, wobei irreguläre Zellen schattiert sind.

der Äquivalenzklasse. Innere Knoten der Ordnung $n \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 4\}$ heißen *irregulär*; alle anderen Knoten *regulär*. Innere Knoten der Ordnung 1 und 2 sind unzulässig. Entsprechend heißen Zellen, die ausschließlich reguläre Knoten enthalten, *regulär* und anderenfalls *irregulär*. Zellen mit einem gemeinsamen Knoten heißen *verbunden*, Zellen mit einer gemeinsamen Kante heißen *benachbart*. Das Splinedefinitionsgebiet Ω heißt *einfach*, wenn alle irregulären Knoten separiert sind in dem Sinne, dass je zwei verbundene Zellen höchstens einen irregulären Knoten enthalten.

Wenn im Folgenden gelegentlich nur einfache Splinedefinitionsgebiete betrachtet werden, so ist diese Einschränkung insofern akzeptabel, als jedes Splinedefinitionsgebiet durch zwei Unterteilungsschritte, wie sie in Unterabschnitt 1.6 beschrieben werden, in ein einfaches Splinedefinitionsgebiet umgewandelt werden kann, siehe Abbildung 2.2.

Die hier beschriebene Struktur des Splinedefinitionsgebiets wird dem Anspruch, Flächen beliebiger Topologie zu gestatten, nicht ganz gerecht, da aufgrund von (2.4) das Definitionsgebiet und damit auch alle darüber gegebenen Splineflächen orientierbar sind. Diese Einschränkung lässt sich natürlich aufheben, doch würde dies die nachfolgenden Darstellungen teilweise technisch deutlich komplizieren, ohne tiefere Einsichten zu gewähren.

1.1.1. *Splines.* Wir definieren nun Splines als stetige Abbildung über einem Splinedefinitionsgebiet.

Definition 2.1. *Sei Ω ein Splinedefinitionsgebiet, dann heißt eine stetige Abbildung*

$$\mathbf{x} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d \tag{2.5}$$

Spline *über Ω in $\mathbb{R}^d$. Für $d = 3$ ist das Bild $\mathbf{x}(\Omega)$ eine* Splinefläche. *Die Einschränkung $\mathbf{x}^i$ von $\mathbf{x}$ auf eine Zelle (ω, i) heißt* Patch*; das Bild eines (inneren, regulären, irregulären) Knotens heißt (innere, reguläre, irreguläre)* Ecke. *Die Menge aller Splines über Ω mit Werten in $\mathbb{R}^d$ wird mit $C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ bezeichnet.*

Die Koordinatenfunktionen höherdimensionaler Splines sind skalare Splines, das heißt, Splines mit Werten in $\mathbb{R}$. Insofern hat der Fall $d = 1$ aus analytischer Sicht eine zentrale Bedeutung. Insbesondere dient er auch zur Konstruktion von Basisfunktionen. Dagegen sind Splines in $\mathbb{R}^3$ als Parametrisierungen von Splineflächen natürlich aus geometrischer Sicht von besonderem Interesse. Der Fall $d = 4$ kann beispielsweise zur Darstellung rationaler Flächen in homogener Form verwendet werden. Zum Zwecke der Reparametrisierung, aber auch zur Veranschaulichung der lokalen Struktur eines Definitionsgebiets, werden Splines mit Werten in $\mathbb{R}^2$ betrachtet.

Sei genauer gesagt die Einschränkung Φ eines Splines $\mathbf{x} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ auf eine nichtleere Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ des Definitionsgebiets injektiv, dann heißt Φ *lokale Darstellung* von Ω'. Wenn Ω' aus einer Vereinigung von Zellen besteht und wenn alle Patches der lokalen Darstellung Φ eigentliche Bewegungen des Einheitsquadrats ω in der Ebene sind, dann heißt Φ *kanonische Darstellung.* Kanonische Darstellungen werden wir benützen, um einen geeigneten Glattheitsbegriff im Raum der Splines zu definieren. Lokale Darstellungen einer offenen Überdeckung von Ω können benutzt werden, um Ω die Struktur einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit zu geben. Wir wollen aber diesen interessanten Aspekt, der Zugang zu einer sauberen Definition des Begriffs der geometrischen Glattheit von Splineflächen gewährt, hier nicht weiterverfolgen.

1.1.2. *Bezeichnungen und Konventionen.* Im Folgenden bezeichnet Ω stets ein Splinedefinitionsgebiet gemäß Unterabschnitt 1.1, ohne dass dies jeweils gesondert erwähnt würde. Für die Ordnung eines Knotens ist der Buchstabe n reserviert; der Index j läuft stets in der Menge $\mathbb{Z}_n$ der ganzen Zahlen modulo n. Parameter, das heißt Elemente von ω oder Ω bezeichnen wir gemäß

$$\mathbf{u} = (u, v) \in \omega\,, \quad \underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, i) = (u, v, i) \in \Omega\,. \tag{2.6}$$

1.2. Konsistenz und Glattheit. Aufgrund der Identifizierung von Seitenpaaren durch die Nachbarschaftsrelation erfüllen je zwei benachbarte Patches $\mathbf{x}^i$ und $\mathbf{x}^{i'}$ eines Splines $\mathbf{x}$ die folgende *Konsistenzbedingung*:

$$(e_\ell, i) \mathrel{\substack{\sim\\\neq}} (e_{\ell'}, i') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^i(e_\ell(t)) = \mathbf{x}^{i'}(e_{\ell'}(1-t)), \quad t \in \gamma . \tag{2.7}$$

Glattheit höherer Ordnung definieren wir vorläufig wie folgt:

Definition 2.2. *Ein Spline $\mathbf{x} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ heißt C^k-*Spline*, wenn für jedes Paar $\Omega' := (\omega, i) \cup (\omega, i')$ verschiedener, benachbarter Zellen und eine kanonische Darstellung Φ von Ω' gilt, dass $\mathbf{x}_\Phi := \mathbf{x} \circ \Phi^{-1} : \Phi(\Omega') \to \mathbb{R}^d$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion ist. Der Raum aller C^k-Splines über Ω mit Werten in $\mathbb{R}^d$ wird mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ bezeichnet.*

Eine Erweiterung dieser Definition wird in Unterabschnitt 1.5 vorgenommen. Man sieht leicht, dass $\mathbf{x}_\Phi$ entweder für alle oder für keine kanonische Darstellung zweier benachbarter Zellen k-mal stetig differenzierbar ist. Es kann also Φ beliebig gewählt werden. Für C^k-Splines gilt die folgende Charakterisierung, die zeigt, dass der hier eingeführte Glattheitsbegriff zu den sogenannten parametrischen Glattheitsbedingungen, wie sie in der Literatur anzutreffen sind, äquivalent ist:

Lemma 2.3. *Bezeichne $D_\ell^\nu \mathbf{x}^i$ die ν-te Ableitung eines Patches $\mathbf{x}^i$ in Richtung der Seite e_ℓ. Ein Spline $\mathbf{x} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist genau dann ein C^k-Spline, wenn die einzelnen Patches C^k-Funktionen über dem Einheitsquadrat sind und wenn für alle äquivalenten Seiten $(e_\ell, i) \mathrel{\substack{\sim\\\neq}} (e_{\ell'}, i')$, die zu verschiedenen Zellen gehören, gilt*

$$D_{\ell+1}^\nu \mathbf{x}^i\big(e_\ell(t)\big) = D_{\ell'-1}^\nu \mathbf{x}^{i'}\big(e_{\ell'}(1-t)\big), \quad \nu = 0, \ldots, k, \; t \in \gamma . \tag{2.8}$$

Beweis. Sei $\Omega' := (\omega, i) \cup (\omega, i')$ ein Paar verschiedener, benachbarter Zellen und $(e_\ell, i) \mathrel{\substack{\sim\\\neq}} (e_{\ell'}, i')$ die gemeinsame Kante. Bezeichne $T_{(1,0)}$ die Translation um $(1,0)$ und $R_{\pi/2}$ die Rotationen der Ebene um den Winkel $\pi/2$ um den Ursprung, dann definieren wir eine kanonische Darstellung von Ω' durch

$$\Phi(\cdot, \iota) = \begin{cases} (T_{(1,0)} R_{\pi/2})^{-\ell} & \text{falls } \iota = i\,, \\ R_{\pi/2}(T_{(1,0)} R_{\pi/2})^{1-\ell'} & \text{falls } \iota = i'\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

siehe Abbildung 2.3. Insbesondere ist $\Phi(\Omega') = [-1,1] \times \gamma$ und $\Phi\big(e_\ell(t)\big) = \Phi\big(e_{\ell'}(1-t)\big) = (0, 1-t), t \in \gamma$, siehe Abbildung 2.3. Die Äquivalenz der k-maligen stetigen Differenzierbarkeit der Abbildung $\mathbf{x} \circ \Phi^{-1}$ auf $\{0\} \times [0,1]$ mit Bedingung (2.8) verifiziert man elementar mit Hilfe der Kettenregel. □

Parametrische Glattheit gemäß (2.8) ist nicht notwendig für die Glattheit einer Splinefläche im differenzialgeometrischen Sinne, doch erweist sich dieser Ansatz trotz seiner Einfachheit als ausreichend für leistungsfähige Modelle zur Erzeugung von Freiformflächen beliebiger Topologie. Insbesondere sind auch Tensorproduktsplines parametrisch glatt, wenn die zugehörigen univariaten Basisfunktionen glatt sind.

Aus Definition 2.2 ergibt sich, dass sich die elementaren algebraischen Eigenschaften des Raums der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen in $\mathbb{R}^d$ unmittelbar auf den Splineraum $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ übertragen. Zum einen ist $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *linear*

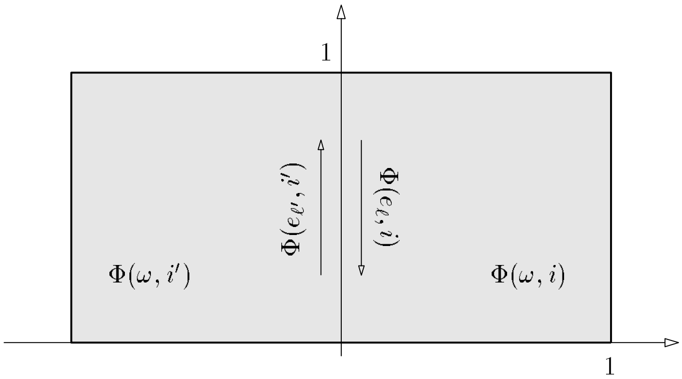


ABBILDUNG 2.3. Kanonische Darstellung Φ von $(\omega, i) \cup (\omega, i')$ gemäß (2.9).

und affin invariant, das heißt abgeschlossen unter affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^d$. Zum anderen ist $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit komponentenweise definierter Multiplikation ein *kommutativer Ring mit Einselement*; dieses ist der Spline, der in allen Komponenten konstant 1 ist.

1.3. Regularität und Flexibilität. Da die Konstruktion stetiger Splines beliebiger Topologie keinerlei Probleme mit sich bringt, wollen wir uns im Folgenden auf die Untersuchung mindestens einmal stetig differenzierbarer Splines $\mathbf{x} \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^3), k \geq 1$, konzentrieren.

1.3.1. *Regularität.* Die C^1-Glattheit einer Splinefläche garantiert in der Regel nicht die Glattheit im differenzialgeometrischen Sinn, da singulär parametrisierte Punkte auftreten können, also Punkte, in denen das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen verschwindet. Dieses Phänomen kann grundsätzlich in jedem affin invarianten Raum von Flächenparametrisierungen auftreten, man denke nur an identische Koordinatenfunktionen. Es ist bei der Analyse von C^k-Splines aber deshalb von zentraler Bedeutung, weil Singularitäten hier nicht den Status eines Ausnahmefalls haben, sondern, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, in irregulären Knoten notwendig vorliegen. Wir entwickeln nun einen geometrisch sinnvollen Glattheitsbegriff für Splineflächen in $\mathbb{R}^3$, die isolierte Singularitäten enthalten können. Ein Verallgemeinerung des Ansatzes auf stärker degenerierte Fälle, beispielsweise Flächen mit singulären Kurven, ist möglich, wird in diesem Kontext aber nicht benötigt.

DEFINITION 2.4. *Sei* $\mathbf{x} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, *dann definieren wir die Abbildung*

$$\bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, i) := \mathbf{x}_u^i(\mathbf{u}) \times \mathbf{x}_v^i(\mathbf{u}), \quad (\mathbf{u}, i) \in \Omega \tag{2.10}$$

und damit die Menge der regulären Parameter als

$$\Omega_r := \{\underline{\mathbf{u}} \in \Omega : \|\bar{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{u}})\| \neq 0\}. \tag{2.11}$$

$\mathbf{x}$ *heißt* semiregulär*, wenn weder die Menge der singulären Parameter* $\Omega\backslash\Omega_r$ *noch deren Bild* $\mathbf{x}(\Omega\backslash\Omega_r)$ *Häufungspunkte hat. Ein semiregulärer Spline* $\mathbf{x}$ *heißt* normalenstetig in $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \Omega$*, wenn der* Normalenvektor

$$\mathbf{n}(\underline{\mathbf{u}}_0) := \lim_{\substack{\underline{\mathbf{u}}\to\underline{\mathbf{u}}_0 \\ \underline{\mathbf{u}}\in\Omega_r}} \bar{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{u}})/\|\bar{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{u}})\| \tag{2.12}$$

existiert. Ein semiregulärer Spline heißt normalenstetig auf $\Omega' \subset \Omega$*, wenn er in jedem Punkt* $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \Omega'$ *normalenstetig ist, wenn also die Normalenabbildung* $\mathbf{n} : \Omega' \ni \underline{\mathbf{u}}_0 \mapsto \mathbf{n}(\underline{\mathbf{u}}_0) \in S^2$ *existiert und stetig ist.*

Man beachte, dass die Abbildung $\bar{\mathbf{n}}$ aufgrund von (2.8) konsistent und damit wohldefiniert ist; es gilt genauer $\bar{\mathbf{n}} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ferner überzeugt man sich leicht, dass $\mathbf{x}$ normalenstetig auf Ω_r ist.

Normalenstetigkeit ist ein relativ schwacher Glattheitsbegriff, der insbesondere nicht die Regularität der Fläche im differenzialgeometrischen Sinn impliziert, da lokale Selbstdurchdringungen nicht auszuschließen sind. Ein Beispiel hierzu findet sich in [Rei95d]. Die folgende Definition trägt dieser Tatsache Rechnung:

Definition 2.5. *Sei* $\mathbf{x} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *normalenstetig in* $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \Omega$ *und* $\mathbf{p}_0 := \mathbf{x}(\underline{\mathbf{u}}_0), \mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(\underline{\mathbf{u}}_0)$*. Für eine orthonormierte Basis* $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_0)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *sei ferner die affine Abbildung*

$$\Pi[\underline{\mathbf{u}}_0] : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{p}_0 + \xi\mathbf{t}_1 + \eta\mathbf{t}_2 + \zeta\mathbf{n}_0 \mapsto (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.13}$$

definiert. Ist die dadurch gestiftete Projektion

$$\Pi[\underline{\mathbf{u}}_0]\mathbf{x} : \Omega \ni \underline{\mathbf{u}} \mapsto \big(\xi(\underline{\mathbf{u}}), \eta(\underline{\mathbf{u}})\big) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.14}$$

des Splines $\mathbf{x}$ *in die Tangentialebene in einer hinreichend kleinen Umgebung von* $\underline{\mathbf{u}}_0$ *injektiv, dann heißt* $\mathbf{x}$ regulär in $\underline{\mathbf{u}}_0$.

Im Falle der Regularität gibt es also eine Nullumgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ und eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $h : V \ni (\xi, \eta) \mapsto \zeta$ mit $h(0,0) = 0$, so dass die Splinefläche lokal in der Form

$$V \ni (\xi, \eta) \mapsto \mathbf{p}_0 + \xi\mathbf{t}_1 + \eta\mathbf{t}_2 + h(\xi, \eta)\mathbf{n}_0 \in \mathbf{x}(\Omega) \tag{2.15}$$

darstellbar ist. Die Funktion h heißt *lokale Form* von $\mathbf{x}$ in $\underline{\mathbf{u}}_0$. Wählen wir *lokale Koordinaten*, das heißt $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_0$ als Einheitsvektoren und $\mathbf{p}_0$ als Ursprung eines Koordinatensystems in $\mathbb{R}^3$, dann ist $\mathbf{x}(\Omega)$ lokal der Graph der lokalen Form und

$$\mathbf{h} : V \ni (\xi, \eta) =: \boldsymbol{\xi} \mapsto \big[\boldsymbol{\xi}, h(\boldsymbol{\xi})\big] \in \mathbf{x}(\Omega) \tag{2.16}$$

ist eine reguläre Reparametrisierung von $\mathbf{x}(\Omega)$ in einer Umgebung des Punktes $\mathbf{p}_0$; die lokale Form trägt also alle Informationen über die lokale Gestalt und Glattheit der Splinefläche. Man beachte, dass die lokale Form nicht eindeutig ist, da die Vektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ nur bis auf Rotationen und Reflektionen in der Tangentialebene festliegen. Dieser Aspekt wird aber im Folgenden keine Rolle spielen.

Definition 2.6. *Eine Splinefläche* $\mathbf{x}$ *heißt* C^κ-regulär in $\underline{\mathbf{u}}_0$*, wenn sie dort regulär ist und die lokale Form in einer Umgebung des Ursprungs* κ*-mal stetig differenzierbar ist.*

Ist $\underline{\mathbf{u}} \in \Omega_r$ ein regulärer Parameter, aber kein Knoten des Splines $\mathbf{x} \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $k \geq 1$, dann folgt die C^k-Regularität in $\underline{\mathbf{u}}$. Zum Beweis dieser Aussage wählt man zwei benachbarte Zellen $(\omega, i), (\omega, i')$ so, dass $\underline{\mathbf{u}}$ im Inneren von $\Omega' = (\omega, i) \cup (\omega, i')$ liegt. Mit Φ gemäß (2.9) sind die partiellen Ableitungen von $\mathbf{x}_\Phi$ in $\Phi(\underline{\mathbf{u}})$ linear unabhängig und die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz über implizite Funktionen. Der Fall, dass $\underline{\mathbf{u}}$ ein Knoten ist, wird uns später beschäftigen. Umgekehrt garantiert der folgende Satz zumindest die einfache Glattheit einer Splinefläche in einem regulären Punkt.

Satz 2.7. *Sei $\mathbf{x} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ regulär in $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \Omega$, dann ist die lokale Form in $\underline{\mathbf{u}}_0$ in einer Umgebung des Ursprungs stetig differenzierbar und es gilt $\nabla h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Beweis. Wir betrachten das Problem in lokalen Koordinaten. Sei $\mathbf{e}_3$ der dritte Einheitsvektor, V eine hinreichend kleine Nullumgebung wie oben und

$$V' := \left\{\boldsymbol{\xi} \in V : \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{x}(\Omega_r) \wedge \langle \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{e}_3 \rangle \ > 0\right\}, \tag{2.17}$$

dann ist der Satz über implizite Funktionen für die Auflösung der Gleichung $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}))$ nach $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ für $\boldsymbol{\xi} \in V'$ anwendbar, da die fragliche Funktionaldeterminante mit dem Zähler der dritten Komponente des Normalenvektors gemäß (2.12) übereinstimmt. Folglich ist $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ und damit auch $h(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathbf{x}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})), \mathbf{e}_3 \rangle$ stetig differenzierbar für $\boldsymbol{\xi} \in V'$. Da für den Normalenvektor im Ursprung gilt $\mathbf{n}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_3$ und da $\mathbf{x}$ als semiregulär angenommen wurde, ist $V' \cup \mathbf{0}$ eine Umgebung des Ursprungs. Also ist

$$\mathbf{e}_3 = \lim_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}} \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}} \frac{\left[-\nabla h(\boldsymbol{\xi}), 1\right]}{\sqrt{1 + \left|\nabla h(\boldsymbol{\xi})\right|^2}} \tag{2.18}$$

und damit

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}} \nabla h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}\,. \tag{2.19}$$

Da h stetig ist, folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass h in einer Umgebung des Ursprungs stetig differenzierbar ist; insbesondere gilt $\nabla h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. □

1.3.2. *Flexibilität.* Die geometrische Vielfalt der Flächen, die mittels einer bestimmten Klasse von Splines modellierbar sind, ist entscheidend für deren Verwendbarkeit in der geometrischen Datenverarbeitung. So ist es beispielsweise nahezu trivial, Splineklassen beliebiger Topologie und Glattheit zu konstruieren, wenn man in Kauf nimmt, dass irreguläre Ecken stets Flachpunkte hoher Ordnung sind, dass also genügend viele partielle Ableitungen der lokalen Form im Ursprung verschwinden. Solche Flächen sind aus verschiedenen Gründen von nur geringem Interesse. Der Einsatz in CAD-Systemen kommt aufgrund der erzwungenen Flachpunkte nicht in Frage, genauso werden die Approximationseigenschaften einer solchen Splineklasse unbefriedigend sein. Um – zumindest lokal – ein Maß für die Menge der modellierbaren Flächen zur Verfügung zu haben, führen wir den Begriff der Flexibilität ein.

Definition 2.8. *Sei $r,k \in \mathbb{N}$. Dann heißt eine Teilmenge $\hat{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^3) \subset C^k(\Omega,\mathbb{R}^3)$ von Splines r-*flexibel *in $\underline{\mathbf{u}} \in \Omega$, wenn für jedes bivariate Polynom p vom Grad r mit $p(\mathbf{0}) = 0, \nabla p(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ein Spline $\mathbf{x} \in \hat{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^3)$ existiert, der in $\underline{\mathbf{u}}$ regulär ist und dort die lokale Form*

$$h(\boldsymbol{\xi}) = p(\boldsymbol{\xi}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^r) \tag{2.20}$$

besitzt.

Beispiel. Ist eine Splineklasse 2-flexibel in $\underline{\mathbf{u}}$, so können die Hauptkrümmungen dort beliebig vorgegeben werden. Dagegen ist beispielsweise die Darstellung eines Affensattels nicht unbedingt möglich.

1.4. Reguläre und irreguläre innere Knoten. Wenden wir uns nun den besonderen Gegebenheiten in der Umgebung eines inneren Knotens der Ordnung n zu. Da die zu untersuchenden Glattheitseigenschaften der Fläche lokaler Natur sind, genügt es, die n Zellen, die einen inneren Knoten gemeinsam haben, zu betrachten. Bezeichne wieder $\mathbb{Z}_n$ die ganzen Zahlen modulo n, dann definieren wir $\Omega^n := \omega \times \mathbb{Z}_n$ als das Definitionsgebiet mit n Zellen, das mit der Nachbarschaftsrelation

$$\mathcal{E}_n : (e_4, j) \precneqq (e_1, j+1)\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n \tag{2.21}$$

versehen ist. Den einzigen inneren Knoten bezeichnen wir mit $\mathbf{0} := (\mathbf{0}, 0) \precneqq \cdots \precneqq (\mathbf{0}, n-1)$. Die Glattheitsbedingung (2.8) hat in Ω^n die Gestalt

$$D_u^\nu \mathbf{x}^j(0,t) = (-1)^\nu D_v^\nu \mathbf{x}^{j+1}(t,0)\ , \quad \nu = 0,\dots,k\ , \quad t \in \gamma\,. \tag{2.22}$$

Für $\nu = 0$ erhalten wir speziell die Konsistenzbedingung

$$\mathbf{x}^j(0,t) = \mathbf{x}^{j+1}(t,0)\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{2.23}$$

Diese liefert für $t = 0$ zum einen die den Patches $\mathbf{x}^j$ gemeinsame innere Ecke

$$\mathbf{m} := \mathbf{x}^1(\mathbf{0}) = \cdots = \mathbf{x}^n(\mathbf{0})\,, \tag{2.24}$$

zum anderen, nach t differenziert, die Beziehung

$$\mathbf{x}_v^j(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_u^{j+1}(\mathbf{0})\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{2.25}$$

Für $t = 0$ und $\nu = 1$ ergibt die Glattheitsbedingung

$$\mathbf{x}_u^j(\mathbf{0}) = -\mathbf{x}_v^{j+1}(\mathbf{0})\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,, \tag{2.26}$$

und durch Kombination der beiden letzten Gleichungen erhält man schließlich das zyklische System

$$\mathbf{x}_u^j(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_u^{j+4}(\mathbf{0})\ , \quad \mathbf{x}_v^j(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_v^{j+4}(\mathbf{0})\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{2.27}$$

Die partiellen Ableitungen im Punkt $\mathbf{m}$ sind also 4-periodisch, andererseits nach Konstruktion aber auch n-periodisch. Ist n ungerade, so impliziert dies unmittelbar die Singularität der Parametrisierung,

$$\mathbf{x}_u^j(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_v^j(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,, \tag{2.28}$$

aber auch für andere Werte von $n \neq 4$ ist dies die einzig sinnvolle Wahl. Der Grund hierfür ist nicht algebraischer, sondern vielmehr geometrischer Natur. Es gilt nämlich

LEMMA 2.9. *Sei* $\mathbf{x} \in C^1(\Omega^n, \mathbb{R}^3)$. *Ist* $\mathbf{0} \in \Omega_r$ *und gilt für zwei Indizes* $j_1 \neq j_2$ mod n, *dass die zugehörigen Jacobimatrizen im Ursprung übereinstimmen, also* $D_\mathbf{u}\mathbf{x}^{j_1}(\mathbf{0}) = D_\mathbf{u}\mathbf{x}^{j_2}(\mathbf{0})$, *dann ist die Splinefläche nicht regulär in* $\mathbf{0}$.

BEWEIS. $\mathbf{x}$ ist normalenstetig in $\mathbf{0}$, da nach Voraussetzung $\mathbf{0} \in \Omega_r$. Betrachten wir die Projektion $\boldsymbol{\xi} := \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}$ gemäß Definition 2.5, dann ist

$$D_\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}^{j_1}(\mathbf{0}) = D_\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}^{j_2}(\mathbf{0}) \tag{2.29}$$

und es gilt für $j \in \{j_1, j_2\}$

$$\left|\det D_\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}^j(\mathbf{0})\right| = \|\bar{\mathbf{n}}(\mathbf{0})\| \neq 0\,. \tag{2.30}$$

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen kann daraus gefolgert werden, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Gleichung

$$\boldsymbol{\xi}^j(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\xi}_u + \boldsymbol{\xi}_v)t \tag{2.31}$$

für alle $t \in [0, \varepsilon)$ nach $\mathbf{u} = \mathbf{u}_j(t) = (t,t) + o(t) \in \omega$ aufgelöst werden kann. Also ist

$$\boldsymbol{\xi}\big(\mathbf{u}_{j_1}(t), j_1\big) = \boldsymbol{\xi}\big(\mathbf{u}_{j_2}(t), j_2\big)\,, \quad t \in [0, \varepsilon) \tag{2.32}$$

und $\boldsymbol{\xi}$ somit nicht lokal injektiv. □

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Lemma erhält man den folgenden Satz, der zum einen die Wahl der Bezeichnungen bei der Unterscheidung zwischen regulären und irregulären inneren Knoten rechtfertigt. Zum anderen wird, wie bereits erwähnt, deutlich, dass C^k-Splines im Allgemeinen notwendig singulär parametrisierte Punkte enthalten.

SATZ 2.10. *Wenn ein Spline* $\mathbf{x} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *in einem irregulären Knoten* C^1-*regulär ist, dann ist die Parametrisierung dort singulär.*

1.5. Erweiterung der Definition eines C^k-Splines. Wir haben bislang vorausgesetzt, dass alle Patches auf dem gesamten Einheitsquadrat k-mal stetig differenzierbar sind. Diese Annahme führt, wie gezeigt, auf singuläre Parametrisierungen in den irregulären Knoten. Dort lässt also die Glattheit der Parametrisierung keinerlei Rückschlüsse auf die Glattheit der erzeugten Fläche zu. Diese Tatsache aber macht die Forderung nach Differenzierbarkeit der Patches in irregulären Knoten letztlich obsolet.

DEFINITION 2.11. *Sei* C_i *die Menge der irregulären Knoten eines Splinedefinitionsgebiets* Ω. *Ein Spline* $\mathbf{x} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *heißt* C^k-Spline, *wenn für jedes Paar* $\Omega' := (\omega, i) \cup (\omega, i')$ *verschiedener, benachbarter Zellen und eine kanonische Darstellung* Φ *von* Ω' *gilt, dass* $\mathbf{x}_\Phi := \mathbf{x} \circ \Phi^{-1} : \Phi(\Omega') \to \mathbb{R}^d$ *eine* k*-mal stetig differenzierbare Funktion über* $\Phi(\Omega' \backslash C_i)$ *ist. Der Raum aller* C^k*-Splines über* Ω *mit Werten in* $\mathbb{R}^d$ *wird mit* $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *bezeichnet.*

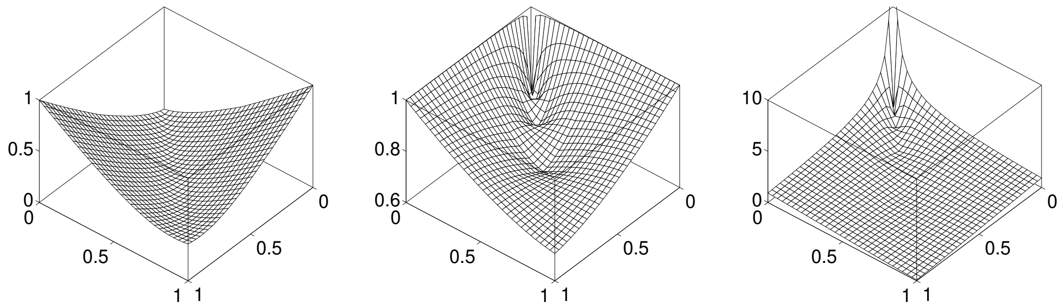


Abbildung 2.4. Mögliche Gradientenverläufe eines irregulären Patches: stetig mit Grenzwert $\mathbf{0}$ *(links)*, beschränkt unstetig *(Mitte)* und divergent *(rechts)*.

In dieser Form wurde das Konzept der parametrischen Glattheit bislang noch nicht explizit formuliert. Allerdings fallen Subdivisionsflächen gerade in diese Kategorie. Im Vorgriff auf die späteren Ausführungen wollen wir dies hier kurz illustrieren. In Abbildung 2.4 sind jeweils die Norm der Gradienten skalarer Patches exemplarisch dargestellt, wie sie durch Algorithmen vom Doo-Sabin-Typ für verschiedene Werte des subdominanten Eigenwerts λ auftreten. Links ist der Fall $\lambda = 0.3 < 1/2$ zu sehen, der auf stetig differenzierbare Patches führt. Hier verschwindet im Einklang mit den obigen Ergebnissen die Norm des Gradienten im Ursprung. Im Fall $\lambda = 1/2$, wie er in der Mitte dargestellt ist, ist der Gradient beschränkt, aber im Ursprung unstetig. Rechts ist ein divergenter Verlauf zu sehen, wie er beispielsweise im Fall $\lambda = 0.8 > 1/2$ auftritt. In allen drei Fällen sind die zugehörigen Splineflächen C^1-regulär.

Weitere mögliche Anwendungen betreffen beispielsweise rationale Patches, deren Gewichtsfunktion im Ursprung verschwindet. Dieser interessante Aspekt, der möglicherweise neue Ansätze zur Erzeugung parametrisch glatter Splineflächen liefert, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, wird aber in Zukunft noch genauer zu untersuchen sein.

1.6. Verfeinerbarkeit. Neben den oben genannten Eigenschaften und der konzeptionellen Einfachheit ist ein Hauptvorteil der Klasse der C^k-Splineflächen die Verfeinerbarkeit. Dies bezeichnet die Tatsache, dass jede C^k-Splinefläche $\mathbf{x}(\Omega)$ exakt durch eine Splinefläche $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{\Omega})$ mit einer verfeinerten Patchstruktur reproduziert werden kann.

Definition 2.12. *Sei $\Omega = \omega \times I$ ein Splinedefinitionsgebiet. Das* verfeinerte Splinedefinitionsgebiet *$\tilde{\Omega} = \omega \times \tilde{I}$ erhält man daraus wie folgt:*

- *Die neue Indexmenge ist $\tilde{I} := \{4i + \ell : i \in I,\ \ell = 1, \ldots, 4\}$.*

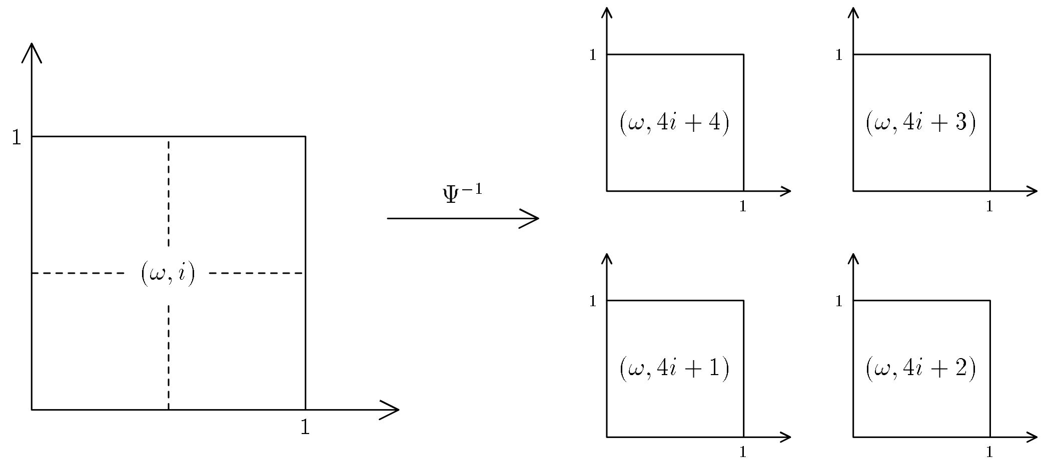


ABBILDUNG 2.5. Verfeinerung einer Zelle.

- *Das ursprüngliche und das verfeinerte Definitionsgebiet sind durch einen Isomorphismus* $\Upsilon : \tilde{\Omega} \mapsto \Omega$ *verknüpft,*

$$\Upsilon : \tilde{\Omega} \ni (u, v, 4i + \ell) \mapsto \begin{cases} (u/2, v/2, i) & \text{für } \ell = 1 \\ (\bar{u}/2, v/2, i) & \text{für } \ell = 2 \\ (\bar{u}/2, \bar{v}/2, i) & \text{für } \ell = 3 \\ (u/2, \bar{v}/2, i) & \text{für } \ell = 4 \end{cases} \in \Omega\,, \tag{2.33}$$

wobei $\bar{u} := 1 + u, \bar{v} := 1 + v$.
- *Die neue Nachbarschaftsrelation* $\tilde{\mathcal{E}}$ *ist definiert durch*

$$\tilde{\mathcal{E}} : (e_\ell, i) \precneqq (e_{\ell'}, i') \iff \Upsilon(e_\ell, i) = \Upsilon(e_{\ell'}, i')\,. \tag{2.34}$$

Durch die Verfeinerung wird also jede Zelle (ω, i) in vier neue Zellen $(\omega, 4i + 1), \ldots, (\omega, 4i + 4)$ geteilt, siehe Abbildung 2.5. Elementare Überlegungen zeigen, dass die Verfeinerung eines einfachen Splinedefinitionsgebiets ein ebensolches ergibt und dass, wie bereits erwähnt, das Resultat einer zweimaligen Verfeinerung eines beliebigen Splinedefinitionsgebiets ein einfaches Definitionsgebiet ist. Des Weiteren stellt man fest, dass die Anzahl und Ordnung der irregulären Knoten erhalten bleibt, siehe Abbildung 2.2. Iterierte Verfeinerung führt also zu einer fortschreitenden Separation der irregulären Knoten.

Der folgende Satz über die Verfeinerbarkeit parametrisch glatter Splineflächen ist ebenso einfach wie grundlegend. Seine Bedeutung liegt insbesondere in der Tatsache, dass alle bekannten Klassen von Splineflächen beliebiger Topologie, die auf dem Prinzip der geometrischen Glattheit basieren, keine vergleichbare Eigenschaft aufweisen.

SATZ 2.13. *Der Isomorphismus* $\Upsilon : \tilde{\Omega} \mapsto \Omega$ *induziert eine Einbettung* $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. *Das heißt, für alle* $\mathbf{x} \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *ist* $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \Upsilon \in C^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d)$.

Beweis. Sei $\tilde{\Omega}' = (\omega, \tilde{i}) \cup (\omega, \tilde{i}') \subset \tilde{\Omega}$ die Vereinigung zweier benachbarter Zellen in $\tilde{\Omega}$, dann gibt es zwei benachbarte Zellen $\Omega' = (\omega, i) \cup (\omega, i') \subset \Omega$ mit $\Upsilon(\tilde{\Omega}') \subset \Omega'$. Wenn Φ eine kanonische Darstellung von Ω' ist, dann ist mit $Z : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (2u, 2v) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\tilde{\Phi} := Z \circ \Phi \circ \Upsilon : \tilde{\Omega}' \to \mathbb{R}^2$ eine kanonische Darstellung von $\tilde{\Omega}'$. Für $\mathbf{x} \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ folgt dann

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{\Phi}} = \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \mathbf{x} \circ \Upsilon \circ \Upsilon^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ Z^{-1} = \mathbf{x}_\Phi \circ Z^{-1} . \tag{2.35}$$

Da Υ irreguläre Knoten auf ebensolche abbildet, ist $\tilde{\mathbf{x}}$ ein C^k-Spline über $\tilde{\Omega}$. □

2. Subdivisionsflächen

Subdivisionsflächen sind speziell parametrisierte Splineflächen. Der Grundgedanke ist der Folgende: Betrachten wir einen irregulären Knoten eines einfachen Definitionsgebiets, der von n Zellen geteilt wird. Nach einem Verfeinerungsschritt entstehen hieraus $4n$ Zellen, von denen n Stück wieder irregulär sind. Die restlichen $3n$ Zellen sind aber regulär und bilden einen ersten Ring, der die n irregulären Zellen umschließt. Wiederholt man diesen Prozess, so entstehen wieder n irreguläre Zellen sowie ein zweiter Ring. Durch Iteration entsteht so eine Folge von Ringen; die zugehörigen Bilder ziehen sich mehr und mehr auf einen Punkt zusammen und schöpfen, mit Ausnahme der irregulären Ecke selbst, schließlich die gesamte Fläche aus, die von den ursprünglichen n irregulären Patches parametrisiert wurde. Eine Subdivisionsfläche ist nun nichts anderes als eine Splinefläche, deren irregulären Teile als unendliche Vereinigung solcher ringförmiger Flächen dargestellt sind.

2.1. Die Zerlegung von Splines in Splineringe. Der soeben dargestellten formalen Sichtweise folgend werden wir nun das Parametergebiet Ω in der Nähe innerer Knoten mit einer Struktur versehen, die einem lokal ad infinitum iterierten Verfeinerungsprozess angepasst ist. Der Nutzen für die Analyse von Subdivisionsalgorithmen, die ja in der Regel keine bekannten Splineflächen verfeinern, sondern rekursiv eine Folge von Ringen erzeugen, wird sich dann im nächsten Abschnitt erweisen.

2.1.1. *Segmente und Splineringe.* Da sich die Analyse aller hier betrachteten Unterteilungsalgorithmen auf die Umgebung innerer Knoten beschränken lässt, genügt es wiederum, Definitionsgebiete vom Typ $\Omega^n = \omega \times \mathbb{Z}_n$ zu betrachten. Nun unterteilen wir ω und Ω^n wie folgt: Sei

$$\omega_0 := [0,2]^2 \backslash [0,1)^2 , \ \omega_m := 2^{-m}\omega_0 , \ \Omega_0^n := \omega_m \times \mathbb{Z}_n , \ m \in \mathbb{N}, \tag{2.36}$$

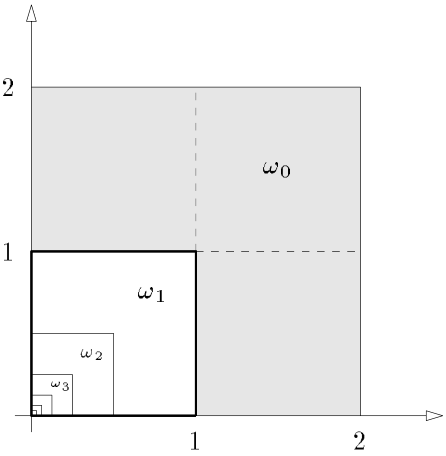
dann ist

$$\omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \omega_m \cup \mathbf{0} , \quad \Omega^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m^n \cup \mathbf{0} , \tag{2.37}$$

siehe Abbildung 2.6. Weiterhin definieren wir die Mengen

$$\partial_+\Omega_0^n := \big\{(u,v,j) \in \Omega_0^n : \max(u,v) = 2\big\} \tag{2.38}$$

$$\partial_-\Omega_0^n := \big\{(u,v,j) \in \Omega_0^n : \max(u,v) = 1\big\} ; \tag{2.39}$$



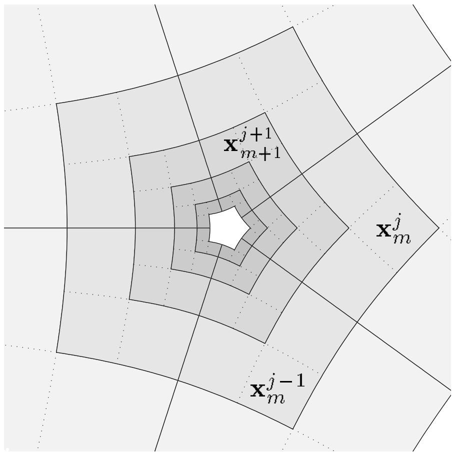


ABBILDUNG 2.6. Zerlegung des Einheitsquadrats ω *(links)* und Anordnung der Splineringe *(rechts)*.

dies sind also anschaulich gesprochen der äußere und der innere Rand der Menge Ω_0^n. In Ω_0^n werden analog zu Ω^n die Punkte $(0,t,j)$ und $(t,0,j+1)$ für alle $t \in [1,2]$ und $j \in \mathbb{Z}_n$ identifiziert.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}_n$, dann ist die Einschränkung eines Splines $\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$ auf Ω_m^n der *unskalierte Splinering* $\tilde{\mathbf{x}}_m$ und die Einschränkung eines Patches $\mathbf{x}^j$ auf ω_m das *unskaliertes Segment* $\tilde{\mathbf{x}}_m^j$. Nach Reskalierung erhalten wir den *Splinering*

$$\mathbf{x}_m : \Omega_0^n \ni (u,v,j) \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_m(2^{-m}u, 2^{-m}v, j) \tag{2.40}$$

bzw. das *Segment*

$$\mathbf{x}_m^j : \omega_0 \ni (u,v) \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_m^j(2^{-m}u, 2^{-m}v)\,. \tag{2.41}$$

Die Einschränkung des Splinerings $\mathbf{x}_m$ auf $\partial_+\Omega_0^n$ ist die *Randkurve* $\tau_m : \partial_+\Omega_0^n \to \mathbb{R}^d$ von $\mathbf{x}_m$. Die Segmente von τ_m bezeichnen wir mit $\tau_m^0, \ldots, \tau_m^{n-1}$. Insbesondere Randkurven in $\mathbb{R}^2$ werden im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

2.1.2. *Der Funktionenraum der Splineringe.* Den Raum aller C^k-Splineringe bezeichnen wir mit $C^k(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 2.3 bilden n Segmente $\mathbf{x}_m^0, \ldots, \mathbf{x}_m^{n-1}$, die k-mal stetig differenzierbar sind, genau dann einen C^k-Splinering, wenn für alle $j \in \mathbb{Z}_n$ die Glattheitsbedingungen

$$D_u^\nu \mathbf{x}_m^j(0,t) = (-1)^\nu D_v^\nu \mathbf{x}_m^{j+1}(t,0)\,, \quad \nu = 0,\ldots,k\,,\ t \in [1,2] \tag{2.42}$$

gelten. Gelegentlich ist es notwendig, zwei benachbarte Segmente zusammenzufassen. Sei Φ die kanonische Darstellung der Zellen $(\omega,j) \cup (\omega,j+1)$, $\mathbf{x}_m$ der m-te Splinering von $\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$ und $\omega_0^+ := \omega_0 \cup R_{\pi/2}\omega_0$, siehe Abbildung 2.7, dann definieren für $j \in \mathbb{Z}_n$ das *Doppelsegment* $\mathbf{x}_m^{j,+} := \mathbf{x} \circ \Phi \circ Z^{-m} : \omega_0^+ \to \mathbb{R}^d$. $\mathbf{x}_m^{j,+}$ ist

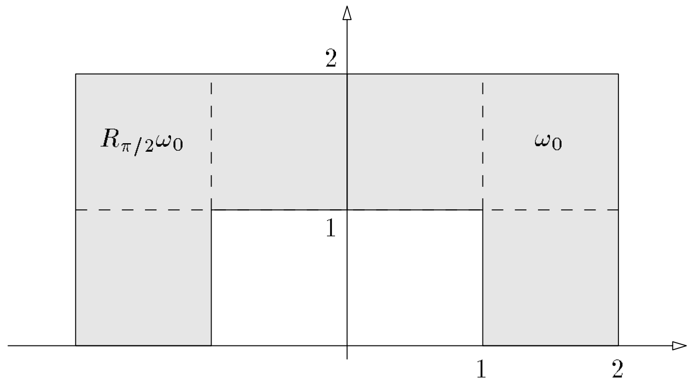


ABBILDUNG 2.7. Definitionsgebiet $\omega_0^+ = \omega_0 \cup R_{\pi/2}\omega_0$ eines Doppelsegments.

also eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, die gegeben ist durch

$$\mathbf{x}_m^{j,+} : \omega_0^+ \ni \underline{\mathbf{u}} = \begin{cases} \mathbf{x}_m^j & \text{für} \quad \underline{\mathbf{u}} \in \omega_0 \\ \mathbf{x}_m^{j+1} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{u}} \in R_{\pi/2}\omega_0 \,. \end{cases} \tag{2.43}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{x}_m^{j,+}(\underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}_m^{j+1,+}(R_{\pi/2}\underline{\mathbf{u}}) \,, \quad \underline{\mathbf{u}} \in \Omega_0^n \,, \ j \in \mathbb{Z}_n \,. \tag{2.44}$$

2.2. Splineringe in endlichdimensionalen Teilräumen. Aufgrund der Verfeinerungseigenschaft kann jede C^k-Splinefläche als Vereinigung von Bildern von Splineringen dargestellt werden. Alle bislang in der Literatur diskutierten Subdivisionsalgorithmen sowie eine große Klasse möglicher Verallgemeinerungen besitzen aber als gemeinsames Charakteristikum neben der affinen Invarianz die Eigenschaft, dass jeweils alle erzeugten Splineringe in einem gemeinsamen, endlichdimensionalen Vektorraum liegen. Diesem Fall wollen wir uns nun zuwenden.

2.2.1. *Erzeugende Systeme.* Sei

$$\boldsymbol{\varphi} := [\varphi_0, \ldots, \varphi_Q] \,, \quad \varphi_q \in C^k(\Omega_0^n, \mathbb{R}) \,, \ q = 0, \ldots, Q \tag{2.45}$$

ein Zeilenvektor skalarwertiger Splineringe, die eine Partition der Eins bilden,

$$\sum_{q=0}^{Q} \varphi_q = e \,, \quad e : \Omega_0^n \ni \underline{\mathbf{u}} \mapsto 1 \,. \tag{2.46}$$

Dann bezeichnen wir den von diesen Funktionen aufgespannten Raum mit

$$C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{q=0}^{Q} \varphi_q \mathbf{B}^q : \mathbf{B}^q \in \mathbb{R}^d \right\} \subset C^k(\Omega_0^n, \mathbb{R}) \tag{2.47}$$

und nennen $\boldsymbol{\varphi}$ das *erzeugende System* des Raums $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d)$.

2.2.2. *Normierung.* Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$, dann ist $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)$ versehen mit der *Maximumnorm*

$$\|\mathbf{x}_m\|_\infty := \max_{\underline{\mathbf{u}} \in \Omega^n_0} \|\mathbf{x}_m(\underline{\mathbf{u}})\| \tag{2.48}$$

ein endlichdimensionaler Banachraum.

2.2.3. *Affine Invarianz.* Die Linearität des Raums $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)$ bedingt seine Abgeschlossenheit unter linearen Abbildungen. Mit der Einsfunktion $e \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R})$ kann man Vektoren $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ vermöge

$$\mathbb{R}^d \ni \mathbf{p} \;\longleftrightarrow\; e\mathbf{p} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d) \tag{2.49}$$

mit zu Punkten entarteten Splineringen identifizieren. Hieraus folgt unmittelbar die Translationsinvarianz und damit auch die affine Invarianz von $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)$.

2.2.4. *Kontrollpunkte.* Ein Splinering $\mathbf{x}_m \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)$ gemäß (2.47) ist eine Linearkombination des erzeugenden Systems $\boldsymbol{\varphi}$ mit Koeffizienten $\mathbf{B}^0_m, \ldots, \mathbf{B}^Q_m \in \mathbb{R}^d$, den sogenannten *Kontrollpunkten.* Fassen wir diese Kontrollpunkte zu einem Spaltenvektor $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}^0_m; \ldots; \mathbf{B}^Q_m] \in \mathbb{R}^{(Q+1)\times d}$ zusammen, dann ist also

$$\mathbf{x}_m(\mathbf{u}, j) = \mathbf{x}^j_m(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, j)\mathbf{B}_m\,, \quad (\mathbf{u}, j) \in \Omega^n_0\,. \tag{2.50}$$

Vermöge dieser Darstellung identifizieren wir den Zeilenvektor $\boldsymbol{\varphi}$ mit der linearen Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^{Q+1} \ni \mathbf{B} \mapsto \boldsymbol{\varphi}\mathbf{B} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R})$.

2.2.5. *$\boldsymbol{\varphi}$-Splines.* Sei $\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$ ein Spline und $\{\mathbf{x}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von Splineringen. Gibt es ein erzeugendes System $\boldsymbol{\varphi}$, so dass $\mathbf{x}_m \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann nennen wir $\mathbf{x}$ einen *$\boldsymbol{\varphi}$-Spline.* Den Raum aller $\boldsymbol{\varphi}$-Splines über Ω^n bezeichnen wir mit

$$C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^d) := \left\{\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d) : \mathbf{x}_m \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d)\right\}. \tag{2.51}$$

Das Bild eines $\boldsymbol{\varphi}$-Splines $\mathbf{x} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^3)$ nennen wir *Subdivisionsfläche.* Diese lässt sich als Vereinigung der Bilder der Splineringe $\mathbf{x}_m$ und der inneren Ecke $\mathbf{m}$ darstellen,

$$\mathbf{x}(\Omega^n) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbf{x}_m(\Omega^n_0) \cup \mathbf{m}\,. \tag{2.52}$$

Wir bezeichnen $\mathbf{m}$ im Folgenden auch als *Grenzpunkt.*

2.3. Konsistenz und Regularität. Die Segmentierung eines Splines in eine Folge von Splineringen impliziert Konsistenzbedingungen sowohl zwischen den einzelnen Splineringen als auch im Grenzpunkt. Ist dieser irregulär, dann werden dort aufgrund der notwendig singulären Parametrisierung zusätzlich Bedingungen für Normalenstetigkeit und Regularität erforderlich. Bei allen entsprechenden Untersuchungen ist davon auszugehen, dass in der Regel keine geschlossene analytische Darstellung der einzelnen Patches $\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^{n-1}$ zur Verfügung steht. Es müssen also entsprechende Kriterien formuliert werden, die ausschließlich auf Eigenschaften der Folge der Splineringe basieren. Sei im Folgenden stets $\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^3), k \geq 1$, ein $\boldsymbol{\varphi}$-Spline, der regulär in $\mathbf{0}$ ist.

2.3.1. *Der Kontakt benachbarter Splineringe.* Aus der Tatsache, dass je zwei aufeinanderfolgende Splineringe eine gemeinsame Randkurve haben und aus einem C^k-Spline hervorgehen, ergeben sich zunächst für die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k der Segmente mittels der Beziehung (2.41) die Konsistenzbedingungen

$$\begin{aligned} 2^\nu D_u^\nu \mathbf{x}_{m+1}^j(2,2t) &= D_u^\nu \mathbf{x}_m^j(1,t) \\ 2^\nu D_v^\nu \mathbf{x}_{m+1}^j(2t,2) &= D_v^\nu \mathbf{x}_m^j(t,1)\,, \quad t \in \gamma\,, \end{aligned} \tag{2.53}$$

für $m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_n$ und $\nu = 0, \ldots, k$.

2.3.2. *Bedingungen im inneren Knoten.* Die Analyse der Situation im inneren Knoten ist letztlich das zentrale Thema dieser Abhandlung. Wir beschränken uns hier zunächst auf einige elementare Aussagen dazu. Aus der Stetigkeit der einzelnen Patches $\mathbf{x}^j$ folgt die Existenz eines gemeinsamen Grenzwerts

$$\mathbf{m} = \mathbf{x}^j(\mathbf{0}) = \lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \mathbf{x}^j(\mathbf{u})\,, \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{2.54}$$

Also existiert für jede Folge $\{\underline{\mathbf{u}}_m \in \Omega_0^n : m \in \mathbb{N}\}$ der von der speziellen Wahl der Folge unabhängige Grenzwert

$$\mathbf{m} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m(\underline{\mathbf{u}}_m)\,. \tag{2.55}$$

Aufgrund der Kompaktheit von Ω_0^n ist dies äquivalent zu

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{m} - \mathbf{x}_m\|_\infty = 0\,, \tag{2.56}$$

wobei hier $\mathbf{m}$ vermöge (2.49) mit einem Splinering zu identifizieren ist.

Da, wie in Satz 2.10 gezeigt, die Parametrisierung einer Subdivisionsfläche in einem irregulären Knoten notwendig singulär ist, kann die Regularität der Fläche in diesem Punkt für $n \neq 4$ nicht aus dem Satz über implizite Funktionen geschlossen werden, sondern muss vielmehr direkt aus den Definitionen 2.4 und 2.5 abgeleitet werden. Da nach Voraussetzung die Menge der singulären Parameter keine Häufungspunkte haben soll, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Fläche $\cup_{m=m_0}^\infty \mathbf{x}_m(\Omega_0^n)$ regulär parametrisiert ist. Dort kann der Normalenvektor als normiertes Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen der Segmente berechnet werden. Für $(\mathbf{u}, j) \in \Omega_0^n$ und $m \geq m_0$ ist also

$$\mathbf{n}_m(\mathbf{u}, j) := \frac{\mathbf{x}_{m,u}^j(\mathbf{u}) \times \mathbf{x}_{m,v}^j(\mathbf{u})}{\left\|\mathbf{x}_{m,u}^j(\mathbf{u}) \times \mathbf{x}_{m,v}^j(\mathbf{u})\right\|} \tag{2.57}$$

wohldefiniert. Normalenstetigkeit der Subdivisionsfläche impliziert nun, dass für jede Folge $\{\underline{\mathbf{u}}_m \in \Omega_0^n : m \geq m_0\}$ ein von der speziellen Wahl der Folge unabhängiger Grenzwert

$$\mathbf{n}(\mathbf{0}) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{n}_m(\underline{\mathbf{u}}_m) \tag{2.58}$$

existiert. Regularität erfordert überdies, dass die Einschränkung der Projektion $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}$ auf die Menge $\cup_{m=m_0}^\infty \Omega_m^n \cup \mathbf{0}$ für ein hinreichend großes m_0 injektiv ist.

Setzen wir die Konsistenz einer Subdivisionsfläche gemäß (2.53) und (2.56) voraus, dann sind die zuletzt angegebenen notwendigen Bedingungen offensichtlich auch im folgenden Sinne hinreichend: Gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass alle Splineringe $\mathbf{x}_m$ regulär parametrisiert sind und ein eindeutiger Grenzwert gemäß (2.58) existiert, dann ist die Subdivisionsfläche normalenstetig in $\mathbf{0}$. Ist überdies die Einschränkung der Projektion $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}$ auf die Menge $\cup_{m=m_0}^{\infty}\Omega_m^n) \cup \mathbf{0}$ injektiv, dann folgt daraus die Regularität im Ursprung.

3. Subdivisionsalgorithmen

In diesem Abschnitt werden Subdivisionsalgorithmen ganz allgemein als Rekursionen zur Erzeugung einer Folge von Splineringen definiert. Zunächst erläutern wir kurz den Zusammenhang zwischen dieser und der sonst üblichen Betrachtungsweise, bei der ein Subdivisionsalgorithmus als iterativ angewandte Regel zur Verfeinerung räumlicher Netze angesehen wird. Als *Netz* oder auch *Kontrollnetz* bezeichnen wir hier eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die aus geradlinig verbundenen Punkten besteht und homöomorph zu einer zusammenhängenden Teilmenge der Kanten eines Polyeders ist. Danach gehen wir auf einige elementare Eigenschaften von Subdivisionsalgorithmen ein.

3.1. Subdivision als Rekursion für Splineringe. In der Praxis sind Subdivisionsalgorithmen iterative Regeln zur Verfeinerung von Netzen. Konkret handelt es sich dabei meist um sehr einfache Vorschriften zur Berechnung neuer Ecken als gewichtete Mittel einiger weniger benachbarter alter Ecken. So betrachtet ist eine Subdivisionsfläche der Grenzwert einer Folge von immer feineren Netzen. Für analytische Zwecke ist diese Sichtweise trotz ihres elementaren konstruktiven Charakters jedoch unzulänglich. Hierzu erweist sich ein Zugang als besser geeignet, wie er im vorangegangenen Abschnitt vorbereitet wurde. Dort wurde eine Subdivisionsfläche als Vereinigung einer Folge von Bildern von Splineringen definiert. In diesem Sinne betrachten wir nun Subdivisionsalgorithmen als Rekursion zur Erzeugung einer Folge von Splineringen. Der Übergang von der einen zur anderen Betrachtungsweise soll nun kurz und informell erläutert werden. Ausführlichere Darstellungen dieses wichtigen Aspekts finden sich in [Rei93, Rei95d].

Betrachten wir also zunächst einen Subdivisionsalgorithmus als Regel zur iterativen Erzeugung einer Folge immer feinerer Netze, die gegen eine Grenzfläche $\mathbf{X}$ konvergiert. Außer in einer Umgebung der irregulären Punkten selbst lässt sich $\mathbf{X}$ mittels Standardverfahren für den regulären Fall analysieren und als Linearkombination reellwertiger Basisfunktionen lokal darstellen. Bei einer gegebenen Rekursionstiefe m ist damit ein Teil $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$ der Grenzfläche bekannt, der jeweils eine n-seitige Lücke in der Umgebung irregulärer Punkte der Ordnung n ausspart. Geht man zur nächsten Iterationsstufe $m+1$ über, so wird aufgrund der fortschreitenden Regularisierung des Netzes nun ein größerer Teil $\mathbf{X}_{m+1} \supsetneq \mathbf{X}_m$ der Grenzfläche erfasst, die n-seitigen Lücken werden also verkleinert. Die aufsteigende Folge $\{\mathbf{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von Flächen stellt im Grenzübergang die gesamte Subdivisionsfläche mit Ausnahme der irregulären Punkte selbst dar. Andererseits sind die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Teilflächen gerade von der Form der oben definierten Splineringe. Bei allen hier diskutierten Algorithmen ist es aufgrund des lokalen Charakters der Verfeinerungsregeln stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, analytische Untersuchungen auf eine Splinefläche mit einer einzigen Irregularität der Ordnung n zu beschränken. In diesem Fall gibt es dann ein erzeugendes System $\boldsymbol{\varphi}$ und eine Folge von Splineringen $\mathbf{x} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^3)$, so dass

$$\mathbf{x}_m(\Omega^n_0) = \text{closure}(\mathbf{X}_m \backslash \mathbf{X}_{m-1}), \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{x}_m(\Omega^n_0) \cup \mathbf{m}, \tag{2.59}$$

wobei $\mathbf{m}$ der irreguläre Punkt gemäß (2.24) ist. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.14. *Sei $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_0, \ldots, \varphi_Q]$ ein erzeugendes C^k-System, $k \geq 1$. Ein* Subdivisionsalgorithmus $(\mathcal{S}, \boldsymbol{\varphi})$ *ist ein Abbildung*

$$C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^d) \ni \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^d), \tag{2.60}$$

die in der folgenden Form gegeben ist: $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von Abbildungen zur rekursiven Bestimmung einer Folge von Splineringen gemäß

$$\mathbf{B}_{m+1} = \mathcal{S}_m(\mathbf{B}_m), \quad \mathbf{x}_{m+1} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{B}_{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.61}$$

Die Annahme, dass $\mathbf{B}_{m+1}$ nur von $\mathbf{B}_m$ abhängt, ist weniger restriktiv, als dies auf den ersten Blick scheinen mag. Sei beispielsweise ein Verfahren der Form $\tilde{\mathbf{B}}_{m+1} = \tilde{\mathcal{S}}_m(\tilde{\mathbf{B}}_m, \ldots, \tilde{\mathbf{B}}_{m-s})$ gegeben und $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ das erzeugende System. Dann fasst man je $s+1$ aufeinanderfolgende Vektoren von Kontrollpunkten zusammen, $\mathbf{B}_m := [\tilde{\mathbf{B}}_m; \ldots; \tilde{\mathbf{B}}_{m-s}]$ und ergänzt $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ durch entsprechend viele Nullfunktionen, $\boldsymbol{\varphi} := [\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, 0, \ldots, 0]$. Damit ist, wie man leicht sieht, die Rekursion in der gewünschten Form $\mathbf{B}_{m+1} = \mathcal{S}_m(\mathbf{B}_m)$ darstellbar.

3.2. Affine Invarianz. Die affine Invarianz ist eine elementare Eigenschaft geometrischer Algorithmen, denn sie ist äquivalent zur koordinatenfreien Darstellbarkeit. Bezeichne L eine lineare Abbildung, $T_{\mathbf{a}}$ die Translation um $\mathbf{a}$ und $L_{\mathbf{a}} := L \circ T_{\mathbf{a}}$ die zugehörige affine Abbildung in $\mathbb{R}^d$, dann wollen wir im Folgenden stets voraussetzen, dass für beliebige L und $\mathbf{a}$ gilt

$$\mathcal{S}_m \circ L_{\mathbf{a}} = L_{\mathbf{a}} \circ \mathcal{S}_m, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.62}$$

Dies impliziert im übrigen die Invarianz der Folge der Splineringe und damit der Subdivisionsfläche selbst, da

$$\varphi\mathcal{S}_m\big(L_{\mathbf{a}}(\mathbf{B}_m)\big) = \varphi L_{\mathbf{a}}\big(\mathcal{S}_m(\mathbf{B}_m)\big) = L_{\mathbf{a}}(\varphi\mathcal{S}_m\big(\mathbf{B}_m)\big). \tag{2.63}$$

Dabei wurde $\boldsymbol{\varphi} \circ T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}} \circ \boldsymbol{\varphi}$ verwendet, was aus der Annahme folgt, dass $\boldsymbol{\varphi}$ eine Partition der Eins bildet.

3.3. Konsistenz, Normalenstetigkeit und Regularität. Konsistenz gemäß (2.53), also der glatte Anschluss aufeinanderfolgender Splineringe, ist bei bekanntem erzeugendem C^k-System $\boldsymbol{\varphi}$ einfach zu gewährleisten, da es sich hierbei um eine explizite Bedingung in Form eines linearen Gleichungssystems handelt.

Die Bedingung (2.56) besagt, dass für einen beliebigen Startvektor $\mathbf{B}_0$ die Folge $\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{B}_m$ bezüglich der Maximumnorm konvergiert, das heißt

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{\varphi}\mathbf{B}_m = \mathbf{m}\,. \tag{2.64}$$

Die Erzeugung normalenstetiger und regulärer Flächen kann, ähnlich wie bei allen affin invarianten Modellen zur Flächenerzeugung, bestenfalls für fast alle Startvektoren $\mathbf{B}_0$ erwartet werden. Man denke beispielsweise an den Fall, dass alle Spalten von $\mathbf{B}_0$ übereinstimmen. Aufgrund der affinen Invarianz sind dann die Koordinaten aller Splineringe stets identisch und die Subdivisionsfläche zu einer Linie entartet. Wir nennen deshalb einen Subdivisionsalgorithmus *normalenstetig* bzw. *C^k-regulär*, wenn er für fast alle Startvektoren $\mathbf{B}_0$ ebensolche $\boldsymbol{\varphi}$-Splines erzeugt.

KAPITEL 3

C^1-Regularität linearer stationärer Verfahren

Die meisten praktisch relevanten Subdivisionsalgorithmen sind linear und stationär. Das heißt, es gibt eine $(Q+1) \times (Q+1)$-Matrix A, die sogenannte Subdivisionsmatrix, die die Kontrollpunkte eines Splinerings auf die des nächsten abbildet, $\mathbf{B}_{m+1} = A\mathbf{B}_m, m \in \mathbb{N}_0$. Diesem wichtigen Spezialfall wollen wir uns nun zuwenden.

Die Bedeutung des Spektrums der Subdivisionsmatrix für das Konvergenzverhalten wurde bereits in der Arbeit von Doo und Sabin [DS78] erkannt, doch lassen sich daraus allein weder notwendige noch hinreichende Bedingungen für die C^1-Regularität von Subdivisionsflächen ableiten. Vielmehr sind neben gewissen Regularitätsannahmen insbesondere die Eigenschaften der sogenannten *charakteristischen Abbildung*, wie sie in [Rei93, Rei95d] für Subdivisionsmatrizen mit doppeltem reellem subdominantem Eigenwert eingeführt wurde, von entscheidender Bedeutung. Dieses Konzept wurde in [Rei95c] auf Paare konjugiert komplexer subdominanter Eigenwerte verallgemeinert und wird nun hier in völliger Allgemeinheit vorgestellt. Damit lassen sich Bedingungen für Normalenstetigkeit und C^1-Regularität von Subdivisionsflächen formulieren, die unter gewissen Regularitätsannahmen notwendig und hinreichend sind.

Im ersten Abschnitt werden lineare stationäre Verfahren eingeführt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Diskussion der Jordanform der Subdivisionsmatrix. Im zweiten und dritten Abschnitt werden Kriterien für Normalenstetigkeit und C^1-Regularität aufgestellt. Im vierten Abschnitt werden schließlich stärkere, aber dafür einfach zu verifizierende hinreichende Bedingungen für symmetrische Algorithmen angegeben, die dann im nächsten Kapitel zur Analyse spezieller Algorithmen herangezogen werden können.

1. Lineare stationäre Verfahren

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe und Methoden zur Beschreibung linearer stationärer Subdivisionsalgorithmen eingeführt. Da das erzeugende System $\boldsymbol{\varphi}$ nicht notwendig linear unabhängig ist, gibt es unter Umständen ganze Klassen von Matrizen, die identische Folgen von Splineringen erzeugen. Zunächst wird in solchen Klassen eine kanonische Form, die Subdivisionsmatrix, ausgezeichnet. Anschließend wird die Eigenraumstruktur dieser Matrix anhand der Jordanform detailiert untersucht und schließlich eine notwendige und hinreichende Konsistenzbedingung für die innere Ecke angegeben.

1.1. Die Subdivisionsmatrix. Sei $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_0, \ldots, \varphi_Q]$ ein erzeugendes System und A eine $(Q+1)\times(Q+1)$-Matrix, dann ist der zugehörige *lineare stationäre*

Subdivisionsalgorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi})$ gegeben durch

$$\mathbf{B}_m = A\mathbf{B}_{m-1}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{3.1}$$

Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass die Matrix A so konstruiert ist, dass zwei beliebige aufeinanderfolgende Splineringe $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{B}_m$ und $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{B}_{m+1} = \boldsymbol{\varphi}A\mathbf{B}_m$ die Konsistenzbedingung (2.53) erfüllen. Mit der Konsistenzbedingung im Grenzpunkt werden wir uns etwas später beschäftigen. Ausgehend von einem gegebenen Startvektor $\mathbf{B}_0$ lassen sich die Kontrollpunkte und Splineringe der m-ten Stufe explizit ausdrücken durch

$$\mathbf{B}_m = A^m\mathbf{B}_0\,, \quad \mathbf{x}_m = \boldsymbol{\varphi}A^m\mathbf{B}_0\,. \tag{3.2}$$

Die geforderte affine Invarianz des Subdivisionsalgorithmus hat eine einfache Konsequenz für die Gestalt der Matrix A. Es gilt $L_{\mathbf{a}} \circ A = A \circ L_{\mathbf{a}}$ für alle affinen Abbildungen $L_{\mathbf{a}}$ genau dann, wenn alle Zeilensummen von A den Wert 1 haben. Demnach ist der Einsvektor $\mathbf{e} := [1; \ldots; 1]$ stets Eigenvektor von A zum Eigenwert 1,

$$A\mathbf{e} = \mathbf{e}\,. \tag{3.3}$$

Fassen wir $\boldsymbol{\varphi}$ als lineare Abbildung auf, dann ist deren Kern

$$W_{\boldsymbol{\varphi}} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{Q+1} : \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v} = 0\} \tag{3.4}$$

in der Regel nichttrivial. Dies bedeutet aber, dass es unter Umständen ganze Klassen von Matrizen gibt, die identische Folgen von Splineringen erzeugen. In einer solchen Klasse äquivalenter Matrizen zeichnen wir eine Untermenge kanonischer Repräsentanten aus.

Definition 3.1. *Zwei Matrizen $A, \tilde{A}$ heißen* äquivalent *bezüglich des erzeugenden Systems $\boldsymbol{\varphi}$, wenn $\boldsymbol{\varphi}A^m = \boldsymbol{\varphi}\tilde{A}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Eine Matrix A heißt* Subdivisionsmatrix, *wenn gilt*

$$V_{\boldsymbol{\varphi}} := \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} A^m W_{\boldsymbol{\varphi}} \subset \ker A\,. \tag{3.5}$$

Offensichtlich ist $V_{\boldsymbol{\varphi}}$ der größte A-invariante Unterraum von $W_{\boldsymbol{\varphi}}$ und es gilt $AV_{\boldsymbol{\varphi}} = V_{\boldsymbol{\varphi}}$. Insbesondere enthält $V_{\boldsymbol{\varphi}}$ alle Eigenräume von A in $W_{\boldsymbol{\varphi}}$. Die Frage nach der Existenz von Subdivisionsmatrizen klärt

Lemma 3.2. *Sei $\Pi_0 : \mathbb{R}^{Q+1} \to V_{\boldsymbol{\varphi}}$ eine Projektion auf den Untervektorraum $V_{\boldsymbol{\varphi}}$ mit $\Pi_0\mathbf{e} = \mathbf{0}$ und $\Pi_1 := \mathrm{Id} - \Pi_0$ deren Komplement, dann ist $\tilde{A} := \Pi_1 A$ eine zu A äquivalente Subdivisionsmatrix.*

Beweis. Wegen $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e} = 1$ ist $\mathbf{e} \notin V_{\boldsymbol{\varphi}}$; es existiert demnach eine Projektion Π_0 der gewünschten Form. Sei $\tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}} := \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} \tilde{A}^m W_{\boldsymbol{\varphi}}$, dann ist

$$A(V_{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}}) = V_{\boldsymbol{\varphi}} + \Pi_0 A\tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}} + \Pi_1 A\tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}} = V_{\boldsymbol{\varphi}} + \Pi_1 A\tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}} = V_{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{3.6}$$

Da $V_{\boldsymbol{\varphi}}$ der größte A-invariante Unterraum von $W_{\boldsymbol{\varphi}}$ ist, gilt $\tilde{V}_{\boldsymbol{\varphi}} \subset V_{\boldsymbol{\varphi}} \subset \ker \tilde{A}$. $\tilde{A}$ ist also tatsächlich eine Subdivisionsmatrix und es gilt $\tilde{A}\mathbf{e} = \Pi_1 A\mathbf{e} = \Pi_1\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Bleibt zu zeigen, dass A und $\tilde{A}$ äquivalent sind. Dazu betrachten wir $\boldsymbol{\varphi}(\tilde{A}^m - A^m) =$

$\varphi\big((A-\Pi_0 A)^m - A^m\big) =: \varphi\Delta$. Die Matrix Δ ist die Summe von Produkten der Matrizen A und Π_0, die alle mindestens einmal den Faktor Π_0 enthalten. Verwendet man noch $A\Pi_0 = \Pi_0 A \Pi_0$, dann sieht man, dass sich Δ in der Form $\Delta = \Pi_0\Delta'$ darstellen lässt. Es gilt also $\varphi(\tilde{A}^m - A^m) = \varphi\Pi_0\Delta' = 0$. □

Die Definition der Subdivisionsmatrix ist folgendermaßen motiviert: Wenn die Eigenräume von A in V_φ von Null verschiedene Eigenwerte haben, dann besitzt die Folge $\mathbf{B}_m$ in der Regel Anteile, die von φ annulliert werden. Diese wirken sich störend aus, wenn aus der Folge $\mathbf{B}_m$ auf Eigenschaften der Folge der Splineringe $\mathbf{x}_m$ geschlossen werden soll und umgekehrt.

1.2. Die Jordanform der Subdivisionsmatrix. Die Struktur der Eigenwerte und –räume der Subdivisionsmatrix ist von entscheidender Bedeutung für das Konvergenzverhalten eines Unterteilungsalgorithmus. Sei

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\Sigma_0, \ldots, \Sigma_P) = V^{-1}AV \tag{3.7}$$

die Jordanform der Matrix A mit Blöcken

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_p & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{\lambda}_p & 1 \\ 0 & & & \tilde{\lambda}_p \end{bmatrix}, \quad p = 0, \ldots, P, \tag{3.8}$$

der Dimension $(\tilde{\tau}_p + 1) \times (\tilde{\tau}_p + 1)$ zum Eigenwert $\tilde{\lambda}_p$ und die Transformationsmatrix V entsprechend in der Form $V = [V_0, \ldots, V_P]$ partitioniert. Dabei sind die Teilmatrizen V_p aus dem Eigenvektor $\tilde{\mathbf{v}}_p^0$ und den Hauptvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_p^1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_p^{\tilde{\tau}_p}$ zum Eigenwert $\tilde{\lambda}_p$ aufgebaut,

$$V_p = [\tilde{\mathbf{v}}_p^0, \tilde{\mathbf{v}}_p^1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_p^{\tilde{\tau}_p}], \quad p = 0, \ldots, P. \tag{3.9}$$

Wie man leicht nachrechnet, hat die m-te Potenz von Σ_p in der ν-ten oberen Nebendiagonalen den Eintrag

$$(\Sigma_p^m)_{\mu,\mu+\nu} = a^\nu_{\tilde{\lambda}_p}(m) := \binom{m}{\nu} \tilde{\lambda}^{m-\nu}, \quad 0 \le \nu, \mu+\nu \le \tilde{\tau}_p, \tag{3.10}$$

wobei per Konvention der Binomialkoeffizient für negative Argumente gleich 0 ist. Wir ordnen nun Paare $(\tilde{\lambda}, \nu)$ gemäß dem Wachstumsverhalten der entsprechenden Funktion $a^\nu_{\tilde{\lambda}}$. Dieses ist in erster Linie durch den Betrag des Eigenwerts und in zweiter Linie durch den Wert von ν charakterisiert. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$ die Relationen

$$(\lambda, \nu) \sim (\lambda', \nu') \iff |\lambda| = |\lambda'| \wedge \nu = \nu' \tag{3.11}$$

$$(\lambda, \nu) \succ (\lambda', \nu') \iff (|\lambda| > |\lambda'|) \vee (|\lambda| = |\lambda'| \wedge \nu > \nu') \tag{3.12}$$

$$(\lambda, \nu) \gg (\lambda', \nu') \iff |\lambda| > |\lambda'|. \tag{3.13}$$

Dabei ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und die Vereinigung $\succcurlyeq$ von $\sim$ und $\succ$ eine Ordnung[1]. Für $\lambda \neq 0$ gilt die Charakterisierung

$$(\lambda, \nu) \succ (\lambda', \nu') \iff \frac{a_{\lambda'}^{\nu'}(m)}{a_{\lambda}^{\nu}(m)} = o(1) \tag{3.14}$$

$$(\lambda, \nu) \succcurlyeq (\lambda', \nu') \iff \frac{a_{\lambda'}^{\nu'}(m)}{a_{\lambda}^{\nu}(m)} = O(1)\,. \tag{3.15}$$

Die Menge aller Paare $\{(\tilde{\lambda}_p, \nu) : p = 0, \dots, P, \nu = 0, \dots, \tilde{\tau}_p\}$ wird nun bezüglich $\succcurlyeq$ geordnet,

$$(\tilde{\lambda}_{p(0)}, \nu_0) \succcurlyeq (\tilde{\lambda}_{p(1)}, \nu_1) \succcurlyeq \dots \succcurlyeq (\tilde{\lambda}_{p(Q)}, \nu_Q)\,. \tag{3.16}$$

Weiter setzen wir für $0 \leq q \leq Q$ und $0 \leq \nu \leq \tilde{\tau}_{p(q)}$

$$\lambda_q := \tilde{\lambda}_{p(q)}\,,\ \Lambda_q := (\lambda_q, \nu_q)\,,\ \tau_q := \tilde{\tau}_{p(q)}\,,\ \mathbf{v}_q := \tilde{\mathbf{v}}_{p(q)}^{\nu_q}\,,\ \mathbf{v}_q^{\nu} := \tilde{\mathbf{v}}_{p(q)}^{\nu}\,. \tag{3.17}$$

Aus (3.10) erhalten wir damit schließlich folgende Formel für die Potenzen der Subdivisionsmatrix:

$$A^m \mathbf{v}_q = \sum_{\nu=0}^{\nu_q} a_{\lambda_q}^{\nu_q - \nu}(m) \mathbf{v}_q^{\nu}\,. \tag{3.18}$$

In der Regel werden nur einige wenige Summanden explizit benötigt. Wir schreiben dann im einfachsten Fall

$$A^m \mathbf{v}_q = a_{\lambda_q}^{\nu_q}(m)\big(\mathbf{v}_q^0 + o(1)\big) \tag{3.19}$$

oder allgemeiner für $0 \leq \nu' \leq \nu_q$

$$A^m \mathbf{v}_q = a_{\lambda_q}^{\nu_q}(m)\mathbf{v}_q^0 + \dots + a_{\lambda_q}^{\nu_q - \nu'}(m)(\mathbf{v}_q^{\nu'} + o(1))\,. \tag{3.20}$$

Beispiel. Zur Veranschaulichung betrachten wir eine Subdivisionsmatrix mit Jordanblöcken

$$\Sigma_0 = 1,\ \Sigma_1 = \overline{\Sigma_2} = \begin{bmatrix} i/2 & 1 & 0 \\ 0 & i/2 & 1 \\ 0 & 0 & i/2 \end{bmatrix},\ \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},\ \Sigma_4 = 1/2\,.$$

Hier ergibt sich die Anordnung

$$\begin{gathered}(1,0) \gg (i/2, 2) \sim (-i/2, 2) \succ (i/2, 1) \sim (-i/2, 1) \\ \sim (1/2, 1) \succ (i/2, 0) \sim (-i/2, 0) \sim (1/2, 0) \sim (1/2, 0)\,,\end{gathered}$$

und es gilt mit $\mathbf{v}_1^0 = \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_1^1 = \mathbf{v}_3$ beispielsweise

$$A^m \mathbf{v}_1 = a_{i/2}^2(m)\mathbf{v}_6 + a_{i/2}^1(m)\big(\mathbf{v}_3 + o(1)\big)\,.$$

[1] Die Antisymmetrie von $\succ$ ist nicht im üblichen Sinne, sondern bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben, d.h. $(\lambda, \nu) \succcurlyeq (\lambda', \nu') \wedge (\lambda', \nu') \succcurlyeq (\lambda, \nu) \ \Rightarrow\ (\lambda, \nu) \sim (\lambda', \nu')$. Dieses formale Detail wird aber im Folgenden ohne Bedeutung sein.

Abschließend definieren wir noch

$$\varrho_p := \begin{cases} \lambda_p/|\lambda_p| & \text{falls } \lambda_p \neq 0 \\ 1 & \text{falls } \lambda_p = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

und erhalten damit

$$a^\nu_{\lambda_p}(m) = a^\nu_{|\lambda_p|}(m)\varrho_p^{m-\nu}\,. \tag{3.22}$$

1.3. Die Jordan–Zerlegung des Startvektors. Um Gleichung (3.18) auf die Berechnung der Splineringe $\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\varphi} A^m \mathbf{B}_0$ anwenden zu können, zerlegen wir $\mathbf{B}_0$ nach Eigen- und Hauptvektoren der Subdivisionsmatrix, wie sie zur Transformation auf Jordanform verwendet werden, siehe (3.9),

$$\mathbf{b} := [\mathbf{b}_0; \ldots; \mathbf{b}_Q] = V^{-1}\mathbf{B}_0\,, \quad \mathbf{B}_0 = \sum_{q=0}^{Q} \mathbf{v}_q \mathbf{b}_q = V\mathbf{b}\,. \tag{3.23}$$

Sei wieder $\boldsymbol{\varphi}$ ein erzeugendes C^k-System. Definieren wir den Raum der komplexwertigen Splineringe in naheliegender Weise durch

$$C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^N, \mathbb{C}^d) := \left\{\mathbf{x}_m : \operatorname{Re}\mathbf{x}_m, \operatorname{Im}\mathbf{x}_m \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d)\right\}, \tag{3.24}$$

dann können wir jedem der Eigen– und Hauptvektoren von A den Splinering

$$\boldsymbol{\varphi}^\nu_q := \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}^\nu_q \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{C}) \tag{3.25}$$

zuordnen. Damit erhalten wir für die Folge der Splineringe die Darstellung

$$\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\varphi} A^m V \mathbf{b} = \sum_{q=0}^{Q} \sum_{\nu=0}^{\nu_q} a^{\nu_q-\nu}_{\lambda_q}(m) \boldsymbol{\varphi}^\nu_q \mathbf{b}_q\,. \tag{3.26}$$

Da der Startvektor $\mathbf{B}_0$ und die Subdivisionsmatrix reell sind, sind die Koeffizienten $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_Q$ entweder reell oder sie bilden konjugiert komplexe Paare. Es gibt also zu jedem q einen *konjugierten Index* $\overline{q}$, so dass für alle

$$[\mathbf{b}_0; \ldots; \mathbf{b}_Q] \in \mathcal{B} := \{V^{-1}\mathbf{B} : \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{Q\times d}\} \tag{3.27}$$

gilt

$$\overline{\mathbf{b}}_q = \mathbf{b}_{\overline{q}}\,, \quad q = 0, \ldots, Q\,. \tag{3.28}$$

Ist die q-te Zeile von V^{-1} reell, so gilt insbesondere $q = \overline{q}$.

1.4. Die Konsistenzbedingung. Die Konsistenz einer Subdivisionsfläche, die durch einen linearen stationären Unterteilungsalgorithmus erzeugt wird, ist genau dann gewährleistet, wenn 1 ein streng dominanter einfacher Eigenwert der Subdivisionsmatrix ist. Diese naheliegende Tatsache wurde bereits mehrfach postuliert, jedoch unseres Wissens bislang noch nicht in voller Allgemeinheit bewiesen.

Satz 3.3. *Ein linearer stationärer Subdivisionsalgorithmus* $(A, \boldsymbol{\varphi})$ *ist genau dann konsistent, wenn für die Eigenwerte der Subdivisionsmatrix* A *gilt* $(1,0) = \Lambda_0 \gg \Lambda_1$.

Beweis. Nach (3.3) ist 1 der Eigenwert von A zum Eigenvektor $\mathbf{e}$. Im Fall $(1,0) = \Lambda_0 \gg \Lambda_1$ ist $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^0 = \mathbf{e}$ und, da $\boldsymbol{\varphi}$ eine Partition der Eins bildet, gilt $\boldsymbol{\varphi}_0^0 \equiv 1$. Gemäß (3.19) und (3.26) erhalten wir

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 + o(1) \tag{3.29}$$

und $\mathbf{b}_0 = \mathbf{m}$ ist die innere Ecke im Sinne von (2.56), das heißt

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{b}_0\|_\infty = 0\,. \tag{3.30}$$

Sei nun $\Lambda_0 \sim \cdots \sim \Lambda_s \succ \Lambda_{s+1}$, dann ist

$$\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\varphi} A^m \mathbf{B}_0 = a_{|\lambda_0|}^{\nu_0}(m) \left(\sum_{q=0}^{s} \varrho_q^{m-\nu_0}\, \boldsymbol{\varphi}_q^0\, \mathbf{b}_q + o(1) \right)\,. \tag{3.31}$$

Es lässt sich stets eine Teilfolge $\{m(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ finden mit

$$\lim_{\mu\to\infty} \varrho_q^{m(\mu)} = 1 \quad \text{für alle} \quad q = 0,\ldots,s\,, \tag{3.32}$$

siehe beispielsweise [HW58], Satz 201. Wenn der Subdivisionsalgorithmus konsistent ist, dann existiert für alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ der Grenzwert

$$\mathbf{m} = \lim_{\mu\to\infty} a_{|\lambda_0|}^{\nu_0}\big(m(\mu)\big)\boldsymbol{\varphi} \left(\sum_{q=0}^{s} \mathbf{v}_q^0 \mathbf{b}_q + o(1) \right)\,. \tag{3.33}$$

Angenommen, es ist $(\lambda_0,\nu_0) \succ (1,0)$, dann divergiert die Folge $a_{|\lambda_0|}^{\nu_0}\big(m(\mu)\big)$. Sei weiterhin speziell $\mathbf{b}_1 = \cdots = \mathbf{b}_s = \mathbf{0}$ und $\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{0}$, dann impliziert dies $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_0^0 = 0$, also $\mathbf{v}_0^0 \in W_{\boldsymbol{\varphi}}$. Da $\mathbf{v}_0^0 = \mathbf{v}_0$ aber Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_0 ist, gilt $\mathbf{v}_0^0 \in A^m W_{\boldsymbol{\varphi}}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $\mathbf{v}_0^0 \in V_{\boldsymbol{\varphi}} \subset \ker A$ im Widerspruch zu $\lambda_0 \geq 1$. Im Fall $(\lambda_0,\nu_0) \sim (1,0)$ ist $a_{\lambda_0}^{\nu_0}(m) = 1$ und es gilt

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}\mathbf{m} = \boldsymbol{\varphi} \sum_{q=0}^{s} \mathbf{v}_q^0 \mathbf{b}_q\,. \tag{3.34}$$

Sei o.B.d.A. $\mathbf{v}_0^0 = \mathbf{e}$ der Einsvektor, dann gibt es für alle $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_Q$ ein $\mathbf{m}' \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathbf{v}' := \sum_{q=1}^{s} \mathbf{v}_q^0 \mathbf{b}_q - \mathbf{e}\mathbf{m}'\,, \quad \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}' = \mathbf{0}\,. \tag{3.35}$$

Nun ist $A\mathbf{v}' = \mathbf{v}'$ und $\mathbf{v}' \in W_{\boldsymbol{\varphi}}$. Hieraus folgt wieder $\mathbf{v}' \in V_{\boldsymbol{\varphi}} \subset \ker A$ und damit $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren $\mathbf{e} = \mathbf{v}_0^0, \mathbf{v}_1^0, \ldots, \mathbf{v}_s^0$ folgt $\mathbf{b}_1 = \cdots = \mathbf{b}_s = \mathbf{0}$, was nur dann keinen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt, wenn $s = 0$ ist, also im Fall $(1,0) = \Lambda_0 \gg \Lambda_1$. □

Die Menge aller Subdivisionsmatrizen, die einen dominanten Eigenwert $\Lambda_0 = (1,0)$ haben und zudem der Konsistenzbedingung (2.53) genügen, bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathcal{A}$.

2. Bedingungen für Normalenstetigkeit

Nachdem der dominante Eigenwert $\lambda_0 = 1$ die Konsistenz eines Subdivisionsalgorithmus sichert, werden wir nun Bedingungen für Normalenstetigkeit untersuchen. Die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen bestehen jeweils aus einer Regularitätsannahme und Bedingungen für die Struktur der Eigenwerte der Subdivisionsmatrix, wobei letztere in beiden Fällen identisch sind. Zur Formulierung der Regularitätsvoraussetzung der hinreichenden Bedingung führen wir den Begriff der charakteristischen Abbildung ein. Dieses Konzept wird sich auch noch in anderem Zusammenhang als geeignetes Hilfsmittel zur Analyse von Unterteilungsalgorithmen erweisen.

2.1. Das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen. Für lineare stationäre Algorithmen leiten wir nun explizite Formeln für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}}_m := \mathbf{x}_{m,u} \times \mathbf{x}_{m,v} \tag{3.36}$$

der Splineringe $\mathbf{x}_m$ her. Die Konsistenz der Subdivisionsmatrix setzen wir im Folgenden immer voraus, also $A \in \mathcal{A}$. Für die spätere Analyse erweist es sich dabei als notwendig, zwischen einer Reihe von Fällen zu unterscheiden.

Definition 3.4. *Die folgenden fünf Mengen bilden eine disjunkte Zerlegung der Menge $\mathcal{A}$ aller konsistenten Subdivisionsmatrizen:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &:= \{A : 1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|\}\\
\mathcal{A}_2 &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2|, \Lambda_1 \sim \Lambda_2\}\\
\mathcal{A}_3 &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|, \Lambda_1 \succ \Lambda_2\}\\
\mathcal{A}_4 &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|, \Lambda_1 \succ \Lambda_2 \sim \Lambda_3\}\\
\mathcal{A}_5 &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|, \Lambda_1 \succ \Lambda_2 \succ \Lambda_3\}\,.
\end{aligned}$$

In den beiden letzten Fällen sei dabei die Indizierung der Eigenwerte o.B.d.A. so gewählt, dass Λ_1 und Λ_2 bzw. Λ_1 und Λ_3 zum selben Jordanblock gehören. Für $s \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Teilmengen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^s &:= \{A \in \mathcal{A}_1 : \Lambda_2 \sim \cdots \sim \Lambda_{2+s} \succ \Lambda_{3+s}\}\\
\mathcal{A}_2^s &:= \{A \in \mathcal{A}_2 : \Lambda_2 \sim \cdots \sim \Lambda_{2+s} \succ \Lambda_{3+s}\}\\
\mathcal{A}_3^0 &:= \mathcal{A}_3\\
\mathcal{A}_4^s &:= \{A \in \mathcal{A}_4 : \Lambda_3 \sim \cdots \sim \Lambda_{3+s} \succ \Lambda_{4+s}\}\\
\mathcal{A}_5^s &:= \{A \in \mathcal{A}_5 : \Lambda_3 \sim \cdots \sim \Lambda_{3+s} \succ \Lambda_{4+s}\}
\end{aligned}$$

.

Setzen wir $\mathbf{b}_{p,q} := \mathbf{b}_p \times \mathbf{b}_q,\ p, q = 0, \dots, Q$, dann hat das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen der Splineringe (3.26) die Form

$$\bar{\mathbf{n}}_m = \sum_{p=1}^{Q-1} \sum_{q=p+1}^{Q} C_{p,q} \mathbf{b}_{p,q}\,. \tag{3.37}$$

Dabei enthält jeder Koeffizient $C_{p,q}$ einen Faktor vom Typ

$$J_{p,q}^{\alpha,\beta} := \det D_{\mathbf{u}}[\boldsymbol{\varphi}_p^\alpha, \boldsymbol{\varphi}_q^\beta] = \left(\boldsymbol{\varphi}_u \mathbf{v}_p^\alpha\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_v \mathbf{v}_q^\beta\right) - \left(\boldsymbol{\varphi}_v \mathbf{v}_p^\alpha\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_u \mathbf{v}_q^\beta\right), \tag{3.38}$$

der als Jacobi–Determinante eines zweidimensionalen Splinerings mit Kontrollpunkten $[\mathbf{v}_p^\alpha, \mathbf{v}_q^\beta]$ aufgefasst werden kann. Die Differenziation ist hier wieder segmentweise bezüglich der kontinuierlichen Variablen $(u, v) \in \omega_0$ zu verstehen. Wenn $\boldsymbol{\varphi}$ ein erzeugendes C^k-System ist, dann ist, wie man leicht nachrechnet, nach Bildung der Determinante die Glattheitsbedingung (2.42) bis zur Ordnung $k-1$ erfüllt; es gilt also $J_{p,q}^{\alpha,\beta} \in C^{k-1}(\Omega_0^n, \mathbb{R})$. Betrachten wir nun die verschiedenen Fälle:

2.1.1. *1. Fall:* $A \in \mathcal{A}_1$. Sei genauer $A \in \mathcal{A}_1^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall ist λ_1 ein einfacher reeller Eigenwert, $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \nu_1 = 0$ und es gilt für die Folge der Splineringe

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 + a_{|\lambda_1|}^0(m)\varrho_1^m \boldsymbol{\varphi}_1^0 \mathbf{b}_1 + a_{|\lambda_2|}^{\nu_2}(m)\left(\sum_{q=2}^{s+2} \varrho_q^{m-\nu_2} \boldsymbol{\varphi}_q^0 \mathbf{b}_q + o(1)\right). \tag{3.39}$$

Damit erhalten wir für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}}_m = a_{|\lambda_1|}^0(m) a_{|\lambda_2|}^{\nu_2}(m)\varrho_1^{\nu_2}\left(\sum_{q=2}^{s+2} J_{1,q}^{0,0}(\varrho_1\varrho_q)^{m-\nu_2}\,\mathbf{b}_{1,q} + o(1)\right). \tag{3.40}$$

2.1.2. *2. Fall:* $A \in \mathcal{A}_2$. Sei genauer $A \in \mathcal{A}_2^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall haben die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2+s}$ denselben Betrag und dieselbe Vielfachheit, $\nu_2 = \cdots = \nu_{2+s}$ und es gilt für die Folge der Splineringe

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 + a_{|\lambda_1|}^{\nu_1}(m)\left(\sum_{q=1}^{2+s} \varrho_q^{m-\nu_1} \boldsymbol{\varphi}_q^0 \mathbf{b}_q + o(1)\right). \tag{3.41}$$

Damit erhalten wir für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}}_m = \left(a_{|\lambda_1|}^{\nu_1}(m)\right)^2\left(\sum_{p=1}^{1+s}\sum_{q=p+1}^{2+s} J_{p,q}^{0,0}(\varrho_p\varrho_q)^{m-\nu_1}\mathbf{b}_{p,q} + o(1)\right). \tag{3.42}$$

2.1.3. *3. Fall:* $A \in \mathcal{A}_3$. Hier gibt es keine weiteren Fallunterscheidungen. $\lambda_1 = \lambda_2$ ist ein doppelter reeller Eigenwert mit der geometrischen Vielfachheit 1, also $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$ und es gilt für die Folge der Splineringe

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 + (a_{\lambda_1}^1(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a_{\lambda_1}^0(m)\boldsymbol{\varphi}_1^1)\mathbf{b}_1 + a_{\lambda_1}^0(m)\left(\boldsymbol{\varphi}_1^0\mathbf{b}_2 + o(1)\right). \tag{3.43}$$

Damit erhalten wir für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}} = \left(a_{\lambda_1}^0(m)\right)^2\left(J_{1,1}^{1,0}\mathbf{b}_{1,2} + o(1)\right). \tag{3.44}$$

2.1.4. *4. Fall:* $A \in \mathcal{A}_4$. Sei genauer $A \in \mathcal{A}_4^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Hier ist λ_1 reell und $\nu_1 \geq 1, \nu_2 = \cdots = \nu_{3+s} = \nu_1 - 1$. Nach Definition 3.4 wird angenommen, dass Λ_1 und Λ_2 zum selben Jordanblock gehören. Also ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mathbf{v}_1^0 = \mathbf{v}_2^0$. Damit gilt für die Folge der Splineringe

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 &+ (a_{\lambda_1}^{\nu_1}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a_{\lambda_1}^{\nu_2}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^1)\mathbf{b}_1 \\ &+ a_{\lambda_1}^{\nu_2}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0\mathbf{b}_2 + a_{|\lambda_1|}^{\nu_2}(m)\left(\sum_{q=3}^{3+s}\varrho_q^{m-\nu_2}\boldsymbol{\varphi}_q^0\mathbf{b}_q + o(1)\right), \end{aligned} \tag{3.45}$$

und wir erhalten für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}}_m = a_{|\lambda_1|}^{\nu_1}(m)a_{|\lambda_1|}^{\nu_2}(m)\varrho_1^{\nu_2}\left(\sum_{q=3}^{3+s}J_{1,q}^{0,0}(\varrho_1\varrho_q)^{m-\nu_2}\mathbf{b}_{1,q} + o(1)\right). \tag{3.46}$$

2.1.5. *5. Fall:* $A \in \mathcal{A}_5$. Sei genauer $A \in \mathcal{A}_5^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Hier ist λ_1 reell und $\nu_1 \geq 2, \nu_2 = \nu_1 - 1, \nu_3 = \cdots = \nu_{3+s} = \nu_1 - 2$. Per Konvention gehören Λ_1, Λ_2 und Λ_3 zum selben Jordanblock. Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ und $\mathbf{v}_1^0 = \mathbf{v}_2^0 = \mathbf{v}_3^0$, $\mathbf{v}_1^1 = \mathbf{v}_2^1$. Damit gilt für die Folge der Splineringe

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_0 &+ (a_{\lambda_1}^{\nu_1}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a_{\lambda_1}^{\nu_2}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^1 + a_{\lambda_1}^{\nu_3}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^2)\mathbf{b}_1 \\ &+ (a_{\lambda_1}^{\nu_2}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a_{\lambda_1}^{\nu_3}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^1)\mathbf{b}_2 \\ &+ a_{\lambda_1}^{\nu_3}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0\mathbf{b}_3 + a_{|\lambda_1|}^{\nu_3}(m)\left(\sum_{q=4}^{3+s}\varrho_q^{m-\nu_3}\boldsymbol{\varphi}_q^0\mathbf{b}_q + o(1)\right), \end{aligned} \tag{3.47}$$

und wir erhalten für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen

$$\bar{\mathbf{n}}_m = \left(a_{|\lambda_1|}^{\nu_2}(m)\right)^2\left(\frac{J_{1,1}^{0,1}\mathbf{b}_{2,1}}{\nu_1} + \sum_{q=4}^{3+s}J_{1,q}^{0,0}(\varrho_1\varrho_q)^{m-\nu_3}\mathbf{b}_{1,q} + o(1)\right). \tag{3.48}$$

Dabei wurde zum einen der Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{|\lambda_1|}^{\nu_1}(m)a_{|\lambda_1|}^{\nu_3}(m)}{\left(a_{|\lambda_1|}^{\nu_2}\right)^2} = 1 - 1/\nu_1 \tag{3.49}$$

verwendet. Zum anderen ist $\varrho_1^{\nu_1-\nu_3} = \varrho_1^2 = 1$, da λ_1 reell ist.

2.2. Notwendige Bedingungen. Ausgehend von den im vorangegangenen Unterabschnitt angegebenen Formeln für $\bar{\mathbf{n}}_m$ wollen wir nun notwendige Bedingungen für die Normalenstetigkeit von linearen stationären Subdivisionsflächen ableiten. Zunächst untersuchen wir dazu Eigenschaften der Subdivisionsmatrix. Die hierbei gewonnenen Resultate führen auf die Definition der charakteristischen Abbildung. Für diese wird schließlich ebenfalls eine notwendige Bedingung aufgestellt.

2.2.1. *Eine notwendige Bedingung für die Subdivisionsmatrix.* Zur Formulierung einer notwendigen Bedingung für die Subdivisionsmatrix werden wir eine, wenn auch sehr schwache, Regularitätsannahme heranziehen, um eine ausufernde Diskussion stark degenerierter Fälle zu vermeiden.

DEFINITION 3.5. *Eine konsistente Subdivisionsmatrix $A \in \mathcal{A}$ heißt* degeneriert, *wenn die Jordan–Transformationsmatrix V so gewählt werden kann, dass*

$$\begin{cases} J^{0,0}_{1,2} \equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \\ J^{0,0}_{1,3} \equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}_4 \\ J^{0,1}_{1,1} \equiv 0 \vee J^{0,0}_{1,4} \equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}_5\,. \end{cases} \tag{3.50}$$

Betrachten wir beispielsweise $A \in \mathcal{A}_2$, dann kann im degenerierten Fall V so gewählt werden, dass der Splinering $[\boldsymbol{\varphi}^0_1, \boldsymbol{\varphi}^0_2] = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}^0_1, \mathbf{v}^0_2]$ kein Inneres besitzt, also zu einer Kurve oder gar einem Punkt entartet ist. Notwendige Bedingungen für nichtdegenerierte Subdivisionsmatrizen geben die beiden folgenden Lemmata an.

LEMMA 3.6. *Wenn die Subdivisionsmatrix A nicht degeneriert ist, dann gilt für alle $0 \le p \le q \le s$*

$$\begin{cases} J^{0,0}_{1,2+q} \not\equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_1 \\ J^{0,0}_{1+p,2+q} \not\equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_2 \\ J^{0,0}_{1,3+q} \not\equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_4 \\ J^{0,0}_{1,4+q} \not\equiv 0 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_5\,. \end{cases} \tag{3.51}$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die Positionen äquivalenter Eigenwerte in der geordneten Folge (3.16) beliebig permutiert werden können. □

LEMMA 3.7. *Wenn die Subdivisionsmatrix A nicht degeneriert ist, dann ist für $s \ge 1$ entweder*

$$\begin{cases} \varrho_2 \ne \varrho_3 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_1 \cup \mathcal{A}^s_2 \\ \varrho_3 \ne \varrho_4 & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_4 \cup \mathcal{A}^s_5 \end{cases} \tag{3.52}$$

oder es sind die folgenden Paare von Jacobi–Determinanten linear unabhängig:

$$\begin{cases} J^{0,0}_{1,2}, J^{0,0}_{1,3} & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_1 \cup \mathcal{A}^s_2 \\ J^{0,0}_{1,3}, J^{0,0}_{1,4} & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_4 \\ J^{0,1}_{1,1}, J^{0,0}_{1,4} & \text{für } A \in \mathcal{A}^s_5\,. \end{cases} \tag{3.53}$$

BEWEIS. Betrachten wir den Fall $A \in \mathcal{A}^s_1$. Für $s \ge 1$ ist $\Lambda_2 \sim \Lambda_3$ und aus $\varrho_2 = \varrho_3$ folgt damit $\lambda_2 = \lambda_3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\mathbf{v}^0_2, \mathbf{v}^0_3$. Angenommen, die Jacobi–Determinanten $J^{0,0}_{1,2}, J^{0,0}_{1,3}$ seien linear abhängig, $a_2 J^{0,0}_{1,2} + a_3 J^{0,0}_{1,3} = 0$, $(a_2, a_3) \ne (0,0)$. Dann ist $\tilde{\mathbf{v}}^0_2 := a_2\mathbf{v}^0_2 + a_3\mathbf{v}^0_3$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3$ und kann anstelle von $\mathbf{v}^0_2$ zum Aufbau einer Transformationsmatrix $\tilde{V}$ verwendet werden. Die zugehörige Jacobi–Determinante ist

$$\tilde{J}^{0,0}_{1,2} = \det D\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}^0_1, \tilde{\mathbf{v}}^0_2] = \det D\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}_1, a_2\mathbf{v}^0_2 + a_3\mathbf{v}^0_3] = a_2 J^{0,0}_{1,2} + a_3 J^{0,0}_{1,3} \equiv 0 \tag{3.54}$$

im Widerspruch zur Annahme, dass A nicht degeneriert ist. Also ist entweder $\varrho_2 \neq \varrho_3$ oder $J^{0,0}_{1,2}, J^{0,0}_{1,3}$ sind linear unabhängig. Die Fälle $A \in \mathcal{A}^s_2 \cup \mathcal{A}^s_4$ verlaufen vollkommen analog. Für $A \in \mathcal{A}^s_5$, $s \geq 1$ und $\varrho_3 = \varrho_4$ ist $\lambda_3 = \lambda_4$. Da außerdem nach Konvention $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ zum selben Jordanblock gehören, ist $\lambda_1 = \lambda_4$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\mathbf{v}^0_1, \mathbf{v}^0_4$, und für den ersten Hauptvektor $\mathbf{v}^1_1$ zu $\mathbf{v}^0_1$ gilt $A\mathbf{v}^1_1 = \lambda_1\mathbf{v}^1_1 + \mathbf{v}^0_1$. Nehmen wir wieder an, dass $J^{0,1}_{1,1}, J^{0,0}_{1,4}$ linear abhängig seien, $a_1 J^{0,1}_{1,1} + a_4 J^{0,0}_{1,4} = 0$, $(a_1, a_4) \neq (0,0)$. Da nach Voraussetzung $J^{0,0}_{1,4} \not\equiv 0$ ist, setzen wir o.B.d.A. $a_1 = 1$. Nun kann $\tilde{\mathbf{v}}^1_1 := \mathbf{v}^1_1 + a_4\mathbf{v}^0_4$ ebenfalls als erster Hauptvektor zu $\mathbf{v}^0_1$ gewählt werden, denn

$$A\tilde{\mathbf{v}}^1_1 = A(\mathbf{v}^1_1 + a_4\mathbf{v}^0_4) = \lambda_1(\mathbf{v}^1_1 + a_4\mathbf{v}^0_4) + \mathbf{v}^0_1 = \lambda_1\tilde{\mathbf{v}}^1_1 + \mathbf{v}^0_1\,. \tag{3.55}$$

Der Widerspruch zur Annahme folgt wie oben,

$$\tilde{J}^{0,1}_{1,1} = \det D\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}^0_1, \tilde{\mathbf{v}}^1_1] = \det D\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}^0_1, \mathbf{v}^1_1 + a_4\mathbf{v}^0_4] = J^{0,1}_{1,1} + a_4 J^{0,0}_{1,4} \equiv 0\,. \tag{3.56}$$

□

Die Formeln für die Folge $\bar{\mathbf{n}}_m$ der Kreuzprodukte der partiellen Ableitungen der Splineringe sind alle vom Typ

$$\bar{\mathbf{n}}_m = a(m)\left(\sum_{p=1}^{Q-1}\sum_{q=p+1}^{Q}(\varrho_p\varrho_q)^m J_{p,q}\mathbf{b}_{p,q} + o(1)\right)\,. \tag{3.57}$$

Dabei ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine positive Folge und die $J_{p,q} \in C^0(\Omega^n_0, \mathbb{C})$ sind Splineringe, die entweder identisch Null sind oder aus den jeweiligen Funktionen $J^{\alpha,\beta}_{p,q}$ durch Skalierung hervorgehen. Ferner treten in dieser Gleichung alle komplexen Größen wieder stets als konjugiert komplexe Paare auf. Es gilt also für konjugierte Indizes $p, \overline{p}$ und $q, \overline{q}$

$$\overline{\mathbf{b}}_{p,q} = \mathbf{b}_{\overline{p},\overline{q}}\,, \quad \overline{\varrho}_p = \varrho_{\overline{p}}\,, \quad \overline{\varrho}_q = \varrho_{\overline{q}}\,, \quad \overline{J}_{p,q} = J_{\overline{p},\overline{q}}\,. \tag{3.58}$$

Die Teilmenge von $\mathcal{B}$, die auf normalenstetige Subdivisionsflächen führt, bezeichnen wir mit $\mathcal{B}^*$. Man beachte, dass im Falle eines normalenstetigen Algorithmus die Menge $\mathcal{B}^*$ dicht in $\mathcal{B}$ liegt. Mit diesen Bezeichnungen können wir die beiden folgenden Hilfssätze formulieren:

Lemma 3.8. *Wenn ein normalenstetiger linearer stationärer Subdivisionsalgorithmus eine Folge $\bar{\mathbf{n}}_m$ der Form (3.57) erzeugt, dann ist $\varrho_p\varrho_q = 1$, falls $J_{p,q} \not\equiv 0$.*

Beweis. Sei $J_{p,q}(\underline{\mathbf{u}}) \neq 0$, dann wählen wir $\mathbf{b}^0 = [\mathbf{b}^0_0, \ldots, \mathbf{b}^0_Q] \in \mathcal{B}$ gemäß

$$\mathbf{b}^0_r := \begin{cases} \mathbf{e}_1/J_{p,q}(\underline{\mathbf{u}}) & \text{für } r = p \\ \mathbf{e}_1/\overline{J}_{p,q}(\underline{\mathbf{u}}) & \text{für } r = \overline{p} \\ \mathbf{e}_2 & \text{für } r \in \{q, \overline{q}\} \\ \mathbf{0} & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{3.59}$$

Da $\mathcal{B}^*$ dicht in $\mathcal{B}$ liegt, gibt es für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ ein $\mathbf{b}^\varepsilon \in \mathcal{B}^*$ mit $\|\mathbf{b}^\varepsilon - \mathbf{b}^0\| < \varepsilon$. Mit $\mathbf{b}^0_p \times \mathbf{b}^0_{\overline{p}} = \mathbf{b}^0_q \times \mathbf{b}^0_{\overline{q}} = \mathbf{0}$ ergibt sich für $1 \le p' < q' \le Q$

$$\mathbf{b}^\varepsilon_{p'} \times \mathbf{b}^\varepsilon_{q'} = \begin{cases} \mathbf{e}^3/J_{p,q}(\underline{\mathbf{u}}) + O(\varepsilon) & \text{für } (p',q') = (p,q) \\ \mathbf{e}^3/\overline{J}_{p,q}(\underline{\mathbf{u}}) + O(\varepsilon) & \text{für } (p',q') = (\overline{p},\overline{q}) \\ O(\varepsilon) & \text{sonst}\,, \end{cases} \tag{3.60}$$

und wir erhalten für die Folge der Kreuzprodukte

$$\bar{\mathbf{n}}^\varepsilon_m(\underline{u}) = 2a(m)\big(\mathrm{Re}(\varrho_p\varrho_q)^m\mathbf{e}_3 + O(\varepsilon)\big) + o\big(a(m)\big)\,. \tag{3.61}$$

Sei $t := \arg(\varrho_p\varrho_q) \in [0, 2\pi)$, dann ist $\cos(mt) = \mathrm{Re}(\varrho_p\varrho_q)^m$. Wenn $t \neq 0$, dann existieren zwei Teilfolgen $m_1(\mu), m_2(\mu)$ mit

$$\lim_{\mu\to\infty} \cos\big(m_1(\mu)t\big) = c_1\,, \quad c_1 < 0 \tag{3.62}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \cos\big(m_2(\mu)t\big) = c_2\,, \quad c_2 > 0\,. \tag{3.63}$$

Damit ist für $\sigma \in \{1,2\}$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\bar{\mathbf{n}}^\varepsilon_{m_\sigma(\mu)}(\underline{u})}{\|\bar{\mathbf{n}}^\varepsilon_{m_\sigma(\mu)}(\underline{u})\|} = (-1)^\sigma\mathbf{e}_3 + O(\varepsilon)\,. \tag{3.64}$$

Dies widerspricht für hinreichend kleines ε der Konvergenz der Normalenvektoren gegen einen eindeutigen Grenzwert $\mathbf{n}(\mathbf{0})$; folglich gilt $t = 0$ und $\varrho_p\varrho_q = 1$. □

Lemma 3.9. *Wenn ein normalenstetiger linearer stationärer Subdivisionsalgorithmus eine Folge $\{\bar{\mathbf{n}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ der Form (3.57) erzeugt und wenn $\varrho_p \in \{-1, 1\}$, dann sind für alle $p < q < r \le Q$ die Funktionen $J_{p,q}$, $J_{p,r}$ linear abhängig.*

Beweis. Für alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^*$ gibt es eine (3×2)-Matrix $T[\mathbf{b}]$, deren Spalten zusammen mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{0})$ der inneren Ecke eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ bilden, also $\mathbf{n}(\mathbf{0})T[\mathbf{b}] = \mathbf{0}, T[\mathbf{b}]^{\mathrm{t}}T[\mathbf{b}] = \mathrm{Id}$. Dafür gilt, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\mathbf{n}}_m T[\mathbf{b}]/a(m) = 0\,. \tag{3.65}$$

Da nach Lemma 3.8 für alle $1 \le p' < q' \le Q$ entweder $J_{p',q'} \equiv 0$ oder $\varrho_{p'}\varrho_{q'} = 1$ ist, impliziert dies

$$\sum_{p'=1}^{Q-1}\sum_{q'=p'+1}^{Q} J_{p',q'}\mathbf{b}_{p',q'}T[\mathbf{b}] = \mathbf{0}\,. \tag{3.66}$$

Ist nun $J_{p,q} \equiv 0$ oder $J_{p,r} \equiv 0$, dann ist die lineare Abhängigkeit gegeben. Anderenfalls gilt nach Lemma 3.8, dass mit ϱ_p auch ϱ_q und ϱ_r reell sind, also $\varrho_p\varrho_q = \varrho_p\varrho_q = 1$ und $p = \overline{p}, q = \overline{q}, r = \overline{r}$. Definieren wir den Vektor

$\mathbf{b}^0 = [\mathbf{b}_0^0, \dots, \mathbf{b}_Q^0]$ gemäß

$$\mathbf{b}_{p'}^0 := \begin{cases} \mathbf{e}_1 & \text{für } p' = p \\ \mathbf{e}_2 & \text{für } p' = q \\ \mathbf{e}_3 & \text{für } p' = r \\ \mathbf{0} & \text{sonst}, \end{cases} \tag{3.67}$$

dann gibt es eine Folge $\{\mathbf{b}^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}^*$, die gegen $\mathbf{b}^0$ konvergiert. Die Matrizenfolge $\{T[\mathbf{b}^\mu]\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert T_0. Dieselbe Teilfolge in (3.66) eingesetzt liefert im Grenzwert

$$J_{p,q}\mathbf{e}_3 T_0 - J_{p,r}\mathbf{e}_2 T_0 + J_{q,r}\mathbf{e}_1 T_0 = \mathbf{0}\,. \tag{3.68}$$

Sei $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbf{0}$ senkrecht zur ersten Spalte von T_0, also $\mathbf{e}_1 T_0 \mathbf{d}^{\mathrm{t}} = 0$, dann gilt

$$J_{p,q}\mathbf{e}_3 T_0 \mathbf{d}^{\mathrm{t}} - J_{p,r}\mathbf{e}_2 T_0 \mathbf{d}^{\mathrm{t}} = 0\,. \tag{3.69}$$

Die Spalten von T_0 sind aus Stetigkeitsgründen ebenfalls orthonormiert, und insbesondere hat T_0 Rang 2. Deshalb können $\mathbf{e}_3 T_0 \mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ und $\mathbf{e}_2 T_0 \mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ nicht gleichzeitig verschwinden, was die lineare Abhängigkeit von $J_{p,q}$ und $J_{p,r}$ beweist. ☐

Nun können wir das Hauptresultat dieses Unterabschnitts formulieren:

Satz 3.10. *Sei*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^* &:= \{A : 1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0, \lambda_1\lambda_2 > 0, \Lambda_2 \succ \Lambda_3\} \\ \mathcal{A}_2^* &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > 0, \lambda_1 = \overline{\lambda}_2, \Lambda_1 \sim \Lambda_2 \succ \Lambda_3\} \\ \mathcal{A}_3^* &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|, \Lambda_1 \succ \Lambda_2\} \\ \mathcal{A}_4^* &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_3| > 0, \lambda_1 = \lambda_3, \Lambda_1 \succ \Lambda_2 \sim \Lambda_3 \succ \Lambda_4\} \\ \mathcal{A}_5^* &:= \{A : 1 > |\lambda_1| = |\lambda_3| > 0, \Lambda_1 \succ \Lambda_2 \succ \Lambda_3 \succ \Lambda_4\}\,. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Wenn die Subdivisionsmatrix A eines normalenstetigen Algorithmus nicht degeneriert ist, dann liegt sie in einer dieser fünf Mengen, $A \in \bigcup_{\mu=1}^5 \mathcal{A}_\mu^*$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{A}_\mu^* \subset \mathcal{A}_\mu, \mu = 1, \dots, 5$. Folglich genügt es, die fünf Fälle $A \in \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5$ zu untersuchen und zu zeigen, dass jeweils nur Matrizen vom angegebenen Typ in Betracht kommen.

1. Fall: $A \in \mathcal{A}_1$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{A}_1^0$ und $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Zunächst sieht man leicht, dass $\lambda_2 \neq 0$ gelten muss. Anderenfalls wäre nämlich $\lambda_2 = \dots = \lambda_Q = 0$ und $\bar{\mathbf{n}}_m \equiv 0$ für hinreichend großes m. Die Menge der singulären Parameter besäße somit stets Häufungspunkte. Für $\lambda_2 \neq 0$ ist der Vorfaktor $a(m) := a^0_{|\lambda_1|}(m) a^{\nu_2}_{|\lambda_2|}(m)$ in (3.40) also positiv, so dass Lemma 3.9 anwendbar ist. Betrachten wir nun Gleichung (3.40). Da λ_1 einfach und damit reell ist, ist $\varrho_1 = \pm 1$. Nach Lemma 3.6 und Lemma 3.8 ist somit $\varrho_1 = \dots = \varrho_{s+2}$ und insbesondere $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Nehmen wir nun an, dass $s \geq 1$, dann sind nach Lemma 3.7 die Funktionen $J^{0,0}_{1,2}, J^{0,0}_{1,3}$ linear unabhängig. Dies widerspricht aber Lemma 3.9, also ist $s = 0$.

2. Fall: $A \in \mathcal{A}_2$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{A}_2^0$ und $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 \neq 0$. Wie in Fall 1 führt $\lambda_1 = 0$ notwendig auf singuläre Parametrisierungen für fast alle Splineringe und kann somit ausgeschlossen werden. Betrachten wir Gleichung (3.40), dann folgt aus 3.6 und Lemma 3.8, dass $\varrho_p \varrho_q = 1$ für alle $1 \leq p < q \leq s$. Ein komplexer Eigenwert $\lambda_2 \notin \mathbb{R}$ impliziert, dass es neben dem konjugiert komplexen Eigenwert $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$ keine weiteren Eigenwerte mehr geben kann. Es ist dann also $s = 2$ wie behauptet. Somit bleibt der Fall $\lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash 0$ zu diskutieren. Es ist dann $\varrho_1 = \cdots = \varrho_{2+s} = \pm 1$ und insbesondere $\lambda_2 = \lambda_3$. Nehmen wir nun an, dass $s \geq 1$, dann sind nach Lemma 3.7 die Funktionen $J^{0,0}_{1,2}, J^{0,0}_{1,3}$ linear unabhängig. Dies widerspricht aber Lemma 3.9, also ist $s = 0$.

3. Fall: $A \in \mathcal{A}_3$. Hier ist nichts zu zeigen, da $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3^*$.

4. Fall: $A \in \mathcal{A}_4$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{A}_4^0$ und $\lambda_1 = \lambda_3 \neq 0$. Wie in Fall 1 führt $\lambda_1 = 0$ notwendig auf singuläre Parametrisierungen für fast alle Splineringe und kann somit ausgeschlossen werden. Betrachten wir Gleichung (3.46). Da λ_1 reell ist, ist $\varrho_1 = \pm 1$. Nach Lemma 3.6 und Lemma 3.8 ist somit $\varrho_1 = \cdots = \varrho_{3+s}$ und insbesondere $\lambda_1 = \lambda_3$. Nehmen wir nun an, dass $s \geq 1$, dann sind nach Lemma 3.7 die Funktionen $J^{0,0}_{1,3}, J^{0,0}_{1,4}$ linear unabhängig. Dies widerspricht aber Lemma 3.9, also ist $s = 0$.

5. Fall: $A \in \mathcal{A}_5$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{A}_5^0$ und $\lambda_1 \neq 0$. Wie in Fall 1 führt $\lambda_1 = 0$ notwendig auf singuläre Parametrisierungen für fast alle Splineringe und kann somit ausgeschlossen werden. Betrachten wir Gleichung (3.48). Da λ_1 reell ist, ist $\varrho_1 = \pm 1$. Nach Lemma 3.6 und Lemma 3.8 ist somit $\varrho_1 = \cdots = \varrho_{4+s}$. Nehmen wir nun an, dass $s \geq 1$, dann sind nach Lemma 3.7 die Funktionen $J^{0,1}_{1,1}, J^{0,0}_{1,4}$ linear unabhängig. Dies widerspricht aber Lemma 3.9, also ist $s = 0$. □

2.2.2. *Die charakteristische Abbildung.* Für Subdivisionsmatrizen von dem in Satz 3.10 angegebenen Typ hat das skalierte Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen der Splineringe nun die einfache Form

$$\bar{\mathbf{n}}_m = a'(m)\left(J^{0,\beta}_{1,q}\mathbf{b}_{1,q} + o(1)\right). \tag{3.71}$$

Dabei ist $\{a'(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ohne Vorzeichenwechsel, die weiter unten genauer definiert wird. Wie bereits erwähnt, ist $J^{0,\beta}_{1,q}$ die Jacobi-Determinante der Abbildung $\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_q^\beta] = [\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_q^\beta]$. Diese Abbildung spielt im Folgenden eine zentrale Rolle.

Definition 3.11. *Sei $A \in \mathcal{A}_\mu^*$ für ein $\mu \in \{1, \ldots, 5\}$, dann setzen wir*

$$(q_\mu, \beta_\mu) := \begin{cases} (2,0) & \textit{für } \mu \in \{1,2\} \\ (1,1) & \textit{für } \mu \in \{3,5\} \\ (3,0) & \textit{für } \mu = 4\,. \end{cases} \tag{3.72}$$

Weiterhin sei die Transformationsmatrix V im Fall $\mu = 2$ so gewählt, dass die Eigenvektoren $\mathbf{v}_1^0$ und $\mathbf{v}_2^0$ konjugiert komplex sind. Die charakteristische Abbildung *von A zum erzeugenden System $\boldsymbol{\varphi}$ ist der ebene reelle Splinering*

$$\Psi := [\Psi_1, \Psi_2] := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}[\operatorname{Re}\mathbf{v}_1^0, \operatorname{Im}\mathbf{v}_1^0] & \textit{falls } A \in \mathcal{A}_2^* \\ \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_{q_\mu}^{\beta_\mu}] & \textit{sonst}, \end{cases} \tag{3.73}$$

siehe Abbildung 3.1. Die charakteristische Determinante *ist die Jacobi–Determi-*

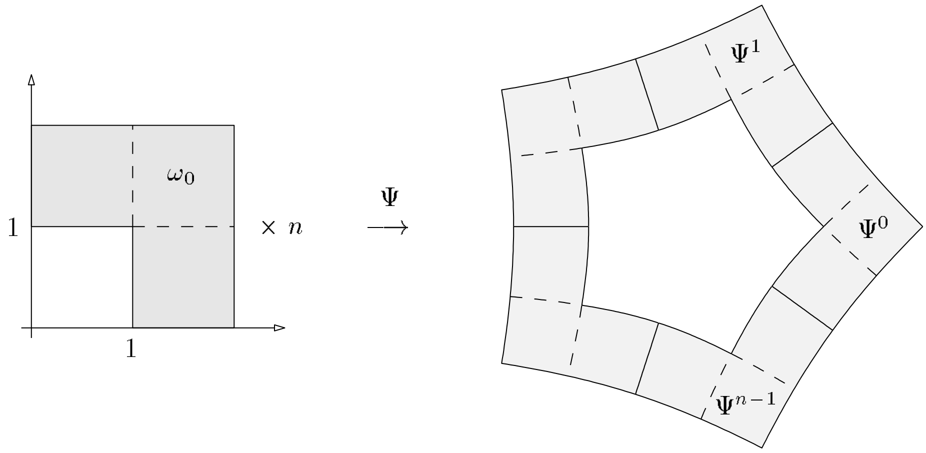


ABBILDUNG 3.1. Schematische Darstellung der charakteristischen Abbildung für $n = 5$.

nante der charakteristischen Abbildung,

$$J := \det D_{\mathbf{u}}\Psi = (\boldsymbol{\varphi}_u \mathbf{v}_1^0)(\boldsymbol{\varphi}_v \mathbf{v}_{q_\mu}^{\beta_\mu}) - (\boldsymbol{\varphi}_v \mathbf{v}_1^0)(\boldsymbol{\varphi}_u \mathbf{v}_{q_\mu}^{\beta_\mu})\,. \tag{3.74}$$

Ψ *heißt* regulär, *wenn* $|J| > 0$. *Die Einschränkung von* Ψ *auf die Zelle* $\omega_0 \times j, j \in \mathbb{Z}_n$, *bildet das* Segment Ψ^j; *analog ist* $J^j = \det D_{\mathbf{u}}\Psi^j$.

Zunächst fällt bei der Definition der charakteristischen Abbildung auf, dass sie von der speziellen Wahl von V abhängt. Man kann jedoch leicht zeigen, dass für zwei beliebige Transformationsmatrizen V, V' die zugehörigen charakteristischen Abbildungen Ψ, Ψ' linear äquivalent sind, das heißt, dass sie durch eine reguläre lineare Abbildung T ineinander übergehen, $\Psi = \Psi' T$. Die einzigen Eigenschaften der charakteristischen Abbildung, die in diesem Kontext verwendet werden, sind deren Regularität und Injektivität. Diese sind aber invariant unter regulären linearen Transformationen, und somit stellt es keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, wenn wir im Folgenden stets einen einzelnen Repräsentanten der Äquivalenzklasse der charakteristischen Abbildungen betrachten. Die Forderung, dass im Fall $A \in \mathcal{A}_2^*$ auch im Fall eines doppelten reellen Eigenwerts $\lambda_1 = \lambda_2$ die zugehörigen Eigenvektoren als konjugiert komplex angenommen werden, ist eine rein technische Konvention, die im Weiteren die Zahl der notwendigen Fallunterscheidungen reduziert.

Mit Hilfe der charakteristischen Abbildung lässt sich die skalierte Folge $\check{\mathbf{n}}_m$ folgendermaßen darstellen:

Lemma 3.12. *Sei $A \in \bigcup_{\mu=1}^5 \mathcal{A}_\mu^*$ und die Folge $\{a'(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$a'(m) := \begin{cases} a^0_{|\lambda_1|}(m) a^{\nu_2}_{|\lambda_2|}(m) \varrho_1^{\nu_2} & \text{für } \mu = 1 \\ \left(a^{\nu_1}_{|\lambda_1|}(m)\right)^2 & \text{für } \mu = 2 \\ -\left(a^0_{\lambda_1}(m)\right)^2 & \text{für } \mu = 3 \\ a^{\nu_1}_{|\lambda_1|}(m) a^{\nu_2}_{|\lambda_1|}(m) \varrho_1^{\nu_2} & \text{für } \mu = 4 \\ -\left(a^{\nu_2}_{|\lambda_1|}(m)\right)^2/\nu_1 & \text{für } \mu = 5\,. \end{cases} \tag{3.75}$$

Ferner sei

$$\mathbf{b}^* := \begin{cases} 2\,\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_{1,2} & \text{für } A \in \mathcal{A}_2^* \\ \mathbf{b}_{1,3} & \text{für } A \in \mathcal{A}_4^* \\ \mathbf{b}_{1,2} & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{3.76}$$

Dann hat die Folge $\check{\mathbf{n}}_m := \bar{\mathbf{n}}_m / a'(m)$ die Form

$$\check{\mathbf{n}}_m = J\mathbf{b}^* + o(1)\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{3.77}$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den komplexen Fall $A \in \mathcal{A}_2^*, \lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Hier ist $\mathbf{b}_1 = \overline{\mathbf{b}}_2 =: \mathbf{b}_r + i\mathbf{b}_i$ und, wie man leicht nachrechnet,

$$J_{1,2}^{0,0} = -2iJ\,, \quad \mathbf{b}_{1,2} = -2i(\mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_i) = i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_{1,2} = i\mathbf{b}^*/2\,. \tag{3.78}$$

Aus (3.42) folgt damit

$$\check{\mathbf{n}}_m = (-2iJ)(i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_{1,2})/2 + o(1) = J\,\mathrm{Im}\,\mathbf{b}^* + o(1)\,. \tag{3.79}$$

In den übrigen Fällen gilt $J = J_{1,q_\mu}^{0,\beta_\mu}$, womit die Behauptung jeweils unmittelbar aus (3.40), (3.42), (3.44), (3.46) und (3.48) folgt. □

2.2.3. *Eine notwendige Bedingung für die charakteristische Abbildung.* Offensichtlich besitzt die Folge a' in keinem der angegebenen Fälle Vorzeichenwechsel, da $a^\nu_{|\lambda|}(m) > 0$ für $\lambda \neq 0, m \in \mathbb{N}$. Damit sind $\bar{\mathbf{n}}_m$ und $\check{\mathbf{n}}_m$ stets gleich oder stets entgegengesetzt orientiert, das heißt, es gibt ein $\sigma \in \{-1, 1\}$ mit

$$\frac{\bar{\mathbf{n}}_m}{\|\bar{\mathbf{n}}_m\|} = \sigma \frac{\check{\mathbf{n}}_m}{\|\check{\mathbf{n}}_m\|}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{3.80}$$

Folglich liegt Normalenstetigkeit im Grenzpunkt $\mathbf{m}$ genau dann vor, wenn die Folge $\check{\mathbf{n}}_m / \|\check{\mathbf{n}}_m\|$ konvergiert, wenn also für jede Folge $\{\underline{\mathbf{u}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in Ω_0^n ein von der speziellen Wahl der Folge unabhängiger Grenzwert

$$\check{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) := \sigma\mathbf{n}(\mathbf{0}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\check{\mathbf{n}}_m(\underline{\mathbf{u}}_m)}{\|\check{\mathbf{n}}_m(\underline{\mathbf{u}}_m)\|} \tag{3.81}$$

existiert. Mit dieser Charakterisierung können wir eine weitere notwendige Bedingung formulieren.

Satz 3.13. *Die charakteristische Determinante J eines normalenstetigen Subdivisionsalgorithmus besitzt keine Vorzeichenwechsel.*

Beweis. Nehmen wir an, es sei $J(\underline{\mathbf{u}}_1) < 0$ und $J(\underline{\mathbf{u}}_2) > 0$. Dann gilt für $\mathbf{b}^* \neq \mathbf{0}$ und $\sigma \in \{1, 2\}$

$$\frac{\check{\mathbf{n}}_m(\underline{\mathbf{u}}_\sigma)}{\|\check{\mathbf{n}}_m(\underline{\mathbf{u}}_\sigma)\|} = \frac{J(\underline{\mathbf{u}}_\sigma)\mathbf{b}^* + o(1)}{\|J(\underline{\mathbf{u}}_\sigma)\mathbf{b}^* + o(1)\|} = (-1)^\sigma \frac{\mathbf{b}^*}{\|\mathbf{b}^*\|} + o(1)\,. \tag{3.82}$$

Die Konvergenz gegen einen eindeutigen Grenzwert ist also nicht gegeben. Da $\mathbf{b}^* \neq \mathbf{0}$ für fast alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, folgt die Behauptung. □

2.3. Eine hinreichende Bedingung. Nach den vorangegangenen Überlegungen lässt sich nun sehr einfach eine hinreichende Bedingung für Normalenstetigkeit angeben.

Satz 3.14. *Sei $A \in \bigcup_{\mu=1}^5 \mathcal{A}_\mu^*$ eine Subdivisionsmatrix und Ψ die charakteristische Abbildung von A zum erzeugenden System $\boldsymbol{\varphi}$. Wenn Ψ regulär ist, dann ist der Subdivisionsalgorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi})$ normalenstetig.*

Beweis. Da das Definitionsgebiet Ω_0^n kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $|J| > \varepsilon$. Ferner konvergiert der Ordnungsterm $o(1)$ in (3.77) gleichmäßig gegen 0. Für $\mathbf{b}^* \neq \mathbf{0}$ impliziert dies $\|J\mathbf{b}^* + o(1)\|^{-1} = |J|^{-1}\|\mathbf{b}^*\|^{-1} + o(1)$ und damit

$$\frac{\check{\mathbf{n}}_m}{\|\check{\mathbf{n}}_m\|} = \frac{J\mathbf{b}^* + o(1)}{\|J\mathbf{b}^* + o(1)\|} = \operatorname{sign}(J)\frac{\mathbf{b}^*}{\|\mathbf{b}^*\|} + o(1)\,. \tag{3.83}$$

Da J stetig ist und nach Voraussetzung keine Nullstelle besitzt, ist das Vorzeichen $\operatorname{sign}(J)$ konstant und damit

$$\mathbf{n}(\mathbf{0}) = \operatorname{sign}(J)\frac{\mathbf{b}^*}{\|\mathbf{b}^*\|} \tag{3.84}$$

der gesuchte Grenzwert. Außerdem ist $\mathbf{b}^* \neq \mathbf{0}$ für fast alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, womit die Normalenstetigkeit bewiesen ist. □

3. Bedingungen für Regularität

Wir suchen nun notwendige und hinreichende Bedingungen für reguläre Subdivisionsalgorithmen. Hierbei spielt die Injektivität der charakteristischen Abbildung eine zentrale Rolle.

3.1. Projektion und Skalierung der Splineringe. Wir betrachten wieder die Folge $\{\mathbf{x}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ der Splineringe einer normalenstetigen Subdivisionsfläche für die Fälle $A \in \bigcup_{\mu=1}^5 \mathcal{A}_\mu^*$ und bezeichnen die Projektion der Splineringe in die Tangentialebene im Grenzpunkt $\mathbf{m} = \mathbf{b}_0$ mit

$$\boldsymbol{\xi}_m := [\xi_m, \eta_m] := \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}_m\,. \tag{3.85}$$

Wir werden nun zeigen, dass die projizierten Splineringe für fast alle Startvektoren $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ so linear transformiert werden können, dass eine Folge entsteht, die gegen die charakteristische Abbildung konvergiert,

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m := \boldsymbol{\xi}_m T[\mathbf{b}]^{-1}\Gamma_m^{-1} = \Psi + o(1)\,. \tag{3.86}$$

Dabei ist Γ_m eine Folge invertierbarer (2×2)-Matrizen und $T[\mathbf{b}]$ eine (2×2)-Matrix, die für fast alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ invertierbar ist.

1. Fall: $A \in \mathcal{A}_1^*$. Wir setzen

$$T[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \Pi[\mathbf{0}](\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1) \\ \Pi[\mathbf{0}](\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_2) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} a^0_{\lambda_1}(m) & 0 \\ 0 & a^{\nu_2}_{\lambda_2}(m) \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

Für $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, also für fast alle $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, wird die Tangentialebene im Grenzpunkt von den Punkten $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_2$ aufgespannt. Folglich sind dann $\Pi[\mathbf{0}](\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1)$ und $\Pi[\mathbf{0}](\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_2)$ linear unabhängig. Um einfachere Darstellungen zu erhalten, wählen wir o.B.d.A. $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ als den Ursprung des Koordinatensystems in $\mathbb{R}^3$ und können damit die Vektoren $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1$, $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2$ als Basis zur Darstellung von $\boldsymbol{\xi}_m$ verwenden. Dieser Gedankengang wiederholt sich vollkommen analog in allen weiteren Fällen und wird deshalb nur hier explizit ausgeführt. Mit $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_2^0]$ erhalten wir aus (3.39)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_m &= a^0_{\lambda_1}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + a^{\nu_2}_{\lambda_2}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_2^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 \\ &= \big(\Psi + o(1)\big)\Gamma_m T[\mathbf{b}]. \end{aligned} \tag{3.88}$$

2. Fall: $A \in \mathcal{A}_2^*$. Wir setzen $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ und

$$T[\mathbf{b}] := \begin{bmatrix} \Pi[\mathbf{0}](\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \\ \Pi[\mathbf{0}](i\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m) & \operatorname{Im} a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m) \\ -\operatorname{Im} a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m) & \operatorname{Re} a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m) \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

und erhalten aus (3.41)

$$\boldsymbol{\xi}_m = a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + a^{\nu_2}_{\lambda_2}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_2^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2\,. \tag{3.90}$$

Beachtet man, dass die beiden Summanden konjugiert komplex sind, dann erhält man mittels einiger elementarer Umformungen mit $\Psi = [\operatorname{Re}\boldsymbol{\varphi}_1^0, \operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}_1^0]$

$$\boldsymbol{\xi}_m = \big(\Psi + o(1)\big)\Gamma_m T[\mathbf{b}]. \tag{3.91}$$

3. Fall: $A \in \mathcal{A}_3^*$. Wir setzen $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ und

$$T[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 \\ \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} a^1_{\lambda_1}(m) & a^0_{\lambda_1}(m) \\ 0 & a^0_{\lambda_1}(m) \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

und erhalten mit $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_1^1]$ aus (3.43)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_m &= \big(a^1_{\lambda_1}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a^0_{\lambda_1}(m)(\boldsymbol{\varphi}_1^1 + o(1))\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + a^0_{\lambda_1}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^0 o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 \\ &= \big(\Psi + o(1)\big)\Gamma_m T[\mathbf{b}]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

4. Fall: $A \in \mathcal{A}_4^*$. Mit $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ und der Zerlegung $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 = \alpha\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + \beta\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_3$ setzen wir

$$T[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 \\ \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m) & \beta a^{\nu_2}_{\lambda_1}(m) \\ 0 & a^{\nu_2}_{\lambda_1}(m) \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

und erhalten mit $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_3^0]$ aus (3.45)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_m &= a^{\nu_1}_{\lambda_1}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + a^{\nu_2}_{|\lambda_1|}(m)\big(\beta\boldsymbol{\varphi}_1^0 + \boldsymbol{\varphi}_3^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_3 \\ &= \big(\Psi + o(1)\big)\Gamma_m T[\mathbf{b}]. \end{aligned} \tag{3.95}$$

5. Fall: $A \in \mathcal{A}_5^*$. Mit $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ und der Zerlegung $\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_3 = \alpha\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 + \beta\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2$ setzen wir

$$T[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 \\ \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} a_{\lambda_1}^{\nu_1}(m) & a_{\lambda_1}^{\nu_2}(m) + \beta a_{\lambda_1}^{\nu_3}(m) \\ 0 & a_{\lambda_1}^{\nu_3}(m) \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

und erhalten mit $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_1^1]$ aus (3.47)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_m &= a_{\lambda_1}^{\nu_1}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^0 + o(1)\big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_1 \\ &\quad + \Big(a_{|\lambda_1|}^{\nu_2}(m)\boldsymbol{\varphi}_1^0 + a_{|\lambda_1|}^{\nu_3}(m)\big(\boldsymbol{\varphi}_1^1 + \beta\boldsymbol{\varphi}_1^0 + o(1)\big)\Big)\Pi[\mathbf{0}]\mathbf{b}_2 \\ &= \big(\Psi + o(1)\big)\Gamma_m T[\mathbf{b}]\,. \end{aligned} \tag{3.97}$$

3.2. Notwendige und hinreichende Bedingungen. Der folgende Hilfssatz ermöglicht es, Bedingungen für die Regularität eines Subdivisionsalgorithmus aus Eigenschaften der charakteristischen Abbildung herzuleiten.

LEMMA 3.15. *Eine normalenstetige Subdivisionsfläche* $\mathbf{x} \in C^1(\Omega^n, R^3)$ *ist genau dann regulär in* $\mathbf{0}$, *wenn fast alle, das heißt alle bis auf endlich viele, Projektionen* $\boldsymbol{\xi}_m := \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}_m$ *injektiv sind.*

BEWEIS. Der normalenstetige Spline $\mathbf{x}$ ist per Definition genau dann regulär in $\mathbf{0}$, wenn die Projektion $\boldsymbol{\xi} := \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}$ in einer Umgebung des Ursprungs injektiv ist.

Die eine Aussage, dass nämlich aus der lokalen Injektivität von $\boldsymbol{\xi}$ die Injektivität fast aller Projektionen $\boldsymbol{\xi}_m$ folgt, ist trivial.

Nehmen wir umgekehrt an, dass $\boldsymbol{\xi}_m$ injektiv sei für alle $m \geq m_1$. Aufgrund der Normalenstetigkeit $\lim_{m\to\infty} \mathbf{n}_m = \mathbf{n}(\mathbf{0})$ gibt es ein $m_2 \geq m_1$, so dass für alle $m \geq m_2$

$$\det D_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}_m = \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{n}(\mathbf{0})\rangle > 0\,. \tag{3.98}$$

Also ist $\boldsymbol{\xi}_m$ regulär parametrisiert für $m \geq m_2$. Sei τ_m die äußere Randkurve von $\boldsymbol{\xi}_m$, siehe Unterabschnitt 2.1.1, dann ist $\{\tau_m\}_{m\geq m_2}$ eine Folge geschlossener Jordankurven in $\mathbb{R}^2$. Diese ordnen wir partiell in der natürlichen Weise, das heißt, wir setzen $\tau_m < \tau_{m'}$ genau dann, wenn $\tau_m(\partial_+\Omega_0^n)$ ganz im Inneren des von $\tau_{m'}(\partial_+\Omega_0^n)$ berandeten beschränkten Gebiets liegt. Das Bild von $\boldsymbol{\xi}_m$ ist zusammenhängend und kompakt und wird von den disjunkten Kurven $\tau_m(\partial_+\Omega_0^n)$ und $\tau_{m+1}(\partial_+\Omega_0^n)$ berandet. Also gilt entweder $\tau_m < \tau_{m+1}$ oder $\tau_{m+1} < \tau_m$. Da die Folge der Randkurven gegen den Ursprung konvergiert, kann diese nicht monoton wachsend sein. Es gibt also ein $m_3 \geq m_2$, so dass $\tau_{m_3+1} < \tau_{m_3}$. Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass die Folge $\{\tau_m\}_{m\geq m_3}$ monoton fallend ist. Angenommen, es gilt $\tau_{m+1} < \tau_m$ für ein $m \geq m_3$. Betrachten wir die Bilder der Splineringe $\boldsymbol{\xi}_m$ und $\boldsymbol{\xi}_{m+1}$, dann liegen diese wegen

$$2D_u\boldsymbol{\xi}_{m+1}^j(2, 2t) = D_u\boldsymbol{\xi}_m^j(1, t) \neq \mathbf{0}\,, \quad t \in \gamma \tag{3.99}$$

auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Randkurve $\tau_{m+1}(\partial_+\Omega_0^n)$. Also ist $\tau_{m+2} < \tau_{m+1}$.

Sei nun $\boldsymbol{\xi}_m(\underline{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\xi}_{m'}(\underline{\mathbf{u}}')$, $m' \geq m \geq m_3$. Für $m' = m$ folgt $(\underline{\mathbf{u}}, m) = (\underline{\mathbf{u}}', m')$ aus der Injektivität von $\boldsymbol{\xi}_m$. Anderenfalls liegt $\boldsymbol{\xi}_m(\underline{\mathbf{u}})$ entweder auf der Kurve

$\tau_{m+1}(\partial_+\Omega_0^n)$ oder außerhalb davon, und $\boldsymbol{\xi}_{m'}(\underline{\mathbf{u}}')$ liegt entweder auf der Kurve $\tau_{m'}(\partial_+\Omega_0^n)$ oder innerhalb davon. Wegen $\tau_{m'+r} < \tau_{m+1}$ für $r \geq 1$ kann dies nur gelten, wenn $m' = m+1$ ist und sowohl $\boldsymbol{\xi}_m(\underline{\mathbf{u}})$ als auch $\boldsymbol{\xi}_{m'}(\underline{\mathbf{u}}')$ auf $\tau_{m+1}(\partial_+\Omega_0^n)$ liegen. Gemäß (2.53) gilt für $\underline{\mathbf{u}} = (u,v,j) \in \partial_-\Omega_0^n$ und $\underline{\mathbf{u}}' = (u',v',j') \in \partial_+\Omega_0^n$

$$\boldsymbol{\xi}_m^j(u,v) = \boldsymbol{\xi}_{m+1}^j(2u,2v) = \boldsymbol{\xi}_{m'}^{j'}(u',v')\,. \tag{3.100}$$

Aufgrund der Injektivität von $\boldsymbol{\xi}_{m+1}$ ist damit $(2u,2v,j,m+1) = (u',v',j',m')$. Somit entsprechen $(\underline{\mathbf{u}},m)$ und $(\underline{\mathbf{u}}',m')$ demselben Parameter in Ω^n, nämlich $(2^{-m}u,2^{-m}v,j) = (2^{-m'}u',2^{-m'}v',j') \in \Omega^n$. Also ist $\boldsymbol{\xi}$ lokal injektiv. □

Nun können wir das Hauptresultat dieses Unterabschnitts formulieren. Es liefert eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Regularität eines Subdivisionsalgorithmus unter der Prämisse, dass Ψ regulär ist, also die hinreichende Bedingung für Normalenstetigkeit gemäß 3.14 erfüllt.

Satz 3.16. *Sei Ψ die charakteristische Abbildung eines nichtdegenerierten normalenstetigen Subdivisionsalgorithmus $(A,\boldsymbol{\varphi})$, $A \in \bigcup_{\mu=1}^5 \mathcal{A}_\mu^*$, und Ψ' die Einschränkung von Ψ auf das Innere des Definitionsgebiets. Wenn Ψ regulär ist, dann gilt:*

i) *Wenn $(A,\boldsymbol{\varphi})$ regulär ist, dann ist Ψ' injektiv.*
ii) *Wenn Ψ injektiv ist, dann ist $(A,\boldsymbol{\varphi})$ regulär.*

Beweis. *zu i):* Da A nicht degeneriert ist, ist $J \not\equiv 0$ und es gibt ein $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \mathring{\Omega}_0^n$ mit $J(\underline{\mathbf{u}}_0) \neq 0$. Wir zeigen nun, dass für alle $\tilde{\Psi} \in C_{\boldsymbol{\varphi}}^k(\Omega_0^n,\mathbb{R}^2)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von Ψ der Punkt $\mathbf{p}_0 := \Psi(\underline{\mathbf{u}}_0)$ im Bild von $\tilde{\Psi}$ liegt. Zunächst wählen wir ein Doppelsegment $\Psi^{j',+}$ von Ψ so, dass $\Psi^{j',+}(\mathbf{u}') = \mathbf{p}_0$ und $\mathbf{u}' \in \mathring{\omega}_0^+$. Dann definieren wir die Funktion

$$F : C_{\boldsymbol{\varphi}}^k(\Omega_0^n,\mathbb{R}^2) \times \mathring{\omega}_0^+ \ni (\tilde{\Psi},\mathbf{u}) \mapsto \tilde{\Psi}^{j',+}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^2\,. \tag{3.101}$$

Versehen wir das Definitionsgebiet mit der Norm $\|(\tilde{\Psi},\mathbf{u})\| := \|\tilde{\Psi}\|_\infty + \|\mathbf{u}\|$, dann ist F eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge des Banachraums $C_{\boldsymbol{\varphi}}^k(\Omega_0^n,\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$. Somit ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar: es gilt $F(\tilde{\Psi},\mathbf{u}') = \mathbf{0}$ und $\det D_{\mathbf{u}}F(\tilde{\Psi},\mathbf{u}') = J(\underline{\mathbf{u}}_0) \neq 0$. Folglich ist die Gleichung $\tilde{\Psi}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}$ für alle Funktionen $\tilde{\Psi}$ in einer Umgebung von Ψ nach $\mathbf{u}$ auflösbar. Nehmen wir nun an, Ψ' sei nicht injektiv, dann folgt daraus, dass alle Abbildungen $\tilde{\Psi}$ in einer Umgebung von Ψ nicht injektiv sind. Betrachten wir die Folge der reskalierten Projektionen

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m = \boldsymbol{\xi}_m T[\mathbf{b}]^{-1}\Gamma_m^{-1} = \Psi + o(1) \tag{3.102}$$

gemäß (3.86), dann gibt es also ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m$ und damit auch $\boldsymbol{\xi}_m = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_m \Gamma_m T[\mathbf{b}]$ nicht injektiv ist für alle $m \geq m_0$. Im Widerspruch zur Voraussetzung ist somit nach Lemma 3.15 die Regularität von $\mathbf{x}$ ausgeschlossen; Ψ' ist also injektiv.

zu ii): Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir den Satz, dass die Menge der regulär parametrisierten injektiven Abbildungen offen in $C_{\boldsymbol{\varphi}}^k(\Omega_0^n,\mathbb{R}^2)$ ist. Ein

Beweis hierzu findet sich in [Rei95d]. Ist also Ψ regulär parametrisiert und injektiv, dann ist $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m = \Psi + o(1)$ und damit auch $\boldsymbol{\xi}_m = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_m \Gamma_m T[\mathbf{b}]$ injektiv für fast alle $m \in \mathbb{N}$. Die Regularität von $(A, \boldsymbol{\varphi})$ folgt hieraus mit Hilfe von Lemma 3.15. $\square$

Der letzte Satz gibt Anlass zu der folgenden Definition:

DEFINITION 3.17. *Ein Unterteilungsalgorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi}), A \in \bigcup_{\mu=1}^{5} \mathcal{A}_\mu^*$, heißt* C^1-Algorithmus, *wenn die charakteristische Abbildung regulär und injektiv ist.*

Wir werden uns im Folgenden auf die Untersuchung von C^1-Algorithmen konzentrieren. Zum einen erzeugen diese für fast alle Startvektoren C^1-reguläre Subdivisionsflächen. Umgekehrt wird damit die Klasse aller regulärer Algorithmen weitgehend ausgeschöpft. Außer Betracht bleiben lediglich degenerierte Algorithmen, sowie Verfahren, deren Charakteristika aus analytischer Sicht instabil sind. Es sind dies einmal Fälle, bei denen die Injektivität der charakteristischen Abbildung am Rand des Definitionsgebiets gestört ist. Zum anderen sind es Algorithmen, deren charakteristische Determinante J semidefinit ist, also Nullstellen, aber keine Vorzeichenwechsel besitzt.

Die Injektivität der charakteristischen Abbildung Ψ ist im Allgemeinen nicht leicht zu verifizieren. Für den Fall aber, dass Ψ regulär parametrisiert ist, kann die Untersuchung auf den Rand des Definitionsgebiets beschränkt werden.

SATZ 3.18. *Sei Ψ die charakteristische Abbildung eines Subdivisionsalgorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi}), A \in \bigcup_{\mu=1}^{5} \mathcal{A}_\mu^*$, und Ψ_∂ die Einschränkung von Ψ auf den Rand des Definitionsgebiets Ω_0^n. Wenn Ψ regulär ist, dann ist A ein C^1-Algorithmus genau dann, wenn Ψ_∂ injektiv ist.*

BEWEIS. Nach den Sätzen 3.14 und 3.16 ist hier nur zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen Ψ injektiv ist. Da Ψ regulär ist, werden nach dem Satz über implizite Funktionen Punkte im Inneren des Definitionsgebiets auf das Innere des Bildes abgebildet,

$$\partial\Psi(\Omega_0^n) \cap \Psi(\mathring{\Omega}_0^n) = \emptyset\,. \tag{3.103}$$

Wir definieren nun eine Funktion μ, die jedem Punkt im Bild von Ψ die Anzahl seiner Urbilder zuweist,

$$\mu : \Psi(\Omega) \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \#\{\underline{\mathbf{u}} \in \Omega_0^n : \Psi(\underline{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\xi}\} \in \mathbb{N}\,. \tag{3.104}$$

Sei $\boldsymbol{\xi} \in \Psi(\Omega_0^n)$ und $\Psi(\underline{\mathbf{u}}_r) = \boldsymbol{\xi}, r = 1, \ldots, \mu(\boldsymbol{\xi})$, dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine in $\Psi(\Omega_0^n)$ offene Umgebung V von $\boldsymbol{\xi}$ und in Ω_0^n offene Umgebungen U_r von $\underline{\mathbf{u}}_r$ in Ω_0^n mit $\Psi(U_r) = V$, $r = 1, \ldots, \mu(\boldsymbol{\xi})$.

Wir zeigen zunächst, dass μ oberhalbstetig ist. Angenommen, es gibt eine Folge $\boldsymbol{\xi}^s \to \boldsymbol{\xi}$ mit $\mu(\boldsymbol{\xi}^s) > \mu(\boldsymbol{\xi}), s \in \mathbb{N}$, dann gibt es zugehörige Urbilder $\underline{\mathbf{u}}^s$ mit $\Psi(\underline{\mathbf{u}}^s) = \boldsymbol{\xi}^s$ und $\underline{\mathbf{u}}^s \notin U^* := \bigcup_{r=1}^{\mu(\boldsymbol{\xi})} U_r$. Die beschränkte konvergente Teilfolge besitzt einen Häufungspunkt $\underline{\mathbf{u}}^*$ und es gilt aus Stetigkeitsgründen $\Psi(\underline{\mathbf{u}}^*) = \boldsymbol{\xi}$. Da $\Omega_0^n \backslash U^*$ abgeschlossen ist, ist $\underline{\mathbf{u}}^* \notin U^*$ und somit $\mu(\boldsymbol{\xi})$ größer als ursprünglich angenommen.

Nun zeigen wir, dass μ auf dem Inneren des Bildes unterhalbstetig ist. Sei $\boldsymbol{\xi} \in \mathring{\Psi}(\Omega_0^n)$, dann ist nach (3.103) $u_r \in \mathring{\Omega}_0^n$ und V kann so klein gewählt werden, dass $U_r \subset \mathring{\Omega}_0^n$ für alle $r = 1, \ldots, \mu(\boldsymbol{\xi})$. Damit ist $\mu(V) \geq \mu(\boldsymbol{\xi})$.

Ψ ist also stetig auf dem Inneren des Bildes und oberhalbstetig am Rand. Dort ist aber $\mu\big(\partial\Psi(\Omega_0^n)\big) = 1$, wie aus der Injektivität von Ψ_∂ und (3.103) folgt. Also gilt $\mu \equiv 1$ und Ψ ist injektiv. □

4. Symmetrische Verfahren

Von besonderer Bedeutung für die Anwendungen sind symmetrische Subdivisionsalgorithmen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die spezielle Wahl von Startpunkt und Umlaufrichtung bei der Indizierung der Segmente der Splineringe keinen Einfluß auf die Geometrie der erzeugten Flächen hat. Zu dieser Klasse gehören insbesondere auch die klassischen Algorithmen von Doo–Sabin und Catmull–Clark.

4.1. Charakterisierung symmetrischer Algorithmen. Symmetrische Algorithmen zeichnen sich durch die Gleichbehandlung aller n Segmente eines Splinerings aus. Um dieser Eigenschaft Rechnung zu tragen, fordern wir im Folgenden, dass das erzeugende System *zyklisch* sei, das heißt die Form

$$\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\varphi}^0, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{n-1}] \tag{3.105}$$

hat, wobei die $\boldsymbol{\varphi}^j$ Vektoren von Funktionen vom Typ

$$\boldsymbol{\varphi}^j := [\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{Q'}^j] \tag{3.106}$$

sind, und für alle $j, j' \in \mathbb{Z}_n$ gilt

$$\boldsymbol{\varphi}^j(\cdot, j') = \boldsymbol{\varphi}^0(\cdot, j' - j)\,. \tag{3.107}$$

Analog partitionieren wir die Vektoren der Kontrollpunkte in n Blöcke der Länge Q',

$$\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0; \ldots; \mathbf{B}_m^{n-1}]\,. \tag{3.108}$$

Man beachte, dass jedes erzeugende System $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ in eine symmetrische Form gebracht werden kann, gegebenenfalls unter Hinzunahme weiterer Funktionen. Man setzt dazu beispielsweise

$$\boldsymbol{\varphi}^j(\cdot, j') := \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot, j' - j)/n\,, \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.109}$$

Dabei gewährleistet der Faktor $1/n$, dass mit $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ auch $\boldsymbol{\varphi}$ eine Partition der Eins bildet. Sei E die Einheitsmatrix der Dimension Q', dann definieren wir die *Shiftmatrix*

$$S^{j,j'} := \delta_{j,j'+1} E\,, \quad j, j' \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.110}$$

Für ein zyklisches erzeugendes System gilt damit

$$\boldsymbol{\varphi}(u, v, j-1) = \boldsymbol{\varphi}(u, v, j) S\,, \quad (u, v, j) \in \Omega^n\,. \tag{3.111}$$

Neben der Abgeschlossenheit des Raums $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d)$ unter Shifts des Index j fordern wir auch, dass eine Inversion der Umlaufrichtung in $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega_0^n, \mathbb{R}^d)$ möglich sein soll. Diese wird durch eine Transformation der Parameter gemäß $(u,v,j) \mapsto (v,u,-j)$ realisiert. Wir nennen ein zyklisches erzeugendes System *symmetrisch*, wenn es eine *Reflexionsmatrix* R gibt mit

$$\boldsymbol{\varphi}(v,u,-j) = \boldsymbol{\varphi}(u,v,j)R\,, \quad (u,v,j) \in \Omega^n\,. \tag{3.112}$$

Man beachte, dass R in der Regel nicht eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.19. *Sei* $(A,\boldsymbol{\varphi})$ *ein Unterteilungsalgorithmus mit einem symmetrischen erzeugenden System und bezeichne* S *die Shiftmatrix gemäß* (3.110). *Dann heißt* A symmetrisch, *wenn es eine Reflexionsmatrix* R *gibt, so dass*

$$AS = SA\,, \quad AR = RA\,. \tag{3.113}$$

Die Symmetrie eines Subdivisionsalgorithmus lässt sich anschaulich so deuten, dass sowohl der Startpunkt als auch die Umlaufrichtung bei der Indizierung der Segmente eines Splinerings ohne Belang für die Geometrie der erzeugten Subdivisionsfläche sind.

Partitionieren wir die Subdivisionsmatrix A analog zu S in $n \times n$ Blöcke $A^{j,j'}$, $j,j' \in \mathbb{Z}_n$, dann impliziert $SA = AS$, dass A blockzyklisch ist. Es gilt

$$A^j := A^{j,0} = A^{j+j',j'}\,, \quad j,j' \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.114}$$

Damit erhält (3.1) die blockzyklische Form

$$\mathbf{B}^j_{m+1} = \sum_{j'=0}^{n-1} A^{j'}\mathbf{B}^{j'+j}_m\,, \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.115}$$

4.2. Die Eigenraumstruktur. Im symmetrischen Fall lassen sich aus der speziellen Struktur der Subdivisionsmatrix eine Reihe von Aussagen über deren Eigenwerte und –vektoren und damit auch über die charakteristische Abbildung ableiten. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei die diskrete Fouriertransformation, mit deren Hilfe die Subdivisionsmatrix auf blockdiagonale Gestalt gebracht werden kann.

4.2.1. *Die diskrete Fouriertransformation.* Die diskrete Fouriertransformation (DFT) ermöglicht die Transformation (block)zyklischer Systeme auf (block)diagonale Form. Wir übergehen hier die technischen Details und verweisen stattdessen auf [Lip81]. Dort findet sich eine ausführliche Darstellung der diskreten Fouriertransformation und ihrer Anwendungen auf zyklische Systeme.

Sei $\mathbf{p} := [p^0, \ldots, p^{n-1}]$ ein n-Vektor dimensionsgleicher Matrizen. Dies kann im Sonderfall auch ein Vektor von Skalaren oder Vektoren sein. Mit

$$w_n := c_n + is_n := \exp(2\pi i/n) \tag{3.116}$$

definieren wir die DFT als lineare Abbildung $\mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{p}} = [\hat{p}^0, \ldots, \hat{p}^{n-1}]$ gemäß

$$\hat{p}^k := \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-jk} p^j\,, \quad k \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.117}$$

Wenden wir die DFT auf die Vektoren $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0; \ldots; \mathbf{B}_m^{n-1}]$ an, dann wird (3.115) in die diagonalisierte Form

$$\hat{\mathbf{B}}_{m+1}^k = \hat{A}^k \hat{\mathbf{B}}_m^k, \quad k \in \mathbb{Z}_n \tag{3.118}$$

überführt. Dabei entstehen die Matrizen $\hat{A}^0, \ldots, \hat{A}^{n-1}$ durch Transformation des Vektors $[A^0, \ldots, A^{n-1}]$, also der ersten Blockspalte der Matrix A. Da A reell ist, gilt

$$\hat{A}^k = \overline{\hat{A}^{n-k}}, \quad k \in \mathbb{Z}_n. \tag{3.119}$$

Die Eigenwerte und –vektoren der Matrizen A und $\hat{A} := \operatorname{diag}(\hat{A}^0, \ldots, \hat{A}^{n-1})$ stehen in folgendem Zusammenhang: Die beiden Matrizen sind ähnlich, haben also identische Jordanform. Σ_p ist also genau dann Jordanblock von A, wenn es ein k gibt, so dass Σ_p Jordanblock von $\hat{A}^k$ ist. Die Menge der Zahlen

$$\kappa(\lambda) := \{k \in \mathbb{Z}_n : \det(\hat{A}^k - \lambda) = 0\} \tag{3.120}$$

nennen wir den *Fourierindex* des Eigenwerts λ.

Sei $\hat{V}_p$ die Matrix der Eigen– und Hauptvektoren von $\hat{A}^k$ zum Jordanblock Σ_p, dann existiert zum einen wegen (3.119) dazu ein konjugiert komplexes Pendant,

$$\hat{A}^k \hat{V}_p = \hat{V}_p \Sigma_p \iff \hat{A}^{n-k} \overline{\hat{V}_p} = \overline{\hat{V}_p} \overline{\Sigma}_p; \tag{3.121}$$

zum anderen verifiziert man leicht, dass mit

$$V_p := [w_n^0 \hat{V}_p; w_n^k \hat{V}_p; \ldots; w_n^{k(n-1)} \hat{V}_p] \tag{3.122}$$

für die ursprüngliche Matrix A gilt $AV_p = V_p \Sigma_p$. Wir können also im Folgenden o.B.d.A. voraussetzen, dass die Transformationsmatrix $V = [V_0, \ldots, V_P]$ aus Blöcken der Form (3.122) aufgebaut ist.

4.2.2. *Eine erste notwendige Spektralbedingung.* Wir wollen im Folgenden zeigen, dass nur Matrizen $A \in \mathcal{A}_2^*$ mit reellen Eigenvektoren $\lambda_1 = \lambda_2$ als Subdivisionsmatrizen symmetrischer C^1-Algorithmen in Frage kommen. Dies ist genau die Struktur, die bei allen klassischen Algorithmen auftritt und die in den meisten bisherigen Untersuchungen betrachtet worden ist. Diese beschränken sich aber stets auf den Fall, dass der darauffolgende Eigenwert λ_3 betragsmäßig kleiner als λ_1 ist. Diese Restriktion verwenden wir hier nicht, es genügt $\Lambda_1 \sim \Lambda_2 \succ \Lambda_3$. Ein Beispiel eines Algorithmus, bei dem genau dies benötigt wird, findet sich im nächsten Kapitel. In diesem Unterabschnitt grenzen wir zunächst die in Frage kommenden Typen ein.

Lemma 3.20. *Für einen symmetrischen C^1-Algorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi})$ gilt $A \in \mathcal{A}_2^*$.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Annahme $A \notin \mathcal{A}_2^*$ im Widerspruch zu der geforderten Injektivität der charakteristischen Abbildung steht. Für $A \in \mathcal{A}_\mu^*, \mu \in$

$\{1,3,4,5\}$, hat die charakteristische Abbildung die Form

$$\Psi = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_{q_\mu}^{\beta_\mu}] = \boldsymbol{\varphi} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{v}}' \\ w_n^k \hat{\mathbf{v}} & w_n^{k'} \hat{\mathbf{v}}' \\ \vdots & \vdots \\ w_n^{n-1k} \hat{\mathbf{v}} & w_n^{n-1k} \hat{\mathbf{v}}' \end{bmatrix} . \tag{3.123}$$

Da Ψ reell ist, kann dies nur dann gelten, wenn w_n^k und $w_n^{k'}$ reell sind. Dann ist aber $w_n^{2k} = w_n^{2k'} = 1$ und es gilt mit (3.107) für die Segmente der charakteristischen Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^j(\cdot,2)\left[w_n^{jk}\hat{\mathbf{v}}, w_n^{jk'}\hat{\mathbf{v}}'\right] = \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^0(\cdot,2-j)\left[w_n^{(j-2)k}\hat{\mathbf{v}}, w_n^{(j-2)k'}\hat{\mathbf{v}}'\right] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^0(\cdot,-j)\left[w_n^{jk}\hat{\mathbf{v}}, w_n^{jk'}\hat{\mathbf{v}}'\right] = \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^j(\cdot,0)\left[w_n^{jk}\hat{\mathbf{v}}, w_n^{jk'}\hat{\mathbf{v}}'\right] = \Psi^0 . \end{aligned} \tag{3.124}$$

□

Wir können uns also von nun an auf die Untersuchung des Falls $A \in \mathcal{A}_2^*$ beschränken. Dies ermöglicht die Einführung einiger vereinfachter Schreibweisen. Für eine Subdivisionsmatrix $A \in \mathcal{A}_2^*$ bezeichnet $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ den *subdominanten Eigenwert* und $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1^0$ den zugehörigen Eigenvektor.

4.2.3. *Die charakteristische Abbildung im Komplexen.* Es erweist sich im Folgenden als zweckmäßig, neben der charakteristischen Abbildung

$$\Psi = [\Psi_1, \Psi_2] = \varphi[\operatorname{Re}\mathbf{v}, \operatorname{Im}\mathbf{v}] \tag{3.125}$$

auch die komplexe Form

$$\Psi_* = \Psi_1 + i\Psi_2 = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v} \in C^k(\Omega_0^n, \mathbb{C}) \tag{3.126}$$

zu verwenden. Die Segmente von Ψ_* werden wieder mit $\Psi_*^0, \ldots, \Psi_*^{n-1}$ bezeichnet. Wenden wir den Subdivisionsalgorithmus auf $\mathbf{v}$ an, dann erhalten wir den komplexen Splinering $\Psi_*' = \varphi A\mathbf{v} = \lambda\Psi_*$, der an Ψ_* glatt gemäß (2.53) anschließt. Dies impliziert für die Randwerte von Ψ_* insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \Psi_*^j(1,t) &= \lambda\Psi_*^j(2,2t) \\ \Psi_*^j(t,1) &= \lambda\Psi_*^j(2t,2) \end{aligned}\right\} \quad t \in [0,1]\,,\ j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.127}$$

Speziell ist für einen C^1-Algorithmus $\Psi_*^0(2,2) \neq \Psi_*^0(1,1) = \lambda\Psi_*^0(2,2)$ und damit $\Psi_*^0(2,2) \neq 0$. Wir können also für ein gegebenes $c \in \mathbb{R}^+$ den Eigenvektor $\mathbf{v}$ stets eindeutig so skalieren, dass $\Psi_*^0(2,2) = c$ gilt. In diesem Fall nennen wir die charakteristische Abbildung *normiert.*

4.2.4. *Weitere notwendige Spektralbedingungen.* Wir können nun zeigen, dass der subdominante Eigenwert λ reell und damit doppelt sein muss und den Fourierindex $\{1, n-1\}$ hat. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts zeigt Abbildung 3.2 zwei charakteristische Abbildungen, wie sie bei Algorithmen vom Doo-Sabin-Typ auftreten. Links ist der Fourierindex $\{1, n-1\}$. Rechts dagegen ist $\kappa = \{2, n-2\}$ und die Nichtinjektivität offensichtlich.

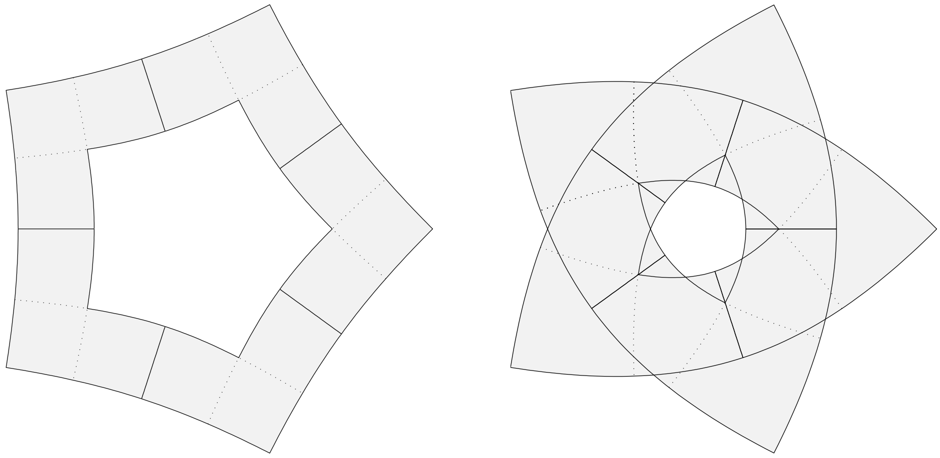


Abbildung 3.2. Charakteristische Abbildungen mit Fourierindex $\{1, n-1\}$ *(links)* bzw. $\{2, n-2\}$ *(rechts)*.

Satz 3.21. *Für einen symmetrischen C^1-Algorithmus $(A, \boldsymbol{\varphi})$ gilt*

$$A \in \mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{A}_2^* : \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \kappa(\lambda) = \{1, n-1\}\}\,. \tag{3.128}$$

Beweis. Sei $\lambda \notin \mathbb{R}$, dann folgt aus $AR = RA$, dass $R\mathbf{v}$ entweder ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ oder der Nullvektor ist; es gibt also eine komplexe Zahl a mit $R\mathbf{v} = a\mathbf{v}$. Für die normierte charakteristische Abbildung gilt nun

$$0 \neq c = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)R\mathbf{v} = a\boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\mathbf{v} = ac\,. \tag{3.129}$$

Also ist $a = 1$ und

$$\Psi_*(1,0,0) = \boldsymbol{\varphi}(1,0,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(0,1,0)R\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(0,1,0)\mathbf{v} = \Psi_*(0,1,0) \tag{3.130}$$

im Widerspruch zur Injektivität von Ψ_*. Wenn λ reell ist, dann hat der Fourierindex wegen (3.121) für ein $k \in \mathbb{Z}_n$ die Form $\kappa(\lambda) = \{k, n-k\}$. Für den zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}$ gilt mit $\hat{A}^k\hat{\mathbf{v}} = \lambda\hat{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{v} = [w_n^0\hat{\mathbf{v}}; w_n^k\hat{\mathbf{v}}; \ldots; w_n^{(n-1)k}\hat{\mathbf{v}}]\,. \tag{3.131}$$

Folglich genügen die Segmente der charakteristischen Abbildung der Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi_*^j &= \sum_{j' \in \mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^{j'}(\cdot, j) w_n^{j'k}\hat{\mathbf{v}} = w_n^{jk} \sum_{j' \in \mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^0(\cdot, j-j') w_n^{(j'-j)k}\hat{\mathbf{v}} \\ &= w_n^{jk} \sum_{j' \in \mathbb{Z}_n} \boldsymbol{\varphi}^{j'}(\cdot, j') w_n^{j'k}\hat{\mathbf{v}} = w_n^{jk}\Psi_*^0\,, \end{aligned} \tag{3.132}$$

und es gilt insbesondere $\Psi_*^j(0,2) = \Psi_*^{j+1}(2,0) = w_n^k\Psi_*^j(2,0)$. Sei nun τ_* die Einschränkung von Ψ_* auf die Menge $\partial_+\Omega_0^n$, also den äußeren Rand des Definitionsgebiets, siehe (2.38). Die Segmente von τ_* bezeichnen wir mit $\tau_*^0, \ldots, \tau_*^{n-1}$. Da Ψ injektiv und glatt ist, parametrisiert τ_* eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{C}$. Aus (3.127) und der Injektivität von Ψ folgt außerdem, dass das Bild von τ_* den

Ursprung nicht enthält, und es gilt damit nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tau_*}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n}\int_{\tau_*^j}\frac{dz}{z} = \frac{n\ln w_n^k}{2\pi i} = k \in \{0,1,n-1\} \mod n\,. \qquad (3.133)$$

Der Fall $k=0 \mod n$ scheidet aus, da dann alle Segmente gemäß (3.132) identisch wären. □

Wir können also zusammenfassend feststellen, dass im Falle eines symmetrischen C^1-Algorithmus die Eigenwerte die Struktur

$$(1,0) \gg (\lambda,\nu) := \Lambda_1 = \Lambda_2 \succ \Lambda_3 \qquad (3.134)$$

haben müssen. Der subdominante Eigenwert λ muss ferner den Fourierindex $\{1,n-1\}$ haben, also zu den Blöcken $\hat{A}^1$ und $\hat{A}^{n-1}$ gehören.

4.2.5. *Eigenschaften der charakteristischen Abbildung.* Wenden wir uns nun wieder der charakteristischen Abbildung zu. Wenn $\kappa(\lambda) = \{1,n-1\}$ ist, dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass mit $\hat{A}^1\hat{\mathbf{v}} = \lambda\hat{\mathbf{v}}$ der Eigenvektor $\mathbf{v}$ die Form

$$\mathbf{v} = [w_n^0\hat{\mathbf{v}}; w_n^1\hat{\mathbf{v}}; \ldots; w_n^{n-1}\hat{\mathbf{v}}] \qquad (3.135)$$

hat. Folglich gilt nach (3.132) die Beziehung

$$\Psi_*^j = w_n^j\Psi_*^0\,, \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \qquad (3.136)$$

Ferner gilt zwischen benachbarten Segmenten die Konsistenzbedingung

$$\Psi_*^j(0,t) = \Psi_*^{j+1}(t,0)\,, \quad t\in[1,2]\,,\ j\in\mathbb{Z}_n\,. \qquad (3.137)$$

Für die nachfolgenden Untersuchungen ist die Symmetrie normierter charakteristischer Abbildungen bezüglich der reellen Achse von großer Bedeutung.

Lemma 3.22. *Eine normierte charakteristische Abbildung Ψ_* eines symmetrischen C^1-Algorithmus $(A,\boldsymbol{\varphi})$ ist* symmetrisch, *das heißt*

$$\Psi_*^0(u,v) = \overline{\Psi}_*^0(v,u)\,, \quad (u,v)\in\omega_0\,. \qquad (3.138)$$

Beweis. Aus $AR = RA$ folgt, dass mit $\mathbf{v}$ auch $R\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ oder der Nullvektor ist. Es gibt also komplexe Zahlen a,b mit $R\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\overline{\mathbf{v}}$. Wegen $c = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\overline{\mathbf{v}}$ gilt

$$0 \neq c = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)R\mathbf{v} = c(a+b)\,, \qquad (3.139)$$

also ist $a+b=1$. Der Vektor $\mathbf{v}$ gemäß (3.135) ist Eigenvektor der Shiftmatrix zum Eigenwert w_n^{-1},

$$S\mathbf{v} = w_n^{-1}\mathbf{v}\,, \quad S\overline{\mathbf{v}} = w_n\overline{\mathbf{v}}\,. \qquad (3.140)$$

Damit erhalten wir die Bedingung

$$0 \neq c = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(2,2,0)SRS\mathbf{v} = c(aw_n^{-2} + b)\,. \qquad (3.141)$$

Setzen wir $b = 1-a$ ein, dann folgt $a(w_n^{-2}-1) = 0$. Wegen $w_n^{-2} \neq 1$ ist damit $a=0, b=1$ und es gilt $R\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}$. Schließlich folgt die Behauptung aus

$$\Psi_*^0(u,v) = \boldsymbol{\varphi}(u,v,0)\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(v,u,0)\overline{\mathbf{v}} = \overline{\Psi}_*^0(v,u)\,. \qquad (3.142)$$

□

4.3. Hinreichende Bedingungen. Wenden wir uns nun dem Problem zu, einfach verifizierbare hinreichende Bedingungen für die Regularität und Injektivität der charakteristischen Abbildung zu finden. Während die Spektral– und Symmetrieeigenschaften meist elementar nachweisbar sind, entzieht sich insbesondere die Injektivität in der Regel einer direkten Überprüfung. Unser Ziel ist es daher, diese aus möglichst einfach evaluierbaren Bedingungen abzuleiten.

Voraussetzen wollen wir in diesem Abschnitt, dass die charakteristische Abbildung

$$\Psi_* = \Psi_1 + i\Psi_2 = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}[w_n^0\hat{\mathbf{v}}; w_n^1\hat{\mathbf{v}}; \ldots; w_n^{n-1}\hat{\mathbf{v}}] \tag{3.143}$$

normiert und symmetrisch ist und zu einem subdominanten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört. Wir sagen dann kurz, dass Ψ *Standardeigenschaften* habe.

Der erste Hilfssatz betrifft eine Einschränkung des Bildbereiches des Segments Ψ_*^0 auf einen Sektor in der komplexen Ebene.

Lemma 3.23. *Sei Ψ_* eine reguläre charakteristische Abbildung mit Standardeigenschaften und $S_n := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/n \leq \arg z \leq \pi/n\}$ ein Sektor in der komplexen Ebene. Wenn die partiellen Ableitungen $\Psi_{1,v}^0(1,t), \Psi_{2,v}^0(1,t)$ positiv sind für alle $t \in [0,1]$, dann gilt $\Psi^0(\omega) \subset S_n$.*

Beweis. Aufgrund der Symmetrie von Ψ_* gilt

$$\Psi_1^0(u,v) = \Psi_1^0(v,u)\,, \quad \Psi_2^0(u,v) = -\Psi_2^0(v,u)\,, \quad (u,v) \in \omega_0 \tag{3.144}$$

und insbesondere $\Psi_2^0(t,t) = 0, t \in [1,2]$. Sei $p_*(t) := p_1(t) + ip_2(t) := \Psi_*^0(1,t), t \in [0,1]$, siehe Abbildung 3.3, dann ist p_2 monoton wachsend, da $\Psi_{2,v}^0 > 0$ und

$$\Psi_2^0(1,0) = p_2(0) < p_2(t) < p_2(1) = \Psi_2^0(1,1) = 0\,, \quad t \in (0,1)\,. \tag{3.145}$$

Betrachten wir nun $\Psi_*^0(t,0), t \in [1,2]$. Gemäß (3.136), (3.137) und (3.138) erhalten wir für $t \in [1,2]$

$$\omega_n\Psi_*^0(t,0) = \Psi_*^1(t,0) = \Psi_*^0(0,t) = \overline{\Psi}_*^0(t,0)\,. \tag{3.146}$$

Dies kann nur gelten, wenn entweder $\arg\Psi_*^0(t,0) = -\pi/n$ oder $\arg\Psi_*^0(0,t) = \pi - \pi/n$. Letzteres widerspricht aber (3.145), also gilt

$$\arg\Psi_*^0(t,0) = -\pi/n\,, \quad \arg\Psi_*^0(0,t) = \pi/n\,, \quad t \in [1,2]\,. \tag{3.147}$$

Das bedeutet, dass $\Psi^0([1,2],0)$ ein Teil der Halbgeraden $h(r) = r\exp(-i\pi/n), r > 0$ ist. Da sowohl p_1 als auch p_2 monoton wachsend sind, hat p_* genau einen Schnittpunkt mit h, nämlich $p_*(0)$. Dies impliziert

$$-\pi/n = \arg p_*(0) < \arg p_*(t) < \arg p_*(1) = 0\,, \quad t \in (0,1)\,. \tag{3.148}$$

Mittels der Skalierungseigenschaft (3.127) und der Symmetrie bezüglich der reellen Achse implizieren die beiden letzten Ungleichungen $\Psi_*^0(\partial\omega_0) \subset S_n$. Wenn Ψ_* regulär ist, dann ist insbesondere auch Ψ_*^0 regulär parametrisiert. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist damit $\partial\Psi_*^0(\omega_0) \subset \Psi_*^0(\partial\omega_0) \subset S_n$. Angenommen, es liegt ein einziger Bildpunkt von Ψ_*^0 im Komplement von S_n, dann liegt im Widerspruch zur Kompaktheit von $\Psi_*^0(\omega_0)$ das gesamte Komplement von S_n im Bild von Ψ_*^0. $\square$

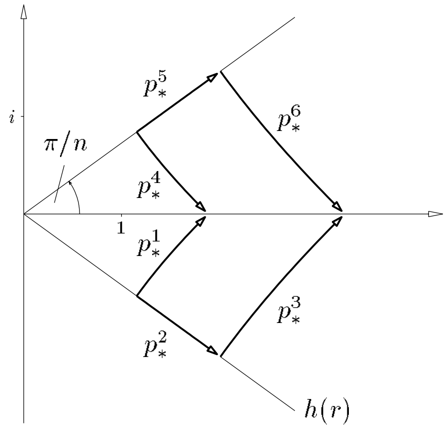


ABBILDUNG 3.3. Die Kurven $p_*^1, \ldots, p_*^6$.

Unter denselben Voraussetzungen wie zuvor folgt auch die Injektivität des Segments Ψ_*^0.

LEMMA 3.24. *Sei Ψ_* eine reguläre charakteristische Abbildung mit Standardeigenschaften. Wenn die partiellen Ableitungen $\Psi_{1,v}^0(1,t), \Psi_{2,v}^0(1,t)$ positiv sind für alle $t \in [0,1]$, dann ist Ψ_*^0 injektiv.*

BEWEIS. Da Ψ_* und damit auch Ψ_*^0 nach Voraussetzung regulär parametrisiert sind, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass Ψ_*^0 genau dann injektiv ist, wenn die Einschränkung $\Psi_{*,\partial}^0$ auf den Rand von ω_0 injektiv ist. Sei

$$p_*^1(t) := \Psi_*^0(1,t),\ p_*^2(t) := \Psi_*^0(1+t,0),\ p_*^3(t) := \Psi_*^0(2,2t) \tag{3.149}$$

$$p_*^4(t) := \Psi_*^0(t,1),\ p_*^5(t) := \Psi_*^0(0,1+t),\ p_*^6(t) := \Psi_*^0(2t,2) \tag{3.150}$$

für $t \in [0,1]$, siehe Abbildung 3.3, dann ist

$$p_* = p_*^1 = \overline{p}_*^4 = \lambda p_*^3 = \lambda \overline{p}_*^6 \tag{3.151}$$

$$p_*^2 = \overline{p}_*^5\,, \tag{3.152}$$

wobei $p_* = p_1 + ip_2$ definiert ist wie im Beweis zu Lemma 3.23. p_*^2 und p_*^5 schneiden sich nicht, da gemäß (3.147)

$$\arg p_*^2 = -\pi/n\,, \quad \arg p_*^5 = \pi/n\,. \tag{3.153}$$

Beide Kurven haben auch keine Selbstdurchdringungen, da sie regulär parametrisierte Teile von Geraden sind. Als nächstes zeigen wir, dass $\arg p_*$ streng monoton wachsend ist. Nach (3.145) und (3.147) gilt

$$p_2(0) < 0\,, \quad p_2(1) = 0\,, \quad p_1(0) = -p_2(0)\cot(\pi/n) > 0\,. \tag{3.154}$$

Da nach Voraussetzung p_1 und p_2 streng monoton wachsend sind, ist $p_1 > 0$ und $p_2 \leq 0$. Damit erhalten wir wie verlangt

$$\frac{d}{dt}(\arg p_*) = \frac{p_1 p_2' - p_1' p_2}{p_1^2 + p_2^2} > 0\,. \tag{3.155}$$

Die strenge Monotonie von $\arg p_* = \arg p^1 = \arg p^3 = -\arg p^4 = -\arg p^6$ hat folgende Konsequenzen: Erstens ist garantiert, dass $p_*^1, p_*^3, p_*^4, p_*^6$ keine Selbstdurchdringungen haben. Zweitens sind Schnitte von p_*^1 und p_*^3 ausgeschlossen, da $p_*^1 = \lambda p_*^3$ und $\arg p_*^1 = \arg p_*^3$. Ebenso sind auch p_*^4 und p_*^6 disjunkt. Drittens sind die einzigen Schnittpunkte von p_*^1 und p_*^3 mit p_*^2 die Eckpunkte

$$\Psi_*^0(1,0) = p_*^1(0) = p_*^2(0) \tag{3.156}$$

$$\Psi_*^0(2,0) = p_*^3(0) = p_*^2(1)\,. \tag{3.157}$$

Analoges gilt für p_*^4, p_*^5, p_*^6. Viertens sind die einzigen Schnittpunkte von $p_*^1 \cup p_*^2 \cup p_*^3$ und $p_*^4 \cup p_*^5 \cup p_*^6$ die Punkte

$$\Psi_*^0(1,1) = p_*^1(1) = p_*^4(1) \tag{3.158}$$

$$\Psi_*^0(2,2) = p_*^3(1) = p_*^6(1)\,. \tag{3.159}$$

Damit ist die Injektivität von $\Psi_{*,\partial}^0$ bewiesen. □

Nun können wir das Hauptresultat dieses Unterabschnitts formulieren: Seine Nützlichkeit liegt in der Tatsache begründet, dass neben den Standardeigenschaften lediglich Ungleichungen für die partiellen Ableitungen des Segments Ψ_*^0 auftreten. Da für verallgemeinerte B-Spline- und Boxspline-Unterteilungsalgorithmen dieses stückweise polynomial ist, können diese Bedingungen numerisch oder sogar analytisch mit Hilfe der konvexen-Hülle-Eigenschaft der Bernstein-Bézierdarstellung verifiziert werden.

Satz 3.25. *Sei Ψ_* eine charakteristische Abbildung mit Standardeigenschaften. Wenn Ψ_*^0 regulär parametrisiert ist, also $J^0 \neq 0$, und wenn die partiellen Ableitungen $\Psi_{1,v}^0(1,t), \Psi_{2,v}^0(1,t)$ positiv sind für alle $t \in [0,1]$, dann ist Ψ_* injektiv.*

Beweis. Nach Lemma 3.24 ist Ψ_*^0 regulär und injektiv. (3.136) besagt, dass Ψ_*^j aus Ψ_*^0 durch eine $2\pi j/n$-Rotation um den Ursprung hervorgeht. Daraus folgt erstens, dass alle Segmente $\Psi_*^j, j \in \mathbb{Z}_n$ regulär und injektiv sind. Zweitens gilt

$$(2j-1)\pi/n \leq \arg \Psi_*^j \leq (2j+1)\pi/n\ , \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{3.160}$$

Liegt das Argument eines Bildpunkts $\Psi_*(\underline{\mathbf{u}})$ auf der Sektorengrenze $(2j+1)\pi/n$, dann gibt es zwei Parameter $t, t' \in [1,2]$ mit $\Psi_*^j(0,t) = \Psi_*^{j+1}(t',0) = \Psi_*(\underline{\mathbf{u}})$. Andererseits gilt nach (3.137) $\Psi_*^j(0,t) = \Psi_*^{j+1}(t,0)$, und damit ist $t = t'$. Da die Parameter $(0,t,j)$ und $(t,0,j+1)$ aber in Ω_0^n miteinander identifiziert werden, ist das Urbild von $\Psi_*(\underline{\mathbf{u}})$ eindeutig. Liegt das Argument von $\Psi_*(\underline{\mathbf{u}})$ nicht auf einer der Sektorengrenzen, dann ist das zugehörige Segment und damit auch hier das Urbild eindeutig. □

Abschließend wollen wir noch ein Korollar zu Satz 3.25 angeben, das auf stärkeren, jedoch noch leichter verifizierbaren Voraussetzungen basiert. Der entscheidende Punkt ist hier, dass keine Produkte von partiellen Ableitungen zum Nachweis der Regularität betrachtet werden müssen; es genügen stattdessen zwei einfache Vorzeichenbedingungen.

KOROLLAR 3.26. *Sei Ψ_* eine charakteristische Abbildung mit Standardeigenschaften. Wenn die partiellen Ableitungen $\Psi^0_{1,v}, \Psi^0_{2,v}$ positiv sind, dann ist Ψ_* regulär und injektiv.*

BEWEIS. Die Symmetrieeigenschaft (3.144) impliziert

$$J^0(u,v) = \begin{pmatrix} \Psi^0_{1,u}(u,v) & \Psi^0_{1,v}(u,v) \\ \Psi^0_{2,u}(v,u) & \Psi^0_{2,v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^0_{1,v}(v,u) & \Psi^0_{1,v}(u,v) \\ -\Psi^0_{2,v}(v,u) & \Psi^0_{2,v}(u,v) \end{pmatrix} . \tag{3.161}$$

Also ist J^0 positiv, wenn $\Psi^0_{1,v}, \Psi^0_{2,v} > 0$. □

KAPITEL 4

C^1-Regularität spezieller Algorithmen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Analyse spezieller C^1-Algorithmen befassen und insbesondere Beweise für die C^1-Regularität der Algorithmen von Doo-Sabin und Catmull-Clark führen. Damit wird ein seit langer Zeit offenes Problem gelöst. Weiterhin diskutieren wir ein Verfahren, das mit einem gewissen Recht als „der einfachste Subdivisionsalgorithmus" bezeichnet werden kann. Die Verfeinerungsregel für ein gegebenes Netz von Punkten besteht hier einfach darin, Mittelpunkte benachbarter Kanten zu verbinden. Dieser Algorithmus ist in diesem Zusammenhang auch deshalb von Interesse, weil hier für $n = 3$ ein subdominanter Eigenwert mit sehr hoher algebraischer Vielfachheit auftritt. Damit wird gezeigt, dass das gerne zitierte „Kriterium des doppelten führenden Eigenwerts" weder aus theoretischer noch aus praktischer Sicht haltbar ist. Die Darstellungen hier orientieren sich teilweise an den in [PR98a] und [PR98b] erstmals publizierten Ergebnissen. Die notwendigen algebraischen und arithmetischen Operationen sind meist elementar, aber teilweise von beachtlicher Komplexität, so dass sich der Einsatz eines Computeralgebra-Systems zu deren Durchführung als vorteilhaft erweist. Wir führen die technischen Details nur soweit aus, wie dies für das Verständnis des Zusammenhangs notwendig ist und stellen die wesentlichen Sachverhalte, wo möglich, grafisch dar.

Im Folgenden sagen wir, ein Subdivisionsalgorithmus sei *vom Typ* (d, k), wenn er Splines in $C^k(\Omega, \mathbb{R}^3)$ erzeugt, die stückweise polynomial vom Bigrad d sind.

1. Der Doo-Sabin-Algorithmus

Der Doo-Sabin-Algorithmus ist eine Verallgemeinerung des Subdivisionsschemas für biquadratische uniforme Tensorproduktflächen und damit ein Algorithmus vom Typ $(2, 1)$. Für jedes n-Eck eines gegebenen Netzes von Punkten wird ein neues, kleineres n-Eck erzeugt und auf geeignete Art und Weise mit seinen Nachbarn verbunden, siehe Abbildung 4.1.

1.1. Struktur und Gewichte. Abbildung 4.2 zeigt die Masken der Gewichte, die verwendet werden, um ein neues n-Eck aus einem alten zu berechnen. Der reguläre Fall $n = 4$ ist auf der linken und der allgemeine Fall auf der rechten Seite dargestellt. Die Gewichte, die D. Doo und M. Sabin in [DS78] vorschlagen, sind

$$\alpha^j = \frac{\delta_{j,0}}{4} + \frac{3 + 2\cos(2\pi j/n)}{4n}, \quad j \in \mathbb{Z}_n. \tag{4.1}$$

Insbesondere erhält man für $n = 4$ die Gewichte des regulären Falls. Im Folgenden analysieren wir aber ganz allgemein Schemata, von denen wir zunächst nichts

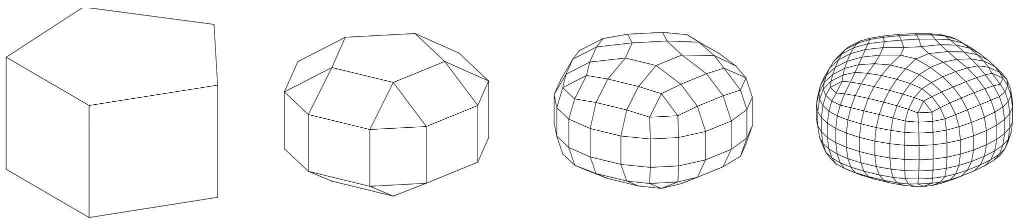


ABBILDUNG 4.1. Verfeinerung eines Kontrollnetzes durch den Doo-Sabin-Algorithmus.

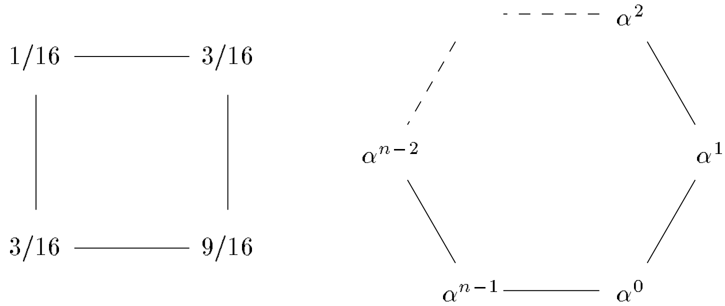


ABBILDUNG 4.2. Gewichte für den Doo-Sabin-Algorithmus.

weiter fordern, als affine Invarianz und Symmetrie, das heißt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j = 1\,, \quad \alpha^j = \alpha^{n-j}\,, \quad j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{4.2}$$

1.2. Die Subdivisionsmatrix. Betrachten wir nun den Doo-Sabin-Algorithmus als Rekursion für Splineringe. Die Splineringe bestehen aus n Segmenten, die wiederum in drei biquadratische Patches gegliedert sind. Die Segmente $\mathbf{x}_m^j, j \in \mathbb{Z}_n$, können lokal als Teil einer uniformen biquadratischen Tensorprodukt B-Splinefläche betrachtet werden. Der zugehörige Vektor von Kontrollpunkten $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0; \ldots; \mathbf{B}_m^{n-1}]$ besteht aus n Teilblöcken mit je 9 Kontrollpunkten, $\mathbf{B}_m^j = [\mathbf{B}_m^{j,1}; \ldots; \mathbf{B}_m^{j,9}]$. Abbildung 4.3 zeigt die Anordnung der Kontrollpunkte sowie die verwendete Indizierung. Die Subdivisionsmatrix A kann hier mühelos aufgestellt werden; sie ist im Übrigen eindeutig, da die B-Splines eine lokale Basis bilden und somit das daraus abgeleitete erzeugende System $\boldsymbol{\varphi}$ linear unabhängig ist, d.h. $\ker \boldsymbol{\varphi} = 0$. Wir verzichten hier auf Details und gehen direkt zu der blockdiagonalisierten Form $\hat{A} = \operatorname{diag}(\hat{A}^0, \ldots, \hat{A}^{n-1})$ über, wie sie durch Anwendung der diskreten Fouriertransformation entsteht. Die Teilmatrizen $\hat{A}^k, k \in \mathbb{Z}_n$, gemäß (3.118) haben die Dimension (9×9) und besitzen alle die Struktur

$$\hat{A}^k = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^k & 0 & 0 \\ \hat{A}_{1,0}^k & \hat{A}_{1,1}^k & 0 \\ \hat{A}_{2,0}^k & \hat{A}_{2,1}^k & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4.3}$$

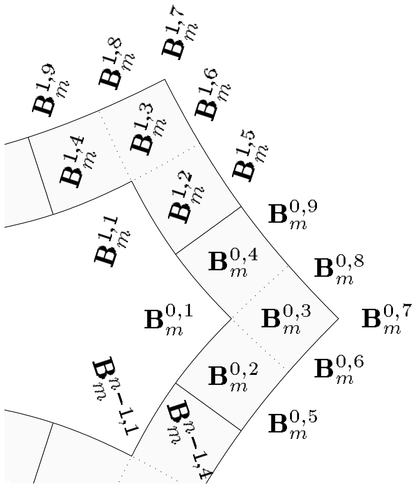


Abbildung 4.3. Indizierung der Kontrollpunkte für den Doo-Sabin-Algorithmus und das Kantenmittenverfahren.

Mit $p := 9/16, q := 3/16, r := 1/16$ sind die Teilmatrizen gegeben durch

$$\hat{A}^k_{10} = \begin{pmatrix} p + \overline{w}_n q \\ p \\ p + w_n q \end{pmatrix} , \quad \hat{A}^k_{11} = \begin{pmatrix} q & 0 & \overline{w}_n r \\ q & r & q \\ w_n r & 0 & q \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^k_{20} = \begin{pmatrix} q + \overline{w}_n r \\ q \\ r \\ q \\ q + w_n r \end{pmatrix} , \quad \hat{A}^k_{21} = \begin{pmatrix} p & 0 & \overline{w}_n q \\ p & q & r \\ q & p & q \\ r & q & p \\ w_n q & 0 & p \end{pmatrix} , \tag{4.4}$$

und $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\hat{\alpha}^0, \ldots, \hat{\alpha}^{n-1}]$ ist die diskrete Fouriertransformierte des Gewichtsvektors $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-1}]$. Wegen der Eigenschaften (4.2) ist $\hat{\alpha}^0 = 1$ und $\hat{\alpha}^k = \hat{\alpha}^{n-k} \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, n-1$.

1.3. Eine notwendige Bedingung. Wir leiten nun eine einfache Bedingung für die Gewichte $\boldsymbol{\alpha}$ her, die notwendig ist, um einen C^1-Algorithmus zu erhalten. Die Matrix $\hat{A}^k$ hat die Eigenwerte $\hat{a}^k, 1/4, 1/8, 1/16, 0$. Also ist $1/4$ ein geometrisch n-facher Eigenwert von A, und es muss wegen $n \geq 3$ für den subdominanten Eigenwert $\lambda > 1/4$ gelten. Gemäß Satz 3.21 hat dieser den Fourierindex $\{1, n-1\}$, also $\lambda = \hat{\alpha}^1 = \hat{\alpha}^{n-1}$. Damit ergibt sich als notwendige Bedingung die Ungleichung

$$1 > \hat{\alpha}^1 > \max\{1/4, |\hat{\alpha}^2|, \ldots, |\hat{\alpha}^{n/2}|\} . \tag{4.5}$$

Die lange Zeit gehegte Vermutung, dass diese Bedingung auch hinreichend sei, wird an späterer Stelle widerlegt werden.

1.4. Die charakteristische Abbildung. Der Eigenvektor $\hat{\mathbf{v}}$ der Matrix $\hat{A}^1$ zum subdominanten Eigenwert λ kann explizit berechnet werden. Setzen wir wie zuvor $w_n := c_n + is_n := \exp(2\pi i/n)$, dann erhalten wir

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2\lambda(16\lambda-1)(8\lambda-1)(4\lambda-1) \\ 6\lambda(16\lambda-1)(6\lambda-1+2\overline{w}_n\lambda) \\ 18\lambda(32\lambda^2-1+4c_n\lambda) \\ 6\lambda(16\lambda-1)(6\lambda-1+2w_n\lambda) \\ (16\lambda-1)\big(12\lambda^2+18\lambda-3+\overline{w}_n(4\lambda^2+12\lambda-1)\big) \\ 6\lambda\big(32\lambda^2+64\lambda-12+c_n(20\lambda+1)-is_n(16\lambda-1)\big) \\ 64\lambda^3+512\lambda^2-46\lambda-8+36c_n\lambda(2\lambda+1) \\ 6\lambda\big(32\lambda^2+64\lambda-12+c_n(20\lambda+1)+is_n(16\lambda-1)\big) \\ (16\lambda-1)\big(12\lambda^2+18\lambda-3+w_n(4\lambda^2+12\lambda-1)\big) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Wir zeigen nun, dass bei der gewählten Skalierung und für $\lambda \in (1/4, 1)$ die zugehörige charakteristische Abbildung normiert ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi^0_*(2,2) = \frac{\hat{\mathbf{v}}^3+\hat{\mathbf{v}}^6+\hat{\mathbf{v}}^7+\hat{\mathbf{v}}^8}{4} &= P(\lambda)+c_nQ(\lambda) \\ &:= (256\,\lambda^3+320\lambda^2-52\lambda-2)+c_n\left(96\lambda^2+12\lambda\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Für $n \geq 3$ ist $c_n \geq -1/2$. Weiterhin ist $P(\lambda) > 320\lambda^2 - 54\lambda - 2$ und $Q(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in (1/4, 1)$ und damit

$$\begin{aligned} P(\lambda)+c_nQ(\lambda) &> 320\lambda^2-54\lambda-2-(96\lambda^2+12\lambda)/2 \\ &= 272\lambda^2-60\lambda-2 = 2(4\lambda-1)(34\lambda+1). \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\Psi^0_*(2,2)$ ist also reell und positiv für $\lambda \in (1/4, 1)$, wie gefordert.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Eigenvektor $\hat{\mathbf{v}}$ und damit die charakteristische Abbildung nur vom Wert des subdominanten Eigenwerts $\lambda = \hat{\alpha}^1 = \hat{\alpha}^{n-1}$ und von der Ordnung n der irregulären Ecke abhängt. Alle anderen Fourierkoeffizienten $\hat{\alpha}^2, \ldots, \hat{\alpha}^{n-2}$ haben keinen Einfluss, sofern die Bedingung (4.5) erfüllt ist.

1.5. Verifikation. Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion des Falls $\lambda = 1/2$, wie er insbesondere auch für die Originalgewichte (4.1) auftritt. Arrangieren wir die Einträge des Eigenvektors $\hat{\mathbf{v}}$ zweckmäßigerweise in Form einer (3×3)-Matrix, wie dies bei Tensorprodukt B-Splines üblich ist, siehe Abbildung 4.3, dann erhalten wir

$$\hat{\mathbf{v}} = 3\begin{bmatrix} 7 & 14+7w_n & 21+14w_n \\ 14+7\overline{w}_n & 21+6c_n & 28+2\overline{w}_n+9w_n \\ 21+14\overline{w}_n & 28+2w_n+9\overline{w}_n & 35+12c_n \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Das Segment Ψ_*^0 der charakteristischen Abbildung besteht aus drei biquadratischen Patches, die in Bernstein-Bézier-Form die folgenden Koeffizienten haben:

$$\begin{array}{ccccc}
\substack{28+28\,c_n \\ 28\,s_n} & \substack{35+21,\,c_n \\ 21\,s_n} & \substack{42+19\,c_n \\ 14\,s_n} & \substack{49+17\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{56+20\,c_n \\ 0} \\[1em]
\substack{21+21\,c_n \\ 21\,s_n} & \substack{28+14\,c_n \\ 14\,s_n} & \substack{35+13\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{42+12\,c_n \\ 0} & \substack{49+17\,c_n \\ -7\,s_n} \\[1em]
\substack{14+14\,c_n \\ 14\,s_n} & \substack{21+7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{28+10\,c_n \\ 0} & \substack{35+13\,c_n \\ -7\,s_n} & \substack{42+19\,c_n \\ -14\,s_n} \\[1em]
 & & \substack{21+7\,c_n \\ -7\,s_n} & \substack{28+14\,c_n \\ -14\,s_n} & \substack{35+21\,c_n \\ -21\,s_n} \\[1em]
 & & \substack{14+14\,c_n \\ -14\,s_n} & \substack{21+21\,c_n \\ -21\,s_n} & \substack{28+28\,c_n \\ -28\,s_n}
\end{array} \; * \; \frac{3}{2}. \tag{4.10}$$

Dabei steht jeweils der Realteil eines Koeffizienten über dessen Imaginärteil. Es ist beispielsweise $\Psi_*^0(1,2) = 42+19c_n+i14s_n$. Berechnen wir die partielle Ableitung $\Psi_{*,v}^0 = \Psi_{1,v}^0 + i\Psi_{2,v}^0$ bezüglich v, dann erhalten wir drei quadratisch-lineare Patches mit Koeffizienten

$$\begin{array}{ccccc}
\substack{7+7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+6\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+5\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+3\,c_n \\ 7\,s_n} \\[1em]
\substack{7+7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7+3\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7-c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7-2\,c_n \\ 7\,s_n} \\[1em]
 & & \substack{7-7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7-7\,c_n \\ 7\,s_n} & \substack{7-7\,c_n \\ 7\,s_n}
\end{array} \; * \; 3. \tag{4.11}$$

Sowohl der Real– als auch der Imaginärteil aller Koeffizienten sind positiv. Somit ist nach der konvexen Hülle Eigenschaft und Korollar 3.26 der Algorithmus C^1-regulär.

Die Situation für allgemeines λ ist subtiler, insbesondere, wenn λ nahe bei 1 liegt. Zum einen ist Korollar 3.26 im Allgemeinen zu schwach. Zum anderen stellt sich heraus, dass es einen von n abhängigen Grenzwert $\lambda_{\text{sup}}(n) < 1$ gibt, so dass für $1 > \lambda \geq \lambda_{\text{sup}}$ auch die Voraussetzungen von Satz 3.25 nicht erfüllt sind. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass dies tatsächlich mit einem Verlust der Regularität des Algorithmus einhergeht.

Um Satz 3.25 anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass die charakteristische Abbildung Ψ_* regulär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Jacobi–Determinante J^0 des Segments Ψ_*^0 keine Nullstellen hat. J^0 besteht aus drei bikubischen Patches, die in Bernstein-Bézier-Form dargestellt werden können. Dazu benötigen wir insgesamt $3 * 16 = 48$ Koeffizienten $J_\mu^0, \mu = 1, \ldots, 48$, die von n und λ abhängen. Eine explizite Berechnung zeigt, dass alle diese Koeffizienten die Form

$$J_\mu^0(\lambda, c_n) = s_n(16\lambda - 1)K_\mu(c_n, \lambda) \tag{4.12}$$

$$K_\mu(\lambda, c_n) = P_\mu(\lambda) + c_n Q_\mu(\lambda) \tag{4.13}$$

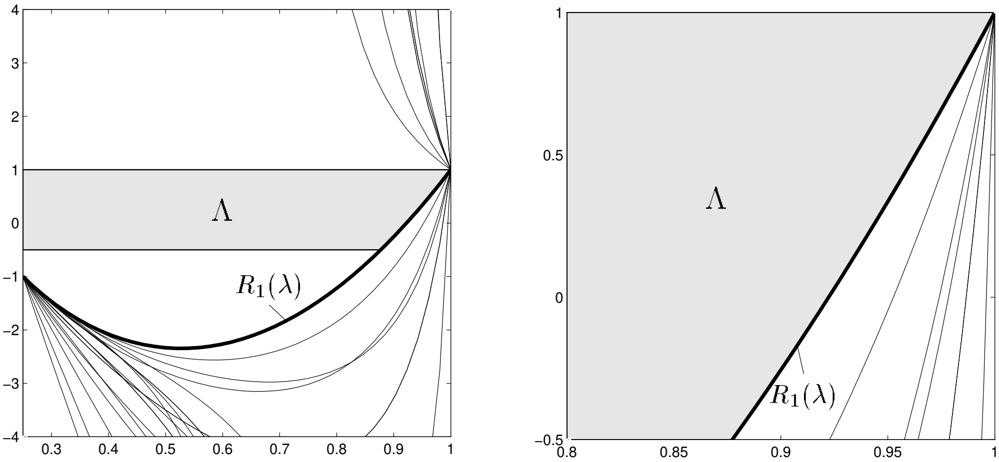


ABBILDUNG 4.4. Rationale Funktionen $R_1, \ldots, R_{48}$. Der zulässige Bereich Λ ist schattiert dargestellt.

haben, wobei P_μ, Q_μ Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad ≤ 6 in λ sind. Wenn für gegebenes $(c_n, \lambda) \in [-1/2, 1) \times (1/4, 1)$ alle $K_\mu, \mu = 1, \ldots, 48$, positiv sind, dann sind auch alle $J^0_\mu, \mu = 1, \ldots, 48$, positiv, da $s_n > 0$ und $16\lambda - 1 > 0$.

Wir ordnen dem Koeffizienten, der dem Wert $J^0(1,1)$ entspricht, o.B.d.A. den Index $\mu = 1$ zu, das heißt,

$$J^0(1,1)/s_n(16\lambda - 1) = K_1(\lambda, c_n) = P_1(\lambda) + c_n Q_1(\lambda) \,. \tag{4.14}$$

Die Polynome P_1 und Q_1 sind gegeben durch

$$P_1(\lambda) := 96\lambda^3(-128\lambda^3 + 128\lambda^2 - 7\lambda - 2) \tag{4.15}$$

$$Q_1(\lambda) := 864\lambda^4 \,. \tag{4.16}$$

Für die rationalen Funktionen $R_\mu(\lambda) := -P_\mu(\lambda)/Q_\mu(\lambda)$, $\mu = 1, \ldots, 48$, und festes $\lambda \in (1/4, 1)$ gilt, wie man mit elementaren Mitteln zeigen kann,

$$R_\mu(\lambda) \leq R_1(\lambda) < 1 \quad \text{oder} \quad R_\mu(\lambda) \geq 1 > R_1(\lambda) \,. \tag{4.17}$$

Die Nullstellen der Funktion $K_\mu(\lambda, c_n) : (1/4, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegen alle auf dem Graphen von R_μ. Da dieser entweder unterhalb des Graphen von R_1 oder oberhalb der Geraden $c_n = 1$ verläuft, ist das Gebiet

$$\Lambda := \big\{(\lambda, c_n) \in (1/4, 1) \times [-1/2, 1) : c_n > R_1(\lambda)\big\} \tag{4.18}$$

frei von Nullstellen. Abbildung 4.4 zeigt auf der linken Seite schattiert das Gebiet Λ und die Graphen der Funktionen $R_1, \ldots, R_{48}$. Auf der rechten Seite ist ein vergrößerter Ausschnitt des kritischen Bereichs zu sehen. Betrachten wir speziell den Punkt $(1/2, 0)$. Dieser liegt in Λ, da $R_1(1/2) = -7/3$. Ferner ist $K_\mu(1/2, 0) = 126$ und somit K_μ positiv auf Λ für alle $\mu = 1, \ldots, 48$. Mit der konvexen Hülle Eigenschaft folgt hieraus die Regularität von Ψ_* für $(\lambda, c_n) \in \Lambda$.

Um Satz 3.25 anwenden zu können, bleibt zu zeigen, dass $\Psi^0_{1,v}(1,t)$, $\Psi^0_{2,v}(1,t) > 0$ für $t \in [0,1]$ und $(c_n, \lambda) \in \Lambda$. Da beide Funktionen linear in t

sind, genügt es, die Positivität für $t \in \{0,1\}$ zu überprüfen. Dies folgt aber unmittelbar aus

$$\Psi^0_{1,v}(1,0) = 2\lambda(16\lambda-1)(4\lambda-1)(4\lambda+1)(1-c_n) \tag{4.19}$$

$$\Psi^0_{2,v}(1,0) = 2\lambda(16\lambda-1)(4\lambda-1)(4\lambda+1)s_n \tag{4.20}$$

$$\Psi^0_{2,v}(1,1) = 12s_n\lambda^2(16\lambda-1) \tag{4.21}$$

$$\Psi^0_{1,v}(1,1) = J^0_1 \,/\, 2\Psi^0_{2,v}(1,1)\,. \tag{4.22}$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts wie folgt zusammen:

Satz 4.1. *Sei $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha^0,\dots,\alpha^{n-1}]$ ein Vektor symmetrischer Gewichte gemäß* (4.2) *und $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\hat\alpha^0,\dots,\hat\alpha^{n-1}]$ dessen diskrete Fouriertransformierte. Wenn $\lambda := \hat\alpha^1_n = \hat\alpha^{n-1}_n$ den Bedingungen*

$$1 > \lambda > \max\{1/4, |\hat\alpha^2_n|,\dots,|\hat\alpha^{n-2}_n|\} \tag{4.23}$$

$$128\lambda^2(1-\lambda) - 7\lambda - 2 + 9\lambda\cos(2\pi/n) > 0 \tag{4.24}$$

genügt, dann ist der Doo-Sabin-Algorithmus C^1-regulär.

Beweis. Zum Beweis bleibt lediglich anzumerken, dass die Ungleichung (4.24) äquivalent zu $P_1(\lambda) + c_nQ_1(\lambda) > 0$ und damit zu $c_n > R_1(\lambda)$ ist. □

1.6. Regularitätsverlust jenseits des kritischen Eigenwerts. Im Gegensatz zu der unteren Schranke $\lambda > 1/4$, deren Existenz evident ist, mag eine obere Schranke, wie sie in Satz 4.1 auftaucht, durchaus überraschen. Wir müssen allerdings klären, ob es sich dabei um ein Artefakt handelt, das lediglich durch Anwendung der hinreichenden Bedingungen in Satz 3.25 entstand, oder ob jenseits dieser Grenze tatsächlich ein Regularitätsverlust auftritt. Dass Letzteres der Fall ist, wollen wir nun zeigen.

Wir kennen bereits das Vorzeichen des Wertes $J^0(1,1) = s_n(16\lambda-1)K_1$ in Abhängigkeit von c_n und λ,

$$\operatorname{sign} J^0(1,1) = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad c_n > R_1(\lambda) \\ -1 & \text{falls} \quad c_n < R_1(\lambda)\,. \end{cases} \tag{4.25}$$

Betrachten wir dagegen $J^0(1,0)$, dann erhalten wir

$$J^0(1,0) = 288\, s_n\lambda^2(16\lambda-1)^2(8\lambda-1)(4\lambda-1)^2(1-\lambda)\,. \tag{4.26}$$

Dieser Wert ist positiv für alle $\lambda \in (1/4,1)$, unabhängig vom Wert von c_n. Also besitzt die charakteristische Determinante einen Vorzeichenwechsel, falls $-1/2 \le c_n < R_1(\lambda)$. Nach Satz 3.13 ist der Doo-Sabin-Algorithmus dann also nicht normalenstetig. Dies beweist, dass die durch den Graphen von R_1 definierte Grenze scharf ist. Abbildung 4.5 zeigt jeweils einen Ausschnitt der Parameterlinien der charakteristischen Abbildung für $n = 3$ und zwei verschiedene Werte von λ. Links ist $\lambda = 1/2$, also der Fall der Standardgewichte dargestellt. Regularität und Injektivität sind augenscheinlich gegeben. Demgegenüber wurde links $\lambda = 0.95$ gewählt. Hier ist $c_3 = -1/2 < R_1(0.95) \approx 0.34$ und die charakteristische Abbildung weder regulär noch injektiv. Die Auswirkung auf die Gestalt

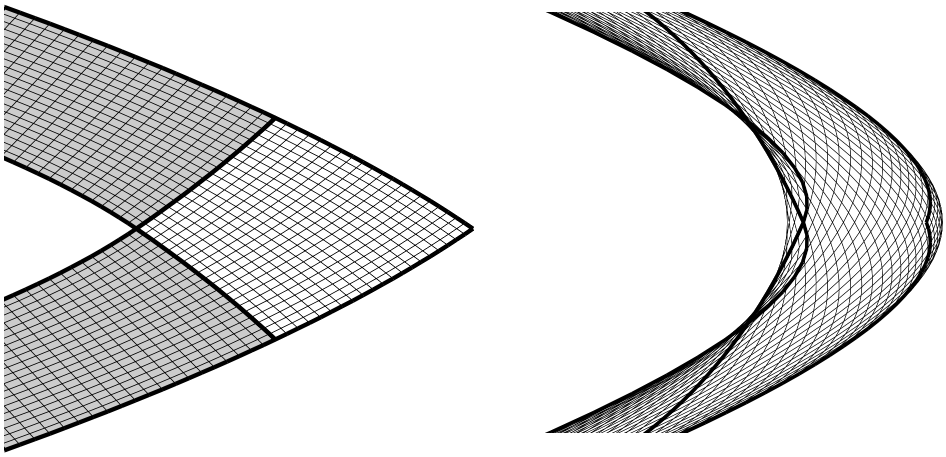


Abbildung 4.5. Charakteristische Abbildung für $n = 3$ und $\lambda = 0.5$ *(links)* und $\lambda = 0.95 > \lambda_{\sup}(3)$ *(rechts)*.

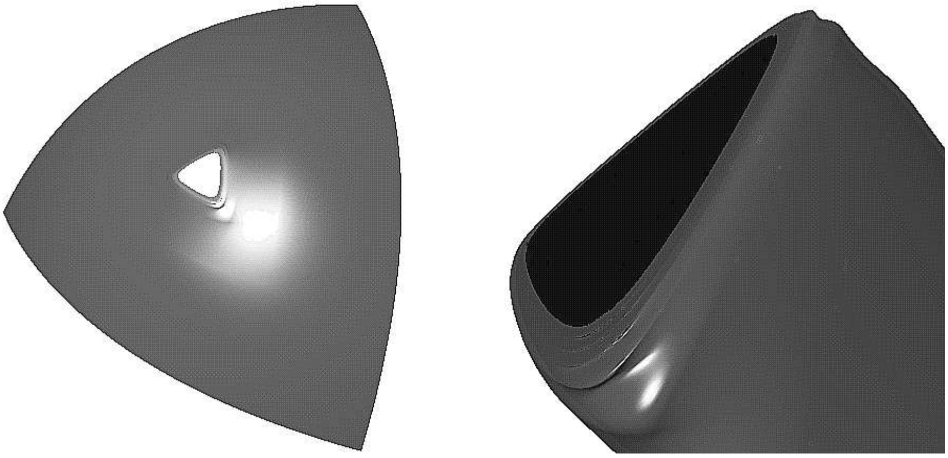


Abbildung 4.6. Nichtreguläre Subdivisionsfläche für $\lambda = 0.95 > \lambda_{\sup}(3)$.

einer damit erzeugten Subdivisionsfläche ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Links ist die Vereinigung einiger Splineringe zu sehen und rechts die nicht maßstäbliche Vergrößerung eines Ausschnitts in der Nähe der Irregularität. Die „Faltigkeit" der Fläche ist dabei klar zu erkennen. Diskutieren wir abschließend noch kurz die Auswirkungen der gefundenen Grenze auf den zulässigen Wertebereich für λ in Abhängigkeit von n. Ist die Ordnung n der irregulären Ecke gegeben, dann liegt damit auch der Wert von $c_n = \cos(2\pi/n)$ fest. Wir befinden uns damit im Diagramm 4.4 auf einer horizontalen Linie. Der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Graphen von R_1 definiert den *kritischen Eigenwert*, das heißt das Supremum der zulässigen Eigenwerte,

$$\lambda_{\sup}(n) := \sup\{\lambda \in (1/4, 1) : R_1(\lambda) < c_n\}\,. \tag{4.27}$$

n	$\lambda_{\sup}(n)$	n	$\lambda_{\sup}(n)$
3	0.8772872432	8	0.9786066941
4	0.9223409885	9	0.9829902941
5	0.9478340134	10	0.9861607079
6	0.9628618416	11	0.9885250887
7	0.9723152935	12	0.9903339733

TABELLE 1. Werte des kritischen Eigenwerts $\lambda_{\sup}(n)$ für $n = 3, \ldots, 12$.

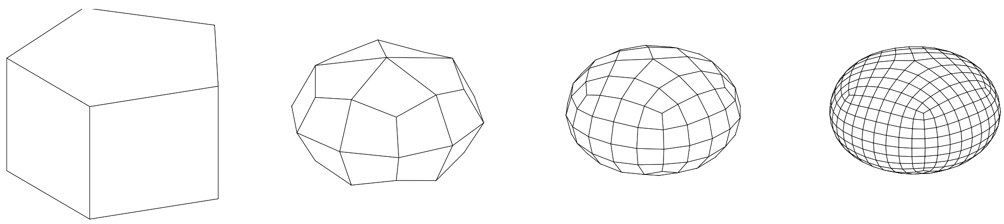


ABBILDUNG 4.7. Verfeinerung eines Kontrollnetzes durch den Catmull-Clark-Algorithmus.

Aufgrund des streng monotonen Wachstums der Funktion R_1 im Wertebereich $[-1/2, 1)$ ist der kritische Eigenwert wohldefiniert und streng monoton wachsend in n. Der kleinste Wert tritt also für $n = 3$ auf, man erhält

$$\lambda_{\sup}(3) = \frac{\sqrt{187}}{24} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{27\sqrt{5563}}{1576}\right)\right) + \frac{1}{3} \approx 0.8773\,. \tag{4.28}$$

Tafel 1.6 zeigt weitere Werte für $n = 3, \ldots, 12$. Das asymptotische Verhalten für große Werte von n ist

$$\lambda_{\sup}(n) = 1 - \frac{\pi^2}{7n^2} + O(n^{-4})\,. \tag{4.29}$$

2. Der Catmull-Clark-Algorithmus

Der Catmull-Clark-Algorithmus ist eine Verallgemeinerung des Subdivisionsschemas für bikubische uniforme Tensorproduktflächen und damit ein Algorithmus vom Typ $(3, 2)$. Hierbei wird jedes n-Eck eines gegebenen Netzes von Punkten in n Vierecke unterteilt, siehe Abbildung 4.7. Somit entstehen nach dem ersten Verfeinerungsschritt stets reine Vierecksnetze, so dass wir uns bei der nun folgenden Analyse auf solche beschränken können.

2.1. Struktur und Gewichte. Analog zur Subdivision bikubischer Tensorprodukt Splineflächen verwendet der Catmull-Clark-Algorithmus drei Masken von Gewichten, nämlich je eine zum Einfügen neuer Punkte in die Mitte von Facetten und Kanten sowie eine zur Korrektur der Position der gegebenen Ecken, siehe Abbildung 4.8. Die beiden erstgenannten Masken lassen sich unabhängig

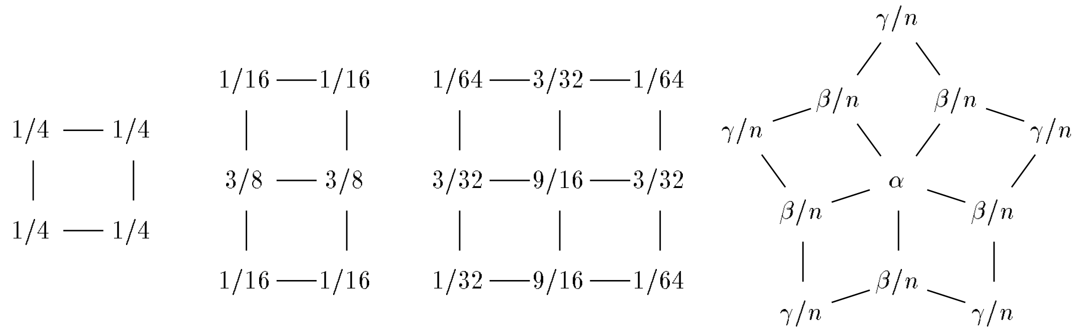


Abbildung 4.8. Gewichte für den Catmull-Clark-Algorithmus.

von der topologischen Struktur des Vierecksnetzes überall anwenden und werden vom Tensorproduktfall übernommen. Bei der letztgenannten ist jedoch die Ordnung der Ecke, das ist hier gerade die Anzahl der Nachbarecken, entscheidend. Die in Abbildung 4.8 gezeigte Anordnung garantiert Symmetrie und affine Invarianz für beliebige Parameter

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha+\beta+\gamma=1\,. \tag{4.30}$$

In [CC78] schlagen E. Catmull und J. Clark die Werte

$$\alpha = 1-\frac{7}{4n}\,,\ \beta=\frac{3}{2n}\,,\ \gamma=\frac{1}{4n} \tag{4.31}$$

vor. Dafür erhält man insbesondere für $n=4$ die Gewichte des regulären Falls zurück.

2.2. Die Subdivisionsmatrix. Betrachten wir nun den Catmull-Clark-Algorithmus als Rekursion für Splineringe. Die Splineringe bestehen aus n Segmenten, die wiederum in drei bikubische Patches gegliedert sind. Die Segmente $\mathbf{x}_m^j, j \in \mathbb{Z}_n$, können lokal als Teil einer uniformen bikubischen Tensorprodukt B-Splinefläche betrachtet werden, deren Koeffizienten durch einen Teil des Kontrollnetzes gegeben sind. Der zugehörige Vektor von Kontrollpunkten $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0;\ldots;\mathbf{B}_m^{n-1}]$ besteht aus n Teilblöcken mit je 13 Kontrollpunkten, $\mathbf{B}_m^j = [\mathbf{B}_m^{j,1};\ldots;\mathbf{B}_m^{j,13}]$. Abbildung 4.9 zeigt die Anordnung der Kontrollpunkte sowie die verwendete Indizierung. Man beachte, dass der zentrale Punkt $\mathbf{M}_m$ durch n identische Kopien ersetzt wurde, um die gewünschte zyklische Struktur zu erhalten,

$$\mathbf{M}_m := \mathbf{B}_m^{0,1} = \cdots = \mathbf{B}_m^{n-1,1}\,. \tag{4.32}$$

Entsprechend sind die zugehörigen Basisfunktionen alle identisch,

$$\boldsymbol{\varphi}_1^1 = \cdots = \boldsymbol{\varphi}_1^{n-1}\,. \tag{4.33}$$

Dies hat zur Folge, dass die Basis $\boldsymbol{\varphi}$ einen nichttrivialen Kern hat, es gilt

$$W_{\boldsymbol{\varphi}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{13n} : \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{v}^{j,1} = 0 \right\}\,, \tag{4.34}$$

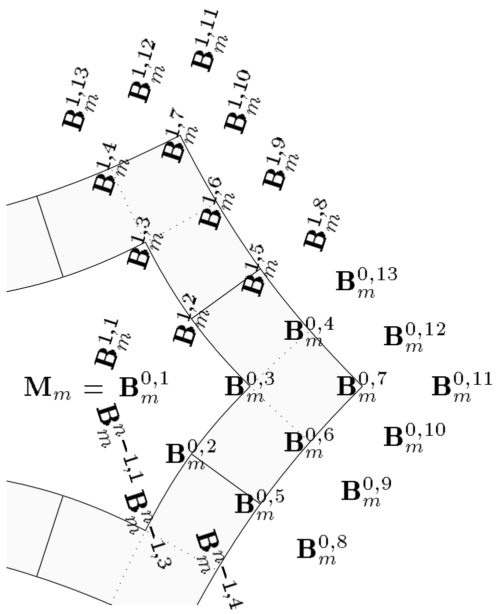


ABBILDUNG 4.9. Indizierung der Kontrollpunkte für den Catmull-Clark-Algorithmus.

vergleiche auch (3.4). Zur Konstruktion der Subdivisionsmatrix A verwenden wir die Identität

$$\mathbf{M}_m = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{B}_m^j \,. \tag{4.35}$$

Das heißt, wenn w ein Gewicht ist, das auf $\mathbf{M}_m$ wirkt, dann setzen wir den Wert w/n in alle Spalten $A^{j,1}$ von A, die auf $\mathbf{B}_m^{j,1}$ wirken, $j \in \mathbb{Z}_n$. Dann sind die Spalten $A^{0,1} = \cdots = A^{n-1,1}$ identisch und es gilt $AW_{\boldsymbol{\varphi}} = 0$. Damit ist $V_{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \subset \ker A$ und A ist eine Subdivisionsmatrix im Sinne von Definition 3.1. Wir geben nun wieder direkt die blockdiagonale Matrix $\hat{A} = \operatorname{diag}(\hat{A}^0, \ldots, \hat{A}^{n-1})$ an, die aus A durch Anwendung der diskreten Fouriertransformation entsteht. Die 13×13-Matrizen $\hat{A}^k, k \in \mathbb{Z}_n$, haben alle die Struktur

$$\hat{A}^k = \begin{pmatrix} \hat{A}^k_{0,0} & 0 & 0 \\ \hat{A}^k_{1,0} & \hat{A}^k_{1,1} & 0 \\ \hat{A}^k_{2,0} & \hat{A}^k_{2,1} & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.36}$$

Mit

$$p_1 := 1/64\,,\ p_2 := 3/32\,,\ p_3 := 9/16\,,\ q_1 := 1/16\,,\ q_2 := 3/8\,,\ r := 1/4 \tag{4.37}$$

sind die Teilmatrizen gegeben durch

$$\hat{A}^k_{0,0} = \begin{pmatrix} \alpha\delta_{k,0} & \beta\delta_{k,0} & \gamma\delta_{k,0} \\ q_2\delta_{k,0} & 2q_1c_n + q_2 & q_1(1+\overline{w}_n) \\ r\delta_{k,0} & r(1+w_n) & r \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

und

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^k_{1,0} & \hat{A}^k_{1,1} \\ \hat{A}^k_{2,0} & \hat{A}^k_{2,1} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
q_2\delta_{k,0} & q_1 + q_2 w_n & q_2 & q_1 & q_1 w_n & 0 & 0 \\
p_2\delta_{k,0} & 2p_1 c_n + p_3 & p_2(1+\overline{w}_n) & p_1\overline{w}_n & p_2 & p_1 & 0 \\
q_1\delta_{k,0} & q_1 w_n + q_2 & q_2 & 0 & q_1 & q_1 & 0 \\
p_1\delta_{k,0} & p_2(1+w_n) & p_3 & p_2 & p_1(1+w_n) & p_2 & p_1 \\
\hline
0 & q_2 & q_1(1+\overline{w}_n) & q_1\overline{w}_n & q_2 & q_1 & 0 \\
0 & r & r & 0 & r & r & 0 \\
0 & q_1 & q_2 & q_1 & q_1 & q_2 & q_1 \\
0 & 0 & r & r & 0 & r & r \\
0 & q_1 w_n & q_2 & q_2 & q_1 w_n & q_1 & q_1 \\
0 & r w_n & r & r & r w_n & 0 & 0
\end{array}\right) . \tag{4.39}$$

Die Eigenwerte $1/8, 1/16, 1/32, 1/64$ der Teilmatrix $\hat{A}^k_{1,1}$ sind geometrisch n-fache Eigenwerte von A. Andere von Null verschiedene Eigenwerte kommen nur aus dem Block $\hat{A}^k_{0,0}$. Für $k = 0$ erhalten wir den obligatorischen Eigenwert $\lambda_0 = 1$ und, wenn wir $\gamma := 1 - \alpha - \beta$ setzen, dazu das Paar

$$\lambda^0_{1,2} = \left(4\alpha - 1 \pm \sqrt{(4\alpha - 1)^2 + 8\beta - 4}\right)/8\,, \tag{4.40}$$

das entweder reell oder konjugiert komplex sein kann. Für $k \neq 0$ sind die von Null verschiedenen Eigenwerte von $\hat{A}^k_{0,0}$

$$\lambda^k_1 = \left(c_{n,k} + 5 + \sqrt{(c_{n,k} + 9)(c_{n,k} + 1)}\right)/16 \tag{4.41}$$

$$\lambda^k_2 = \left(c_{n,k} + 5 - \sqrt{(c_{n,k} + 9)(c_{n,k} + 1)}\right)/16\,, \tag{4.42}$$

wobei $c_{n,k} := \cos(2\pi k/n)$.

2.3. Eine notwendige Bedingung. Da der subdominante Eigenwert den Fourierindex $\{1, n-1\}$ haben muss, um einen C^1-Algorithmus zu erhalten, setzen wir

$$\lambda := \lambda^1_1 = \lambda^{n-1}_1 = \left(c_n + 5 + \sqrt{(c_n + 9)(c_n + 1)}\right)/16\,. \tag{4.43}$$

Einige elementare Abschätzungen zeigen, dass dann die Ungleichungen

$$1 > \lambda > 1/4 > \lambda^k_2 > 1/8\,, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{4.44}$$

$$\lambda > \lambda^k_1 > 1/4\,, \quad k = 2, \ldots, n-2 \tag{4.45}$$

für alle $n \geq 3$ gelten. Folglich ist λ subdominant genau dann, wenn die Gewichte α, β, γ so gewählt sind, dass

$$\lambda > \max\{|\lambda^0_1|, |\lambda^0_2|\}\,. \tag{4.46}$$

Eine Charakterisierung der Menge aller zulässiger Gewichte findet sich in [BS86]. Dort wird auch gezeigt, dass die Originalgewichte gemäß (4.31) dieser Bedingung genügen.

2.4. Die charakteristische Abbildung. Wie oben gezeigt, hat der Wert der Gewichte α, β, γ weder einen Einfluss auf den subdominanten Eigenwert λ noch auf die Matrix $\hat{A}^1$, sofern (4.46) gilt. Damit hängt die charakteristische Abbildung allein von $c_n \in [-1/2, 1)$ ab. Die Zuordnung des subdominanten Eigenwerts λ gemäß (4.43) ist injektiv und lässt sich im Wertebereich invertieren,

$$c_n = \frac{16\lambda^2 - 10\lambda + 1}{2\lambda}, \quad \lambda \in \Lambda := [(9 + \sqrt{17})/32, (3 + \sqrt{5})/8)\,. \tag{4.47}$$

Im Folgenden erweist es sich als zweckmäßig, die charakteristische Abbildung in Abhängigkeit von der kontinuierlichen Variablen $\lambda \in \Lambda$ zu betrachten. Der Eigenvektor $\hat{\mathbf{v}}$ hat bei geeigneter Skalierung die Form $\hat{\mathbf{v}} = (4\lambda - 1)\hat{\mathbf{v}}_r + 2s\lambda(64\lambda - 1)i\hat{\mathbf{v}}_i$, wobei

$$\hat{\mathbf{v}}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\lambda^2(64\lambda-1)(32\lambda-1)(16\lambda-1)(4\lambda-1) \\ 8\lambda^2(64\lambda-1)(32\lambda-1)(16\lambda-1) \\ 4\lambda^2(64\lambda-1)(928\lambda^2+228\lambda-31) \\ 8\lambda^2(64\lambda-1)(16\lambda-1)(4\lambda-1)(4\lambda+13) \\ 4\lambda^2(64\lambda-1)(928\lambda^2+228\lambda-31) \\ 80\lambda^2(1280\lambda^3+2128\lambda^2-56\lambda-13) \\ (64\lambda-1)(16\lambda-1)(4\lambda-1)(100\lambda^2+42\lambda-1) \\ 4\lambda(64\lambda-1)(640\lambda^3+688\lambda^2-82\lambda-1) \\ 20\lambda(2048\lambda^4+11040\lambda^3+812\lambda^2-165\lambda-1) \\ 40\lambda(5248\lambda^3+1568\lambda^2-133\lambda-5) \\ 20\lambda(2048\lambda^4+11040\lambda^3+812\lambda^2-165\lambda-1) \\ 4\lambda(64\lambda-1)(640\lambda^3+688\lambda^2-82\lambda-1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -4\lambda^2(32\lambda-1)(16\lambda-1) \\ 0 \\ 84\lambda^2(8\lambda-1) \\ -8\lambda^2(16\lambda-1)(4\lambda+13) \\ -84\lambda^2(8\lambda-1) \\ 0 \\ -(16\lambda-1)(100\lambda^2+42\lambda-1) \\ -4\lambda(160\lambda^2+132\lambda-1) \\ -20\lambda(8\lambda^2+15\lambda+1) \\ 0 \\ 20\lambda(8\lambda^2+15\lambda+1) \\ 4\lambda(160\lambda^2+132\lambda-1) \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Der Wert der zugehörigen charakteristischen Abbildung im Punkt $(2, 2)$ berechnet sich mit $b := [1/6, 2/3, 1/6]$ zu

$$\begin{aligned} \Psi^0_*(2,2) &= b \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}^3 & \hat{\mathbf{v}}^4 & \hat{\mathbf{v}}^{13} \\ \hat{\mathbf{v}}^6 & \hat{\mathbf{v}}^7 & \hat{\mathbf{v}}^{12} \\ \hat{\mathbf{v}}^9 & \hat{\mathbf{v}}^{10} & \hat{\mathbf{v}}^{13} \end{bmatrix} b^T \\ &= \frac{8}{9}\lambda(4\lambda-1)(139264\lambda^4 + 170496\lambda^3 + 112\,\lambda^2 - 1476\lambda - 11)\,. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Beispielsweise mit Hilfe einer Sturmschen Kette kann man zeigen, dass dieser Ausdruck im Intervall Λ keine Nullstellen hat. Ferner ergibt sich für $\lambda = 1/2$ der Wert $\Psi^0_*(2,2) = 13020$ und somit ist Ψ_* normiert für alle $\lambda \in \Lambda$.

2.5. Verifikation. Die Verifikation der C^1-Regularität des Catmull-Clark-Algorithmus für alle $n \geq 3$ kann mittels Korollar 3.26 erfolgen. Dazu berechnet man aus dem Vektor $\hat{\mathbf{v}}$ die Bernstein-Bézierdarstellung der drei bikubischen Patches, die das Segment Ψ^0_* bilden. Daraus gewinnt man durch Differenzenbildung die Kontrollpunkte der Ableitung in v-Richtung. Dies sind pro Patch 3×4, zusammen also 36 Koeffizienten $K_1, \ldots, K_{36}$. Diese haben alle die Form

$$K_\mu(\lambda) = P_\mu(\lambda) + is_n Q_\mu(\lambda)\,, \quad \mu = 1, \ldots, 36\,, \tag{4.50}$$

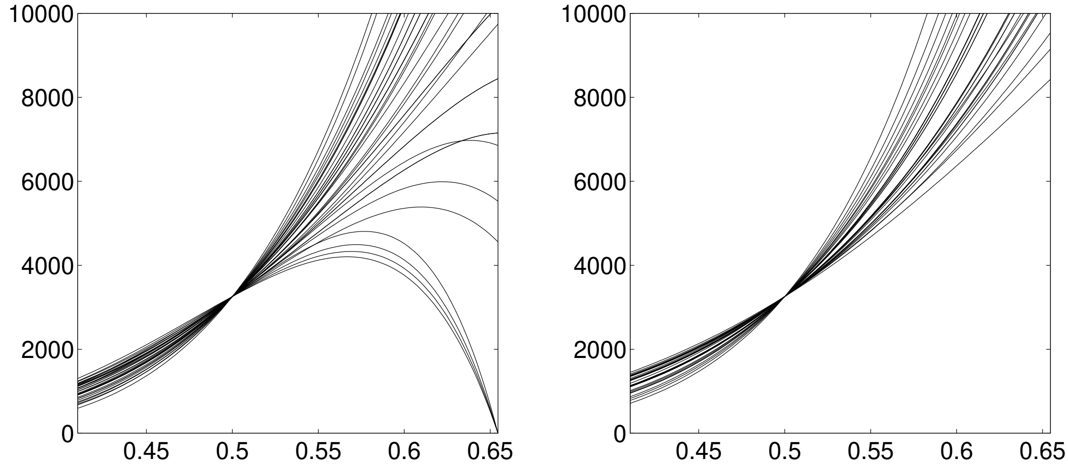


Abbildung 4.10. Verlauf der Funktionen $P_1, \dots, P_{36}$ *(links)* und $Q_1, \dots, Q_{36}$ *(rechts)* über dem Intervall $\Lambda \approx [0.410, 0.655)$.

wobei P_μ und Q_μ Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad 7 bzw. 6 in λ sind. Wenn deren Positivität für $\lambda \in \Lambda$ gezeigt werden kann, dann sind nach der konvexen Hülle Eigenschaft die Voraussetzungen von Korollar 3.26 erfüllt. Zum Nachweis der Positivität kann man folgendermaßen vorgehen: Da die explizite Berechnung Sturmscher Ketten für die irrationalen Grenzen des Intervalls Λ schwierig ist, wird ein etwas größeres Intervall mit rationalen Grenzen gewählt, beispielsweise $\Lambda' := \lambda[41/100, 66/100] \supset \Lambda$. Hierfür lassen sich die Sturmschen Ketten einfach auswerten und es zeigt sich, dass die Anzahl der Nullstellen in Λ' in allen Fällen 0 oder 1 ist. In den vier Fällen, in denen eine Nullstelle existiert, kann durch Einsetzen gezeigt werden, dass diese jeweils in $(3+\sqrt{5})/8$ und somit außerhalb von Λ liegt. Nachdem also kein Koeffizient Nullstellen in Λ besitzt, bleibt die Positivität in einem einzigen Punkt zu zeigen. Wählen wir dazu beispielsweise $\lambda = 1/2$, dann ist $P_\mu(1/2) = Q_\mu(1/2) = 3255$ für alle $\mu = 1, \dots, 36$. Abbildung 4.10 zeigt den Verlauf der Funktionen P_μ und Q_μ über dem Intervall Λ. Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts wie folgt zusammen:

Satz 4.2. *Sei $n \geq 3$, $c_n = \cos(2\pi/n)$ und*

$$\lambda := \left(c_n + 5 + \sqrt{(c_n+9)(c_n+1)}\right)/16 \tag{4.51}$$

$$\lambda^0_{1,2} := \left(4\alpha - 1 \pm \sqrt{(4\alpha-1)^2 + 8\beta - 4}\right)/8\,. \tag{4.52}$$

Der Catmull-Clark-Algorithmus mit Gewichten α, β und $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ ist genau dann ein C^1-Algorithmus, wenn $\lambda > \max\{|\lambda^0_1|, |\lambda^0_2|\}$.

3. Das Kantenmittenverfahren

Es ist kaum ein einfacherer Subdivisionsalgorithmus denkbar als der Folgende: Man konstruiere aus einem gegebenen Netz von Punkten ein neues, indem man die Mittelpunkte benachbarter Kanten verbindet, siehe Abbildung 4.11. Der

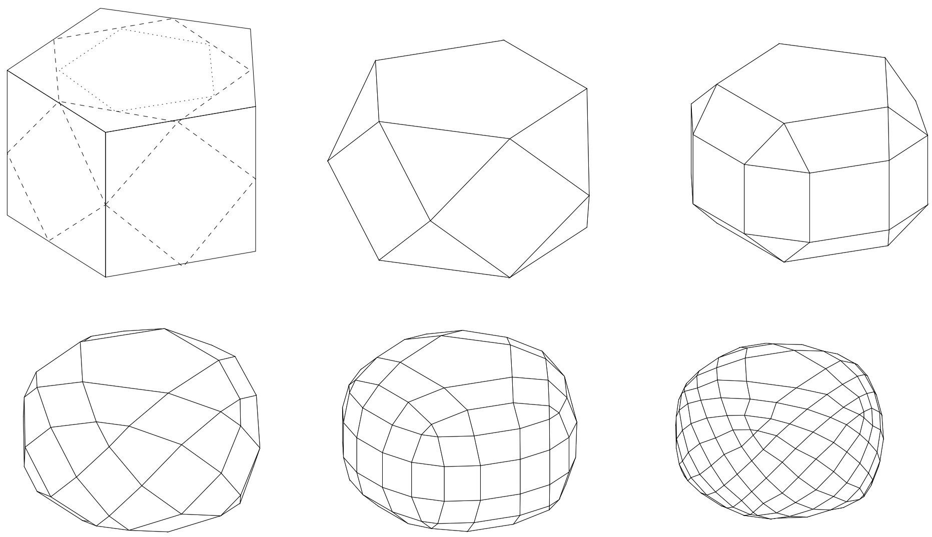


ABBILDUNG 4.11. Verfeinerung eines Kontrollnetzes durch das Kantenmittenverfahren.

Grund, warum wir hier dieses Verfahren diskutieren, ist neben der Einfachheit seiner Struktur insbesondere die Tatsache, dass für irreguläre Punkte der Ordnung $n = 3$ ein subdominanter Eigenwert $\lambda = 1/4$ auftritt, der die algebraische Vielfachheit 6 und die geometrische Vielfachheit 4 besitzt. So zeigt sich, dass die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie symmetrischer Verfahren in ihrer Allgemeinheit tatsächlich relevant für die Anwendungen ist.

3.1. Struktur und Gewichte. In seiner geometrischen Struktur ist das Kantenmittenverfahren nicht unmittelbar als Verallgemeinerung eines Standardalgorithmus für reguläre Topologien erkenntlich. Dies ändert sich, wenn wir jeweils zwei Subdivisionsschritte zusammenfassen. Dann entsteht ein Verfahren, das zum Doo-Sabin-Algorithmus topologisch äquivalent ist, das heißt, n-Ecke werden auf n-Ecke abgebildet und geeignet verknüpft. Dies ist in Abbildung 4.11 zu sehen, wenn man jeweils von einer Figur zur übernächsten übergeht. Aus drei benachbarten Punkten eines n-Ecks wird der entsprechende neue Punkt stets als Mitte der Kantenmitten berechnet.

Für $n = 4$, also im regulären Fall, stimmt ein solcher Doppelschritt des Kantenmittenverfahrens gerade mit dem Unterteilungsschema für Boxsplineflächen mit Richtungsmatrix

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

überein. Der zugehörige Boxspline [dBHR93], das sogenannte Zwart-Powell-Element, ist einmal stetig differenzierbar und besteht aus dreieckigen polynomialen Patches vom totalen Grad 2. Wir können also das Kantenmittenverfahren als die natürliche Verallgemeinerung eines faktorisierten Boxspline Subdivisionsalgorithmus betrachten. Auf eine Diskussion möglicher Varianten verzichten wir hier und verweisen stattdessen auf [PR98b]. Dort wird gezeigt, wie eine Modifikation der Gewichte im Fall $n \neq 4$ zur Verbesserung der Formeigenschaften des Algorithmus verwendet werden kann.

3.2. Die Subdivisionsmatrix. Betrachten wir nun das Kantenmittenverfahren als Rekursion für Splineringe. Die Splineringe bestehen aus n Segmenten, die jeweils in drei Patches gegliedert sind, welche wiederum aus vier quadratischen Dreieckspatches bestehen. Lokal können die Segmente $\mathbf{x}_m^j, j \in \mathbb{Z}_n$, als Teil einer Boxsplinefläche zur Richtungsmatrix Ξ betrachtet werden. Der zugehörige Vektor von Kontrollpunkten, sprich Boxsplinekoeffizienten, $\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_m^0; \ldots; \mathbf{B}_m^{n-1}]$ besteht aus n Teilblöcken mit je 9 Kontrollpunkten, $\mathbf{B}_m^j = [\mathbf{B}_m^{j,1}; \ldots; \mathbf{B}_m^{j,9}]$. Abbildung 4.3 zeigt die Anordnung der Kontrollpunkte sowie die verwendete Indizierung. Die Verwandschaft zum Doo-Sabin-Algorithmus zeigt sich auch beim Aufstellen der Subdivisionsmatrix A. Sie hat genau die Form (4.3), (4.4), wobei hier die Konstanten $p = 1/2, q = 1/4, r = 0$ zu verwenden sind. Wir erhalten für die von Null verschiedenen Spalten

$$\hat{A}^k(1:4,:) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^k & 0 & 0 & 0 \\ p + \overline{w}_n q & q & 0 & 0 \\ p & q & 0 & q \\ p + w_n q & 0 & 0 & q \\ q & p & 0 & \overline{w}_n q \\ q & p & q & 0 \\ 0 & q & p & q \\ q & 0 & q & p \\ q & w_n q & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{4.54}$$

wobei mit $\boldsymbol{\alpha} = [1/2, 1/4, 0, \ldots, 0, 1/4]$ gilt

$$\hat{\alpha}^k := \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-jk} \alpha_i = \frac{1 + \cos(2k\pi/n)}{2}. \tag{4.55}$$

Die Eigenwerte von $\hat{A}^k$ sind

$$\hat{\alpha}_k, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\,. \tag{4.56}$$

Wir zeigen nun, dass $\lambda := \hat{\alpha}^1 = \hat{\alpha}^{n-1}$ der subdominante Eigenwert ist. Zunächst ist $1 = \hat{\alpha}^0 > \lambda > \hat{\alpha}^k$ für alle $k = 2, \ldots, n-2$ und $\lambda > 1/4$ für $n > 3$. Zu untersuchen bleibt also nur der Fall $n = 3$. Hier ist $\lambda = 1/4$ und wir erhalten für die obere (4×4)-Untermatrix von $\hat{A}^1$ und deren Jordanform $\hat{\Sigma}$

$$\hat{A}^1_{1:4,1:4} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 - i\sqrt{3} & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 + i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Somit sind die Eigenwerte der Subdivisionsmatrix angeordnet gemäß

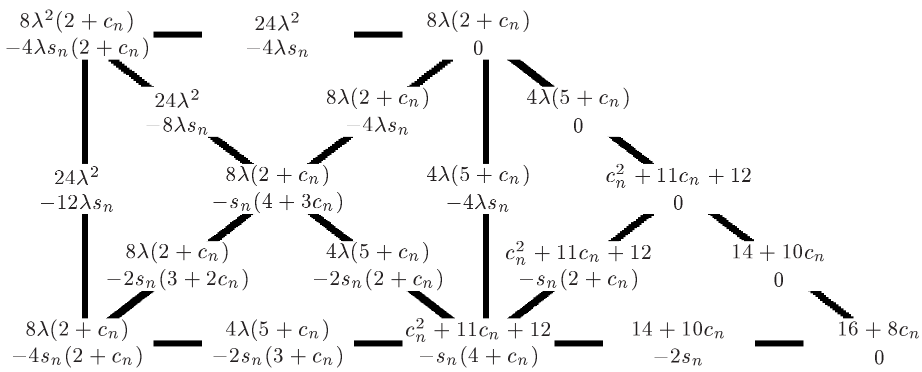
$$(1,0) \succ (1/4,1) \sim (1/4,1) \succ (1/4,0) \tag{4.58}$$

und $\lambda = 1/4$ subdominant. Also ist für alle $n \geq 3$ die notwendige Bedingung gemäß Satz 3.21 erfüllt, das heißt $A \in \mathcal{A}_2^*$.

3.3. Die charakteristische Abbildung. Mit $w_n = c_n + is_n$ erhalten wir für den Eigenvektor $\hat{\mathbf{v}}$ von $\hat{A}^1$ zum Eigenwert $\lambda = (1+c_n)/2$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4+2\,c_n \\ 6+2\,c_n \\ 4+2\,c_n \\ 6+4\,c_n \\ 8+3\,c_n \\ 10+4\,c_n \\ 8+3\,c_n \\ 6+4\,c_n \end{pmatrix} + is_n \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

Damit ergeben sich folgende Bézierkoeffizienten für das Segment Ψ_*^0 der charakteristischen Abbildung:



Dargestellt ist hier nur der Teil des Segments in der unteren Halbebene. Die fehlende Hälfte in der oberen Halbebene ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse. Die Skalierung von $\hat{\mathbf{v}}$ ist so gewählt, dass die charakteristische Abbildung normiert ist, es gilt $\Psi_*^0(2,2) = 16 + 8c_n > 0$.

3.4. Verifikation. Betrachten wir die Ableitung $\Psi_{*,v}^0(1,t)$. Diese ist in Real- und Imaginärteil positiv für alle $t \in [0,1]$, da sie linear ist und Anfangs- und Endpunkt positiv sind,

$$\Psi_{*,v}^0(1,0) = 16\lambda^2(1-c_n) + i\,16s_n\lambda^2 \tag{4.60}$$

$$\Psi_{*,v}^0(1,1) = 8\lambda(1-c_n) + i\,4s_n\lambda\,. \tag{4.61}$$

Somit bleibt nach Satz 3.25 noch die Regularität zu zeigen. Die Jacobi-Determinante J^0 von Ψ_*^0 ist ebenfalls stückweise quadratisch und stetig. Wir erhalten in Bernstein-Bézier-Form die Koeffizienten

$$
\begin{array}{ccccccccc}
64\lambda^3 & & 16\lambda^2(1+2\lambda) & & 32\lambda^2 & & & & \\
& 8\lambda^2(3+2\lambda) & & 4\lambda(1+6\lambda) & & 8\lambda(1+2\lambda) & & * \, 8s_n(1-\lambda) & \\
32\lambda^2 & & 8\lambda(1+2\lambda) & & 4\lambda(3+2\lambda) & & 2(1+2\lambda)^2 & & \\
& 4\lambda(3+2\lambda) & & 4\lambda^2+12\lambda+1 & & (3+2\lambda)(1+2\lambda) & & 4+8\lambda & \\
16\lambda & & 2+12\lambda & & 4+8\lambda & & 6+4\lambda & & 8
\end{array}
$$

Für $n \geq 3$ variiert λ im Intervall $[1/4, 1)$ und dafür sind alle Koeffizienten und damit auch J^0 selbst, positiv. Damit können wir festhalten:

Satz 4.3. *Das Kantenmittenverfahren ist ein C^1-Algorithmus.*

KAPITEL 5

Bedingungen für C^k-Algorithmen

Die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels lassen uns heute nachvollziehen, warum es den Begründern der verallgemeinerten Subdivisionsalgorithmen möglich war, auch ohne detailierte Kenntnisse der Hintergründe C^1-Algorithmen zu konstruieren. Angesichts der Größe des Bereichs der zulässigen Gewichte waren geometrische Intuition gepaart mit gewissen analytischen Betrachtungen ein durchaus hinlängliches Mittel. Orientiert man sich beispielsweise bei der Wahl der Gewichte für den Doo-Sabin-Algorithmus an der Vorstellung, dass ein dyadischer Unterteilungsalgorithmus asymptotisch gesehen Abstände zwischen Kontrollpunkten halbieren sollte, dann führt dies auf den subdominanten Eigenwert $\lambda = 1/2$, der, wie gezeigt, zulässig ist. So ist es auch zu verstehen, dass die Existenz der kritischen Eigenwerte $\lambda_{\text{sup}}(n)$ lange Zeit unentdeckt bleiben konnte. Sie liegen viel zu nahe bei 1, um durch ein praxisrelevantes Verfahren jemals überschritten zu werden.

Ganz anders stellt sich dagegen die Situation dar, wenn Algorithmen höherer Regularität konstruiert werden sollen. Bereits in der ersten Arbeit von Doo und Sabin finden sich Überlegungen in diese Richtung. Es wurde schnell klar, dass bei linearen stationären Verfahren eine Bedingung der Form $|\lambda_3| = \lambda^2$ erfüllt sein muss, um nichttriviale krümmungsstetige Flächen zu erzeugen. Man kann nämlich leicht zeigen, dass $|\lambda_3| > \lambda^2$ zu Flächen führt, deren Krümmungen nahe dem Grenzpunkt $\mathbf{m}$ fast immer divergieren. Dagegen ist $\mathbf{m}$ für $|\lambda_3| < \lambda^2$ fast immer ein Flachpunkt. Beim Catmull-Clark-Algorithmus, der ja außerhalb des Grenzpunkts C^2-Flächen erzeugt, können nun die Gewichte α, β, γ tatsächlich so gewählt werden, dass $|\lambda_3| = \lambda^2$ gilt. Es hat nicht an Versuchen gefehlt, damit die Krümmungsstetigkeit auch im Grenzpunkt zu erreichen [BS90, Sto85], aber letztlich schlugen diese fehl. Der Grund hierfür wurde erstmals in [Rei96a] aufgezeigt, wo bewiesen wird, dass unter gewissen Symmetrieannahmen ein polynomiales Subdivisionsverfahren vom Typ (g, k) nur dann 2-flexibel sein kann, wenn $g \geq 2k + 2$ ist. In [PR97] wird diese Gradabschätzung unter modifizierten Voraussetzungen auf $2r$-flexible Verfahren mit dem Resultat $g \geq 2r(k+1)$ verallgemeinert. Dieses Resultat stellen wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels vor, gehen zunächst aber auf symmetrische lineare stationäre Verfahren ein.

1. Symmetrische lineare stationäre Verfahren

In [Pra95] wird erstmals eine Eigenraumanalyse für lineare stationäre Verfahren höherer Regularität durchgeführt. Wir zeigen nun, dass die dort angegebenen hinreichenden Bedingungen im symmetrischen Fall auch notwendig sind.

Vergleichbare Resultate können auch im asymmetrischen Fall hergeleitet werden [Zor97, Zor98]. Wir verwenden im Folgenden wieder die Bezeichnungen aus Unterabschnitt 1.2.

Satz 5.1. *Sei $(A,\boldsymbol{\varphi})$ ein symmetrischer C^1-Algorithmus mit einem erzeugenden C^κ-System $\boldsymbol{\varphi}$, Subdivisionsmatrix $A \in \mathcal{A}^*$ und subdominantem Eigenwert λ. Für $1 \le k \le \kappa$ ist $(A,\boldsymbol{\varphi})$ genau dann C^k-regulär, wenn es für alle q mit $1 > |\lambda_q| \ge |\lambda|^k$ ein $s \in \{1,\dots,k\}$ gibt mit*

$$(\lambda_q, \nu_q) = (\lambda^s, 0)\,, \quad \boldsymbol{\varphi}_q^0 \in \operatorname{span}\bigl\{(\boldsymbol{\varphi}_1^0)^\alpha(\boldsymbol{\varphi}_2^0)^\beta : \alpha+\beta = s\bigr\}\,. \tag{5.1}$$

Beweis. Zum Beweis, dass die angegebene Bedingung hinreichend ist, verweisen wir auf [Pra95, Pra97b]. Der Beweis der Notwendigkeit erfolgt für festes κ durch vollständige Induktion bezüglich k. Für $k=1$ gilt der Satz trivialerweise, da aus $1 > |\lambda_q| \ge |\lambda|$ folgt, dass $\lambda_q = \lambda$. Betrachten wir nun einen C^k-regulären Algorithmus, $k \ge 2$, und nehmen wir an, der Satz gelte für $k-1$. Für die Indizes $q', q'' \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$|\lambda_{q'-1}| \ge |\lambda|^{k-1} > |\lambda_{q'}|\,, \quad |\lambda_{q''-1}| \ge |\lambda|^k > |\lambda_{q''}| \tag{5.2}$$

gilt

$$a_{\lambda_{q'}}^{\nu_{q'}}(m) = o\bigl(\lambda^{m(k-1)}\bigr)\,, \quad a_{\lambda_{q''}}^{\nu_{q''}}(m) = o\bigl(\lambda^{mk}\bigr)\,, \tag{5.3}$$

und es ist zu zeigen, dass die Bedingungen des Satzes für alle $q = q',\dots,q''-1$ gelten müssen. Sei $\mathbf{x} \in C^\kappa_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n,\mathbb{R}^3)$ im Grenzpunkt C^k-regulär, dann ist die lokale Form h dort k-mal stetig differenzierbar. Wählen wir lokale Koordinaten, also $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{n}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_3$, dann haben die Splineringe gemäß (3.26) nach Induktionsvoraussetzung die Form

$$\mathbf{x}_m = (\xi_m,\eta_m,\zeta_m) = \sum_{1\le a+b<k} (\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_1^0)^a(\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_2^0)^b\mathbf{c}_{a,b} + \sum_{q=q'}^{Q}\sum_{\nu=0}^{\nu_q} a_{\lambda_q}^{\nu_q-\nu}(m)\boldsymbol{\varphi}_q^\nu\mathbf{b}_q\,, \tag{5.4}$$

und es gilt

$$\zeta_m = h(\xi_m,\eta_m) = \sum_{2\le\alpha+\beta\le k} h_{\alpha,\beta}\,\xi_m^\alpha\eta_m^\beta + o\bigl(\lambda^{mk}\bigr)\,, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Betrachten wir in dieser Gleichung nur die Terme der Ordnung $O\bigl(\lambda^{mk}\bigr)$, dann gibt es ein bivariates homogenes Polynom P vom Grad k, so dass

$$\sum_{q=q'}^{q''-1}\sum_{\nu=0}^{\nu_q} a_{\lambda^q}^{\nu_q-\nu}(m)\boldsymbol{\varphi}_q^\nu\langle\mathbf{b}_q,\mathbf{e}_3\rangle = P(\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_1^0,\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_2^0) + o\bigl(\lambda^{mk}\bigr)\,. \tag{5.6}$$

Da diese Identität für fast alle Koeffizienten $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ gültig ist muss sie analog für die Koeffizienten von $\langle\mathbf{b}_{q'},\mathbf{e}_3\rangle,\dots,\langle\mathbf{b}_{q''-1},\mathbf{e}_3\rangle$ gelten. Es gibt also für alle $q' \le q < q''$ und $0 \le \nu \le \nu_q$ ein homogenes Polynom $P_{q,\nu}$ vom Grad k mit

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_q} a_{\lambda_q}^{\nu_q-\nu}(m)\boldsymbol{\varphi}_q^\nu = P_{q,\nu}(\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_1^0,\lambda^m\boldsymbol{\varphi}_2^0) + o\bigl(\lambda^{mk}\bigr)\,. \tag{5.7}$$

Daraus ergibt sich nach Division

$$\boldsymbol{\varphi}_q^0 + o(1) = \frac{\lambda^{mk}}{a_{\lambda_q}^{\nu_q}(m)} \big(P_{q,\nu}(\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_2^0) + o(1)\big)\,. \tag{5.8}$$

Angenommen, es ist $(\lambda_q, \nu_q) \succ (\lambda^k, 0)$, dann konvergiert die rechte Seite gegen $\mathbf{0}$, was $\boldsymbol{\varphi}_q^0 = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_q^0 = \mathbf{0}$ impliziert. Da $\mathbf{v}_q^0$ Eigenvektor von A ist, ist dann $A^m\mathbf{v}_q^0 \in \ker \boldsymbol{\varphi}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und damit nach Definition 3.1 $\mathbf{v}_q^0 \in \ker A$ im Widerspruch zu $|\lambda_q| \geq \lambda^k > 0$. Also ist $(\lambda_q, \nu_q) \sim (\lambda^k, 0)$ und $\lambda_q = \varrho_q \lambda^k$. Aus (5.8) ergibt sich

$$\boldsymbol{\varphi}_q^0 + o(1) = \varrho_q^{-m} P_{q,\nu}(\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_2^0) + o(1)\,. \tag{5.9}$$

Die rechte Seite konvergiert also genau dann, wenn $\varrho_q = 1$ und folglich $(\lambda_q, \nu_q) = (\lambda^k, 0)$ ist. Damit erhalten wir im Grenzübergang

$$\boldsymbol{\varphi}_q^0 = P_{q,\nu}(\boldsymbol{\varphi}_1^0, \boldsymbol{\varphi}_2^0) \in \operatorname{span}\big\{(\boldsymbol{\varphi}_1^0)^\alpha (\boldsymbol{\varphi}_2^0)^\beta : \alpha + \beta = k\big\} \tag{5.10}$$

wie gefordert. □

Die Bedingungen des Satzes sind extrem restriktiv, wie sich bereits am Beispiel $k = 2$ verdeutlichen lässt. Angenommen, es ist $|\lambda_3| < \lambda^2$, dann ist

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{m} + \lambda^m \boldsymbol{\varphi}_1^0 \mathbf{c}_{1,0} + \lambda^m \boldsymbol{\varphi}_2^0 \mathbf{c}_{0,1} + o\big(\lambda^{2m}\big)\,. \tag{5.11}$$

Wenn $c_{1,0} = \operatorname{Re} \mathbf{b}_1$ und $c_{0,1} = \operatorname{Im} \mathbf{b}_1$ linear unabhängig sind, und dies ist für fast alle Startwerte $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ der Fall, dann hat in der lokalen kanonischen Darstellung die Funktion h die Form $h(\boldsymbol{\xi}) = o\big(\|\boldsymbol{\xi}\|^2\big)$. Damit verschwinden aber die Hauptkrümmungen im Grenzpunkt $\mathbf{m}$ erzwungenermaßen. Krümmungsstetige Subdivisionsalgorithmen dieser Art werden in [PU97a, PU97b] vorgestellt. Wenn aber erzwungene Flachpunkte, wie bei vielen Anwendungen der Fall, nicht akzeptabel sind, muss also $\lambda_3 = \lambda^2$ gelten sowie

$$\boldsymbol{\varphi}_3^0 \in \operatorname{span}\big\{(\boldsymbol{\varphi}_1^0)^2, (\boldsymbol{\varphi}_1^0)(\boldsymbol{\varphi}_2^0), (\boldsymbol{\varphi}_2^0)^2\big\} \backslash \{\mathbf{0}\}\,. \tag{5.12}$$

Hierbei handelt es sich um eine nichtlineare Bedingung in einem in der Regel hochdimensionalen Raum, die weitreichende Konsequenzen hat. Betrachten wir beispielsweise den Catmull-Clark-Algorithmus. Im irregulären Fall $n \neq 4$ haben die Funktionen $(\boldsymbol{\varphi}_1^0)^2, (\boldsymbol{\varphi}_1^0)(\boldsymbol{\varphi}_2^0), (\boldsymbol{\varphi}_2^0)^2$ Grad 6, ohne dass bei der Bildung von Linearkombinationen eine Auslöschung aller Koeffizienten der Monome vierten und höheren Grades möglich wäre. $\boldsymbol{\varphi}_3^0$ ist aber stückweise höchstens kubisch, womit (5.12) nicht erfüllt sein kann. Im regulären Fall $n = 4$ dagegen ist die charakteristische Abbildung stückweise linear, womit sich aus (5.12) zumindest kein Widerspruch ergibt. Lösungen sind natürlich für die Gewichte der Tensorprodukt B-Splinesubdivision gegeben.

Man kann nun die Frage stellen, ob sich krümmungsstetige Konvergenz für den Catmull-Clark-Algorithmus beispielsweise dadurch erzwingen lässt, dass man die Maske der Gewichte im irregulären Fall vergrößert oder auch von Schritt zu Schritt variiert. Antwort hierauf gibt der folgende Abschnitt.

2. Eine Gradabschätzung im polynomialen Fall

Die Tatsache, dass der Catmull-Clark-Algorithmus nicht C^2-regulär ist, beruht nicht auf den Besonderheiten dieses speziellen Verfahrens, sondern hat tieferliegende Ursachen, die allein auf der stückweise polynomialen Struktur der Subdivisionsfläche beruhen. Deshalb werden im Folgenden auch nicht Subdivisionsalgorithmen, sondern vielmehr ganz allgemein $\boldsymbol{\varphi}$-Splines mit stückweise polynomialen Splineringen Gegenstand der Untersuchungen sein.

2.1. Die verallgemeinerte charakteristische Abbildung. Der Begriff der charakteristischen Abbildung kann folgendermaßen auf beliebige Subdivisionsflächen übertragen werden.

Definition 5.2. *Sei* $\mathbf{x} \in C^1_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^3)$ *ein in* $\mathbf{0}$ *regulärer* $\boldsymbol{\varphi}$*-Spline und*

$$\boldsymbol{\xi}_m := \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}_m \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)\,, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.13}$$

die Projektion der Splineringe in die Tangentialebene. Definieren wir

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m := \boldsymbol{\xi}_m / \|\boldsymbol{\xi}_m\|_\infty \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)\,, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.14}$$

dann heißt ein Häufungswert $\Psi \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)$ *der Folge* $\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ verallgemeinerte charakteristische Abbildung *von* $\mathbf{x}$. *Ein* $\boldsymbol{\varphi}$*-Spline heißt* nicht degeneriert, *wenn für jede verallgemeinerte charakteristische Abbildung* Ψ *gilt* $\det D_{\underline{\mathbf{u}}}\Psi \not\equiv 0$.

Für symmetrische lineare stationäre Verfahren stimmen die Definitionen 3.11 und 5.2 bei geeigneter Wahl der Eigenvektoren überein; dies folgt aus (3.86). Ähnlich zum Begriff der Degeneriertheit für Subdivisionsmatrizen, wie er in Definition 3.5 erklärt wurde, gilt für degenerierte $\boldsymbol{\varphi}$-Splines, dass die Bilder aller verallgemeinerten charakteristischen Abbildungen zu Kurven oder Punkten entartet sind. Selbst im Fall degenerierter $\boldsymbol{\varphi}$-Splines lässt sich unter gewissen Symmetrieannahmen eine Analyse analog zu der nun folgenden durchführen. Dieser Ansatz wird in [Rei96a] für 2-flexible Splineklassen verfolgt, soll uns aber hier nicht weiter beschäftigen.

Jede reguläre Subdivisionsfläche besitzt mindestens eine verallgemeinerte charakteristische Abbildung, da die Folge $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m$ in $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)$ beschränkt ist und $C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)$ endlichdimensional und vollständig ist. Ferner gilt $\|\Psi\|_\infty = 1$, da $\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m\|_\infty = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Über die Periodizität verallgemeinerter charakteristischer Abbildungen lässt sich folgende Aussage treffen:

Lemma 5.3. *Sei* Ψ *eine verallgemeinerte charakteristische Abbildung einer nicht degenerierten Subdivisionsfläche* $\mathbf{x}(\Omega^n)$ *mit* $J := \det D_{\underline{\mathbf{u}}}\Psi \not\equiv 0$, *dann ist* Ψ ν*-periodisch; das heißt, es gilt*

$$\Psi(\cdot, j) \equiv \Psi(\cdot, j+\nu) \quad \textit{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}_n\,, \tag{5.15}$$

genau dann, wenn $\nu = 0 \mod n$.

Beweis. Seien $\Psi_*, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{m,*} \in C^k(\Omega^n_0, \mathbb{C})$ die Darstellungen von $\Psi, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_m \in C^k(\Omega^n_0, \mathbb{R}^2)$ in komplexer Form und $\tau_*, \tau_{m,*}$ die Einschränkungen von Ψ_* bzw.

$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m$ auf die Menge $\partial_+\Omega_0^n$, also den äußeren Rand der Menge Ω_0^n. Die Segmente von τ_* und $\tau_{m,*}$ bezeichnen wir mit τ_*^j bzw. $\tau_{m,*}^j$, $j \in \mathbb{Z}_n$. Mit

$$\Psi_* = \lim_{\ell\to\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{m(\ell),*} \qquad \text{ist} \qquad \tau_* = \lim_{\ell\to\infty} \tau_{m(\ell),*}\,, \tag{5.16}$$

wobei der Grenzwert wieder bezüglich der Maximumnorm zu verstehen ist. Wenn Ψ_* ν-periodisch ist, dann ist $\tau_*^j = \tau_*^{j+\nu}$ für alle $j \in \mathbb{Z}_n$ und die Segmente $\tau_*^0, \ldots, \tau_*^{\nu-1}$ parametrisieren eine geschlossene Kurve $\tilde{\tau}_*$ in $\mathbb{C}$. Wegen $J \not\equiv 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass das Innere des Bildes von Ψ_* nicht leer ist. Da außerdem das Bild von τ_* kompakt ist, gibt es einen Parameter $\underline{\mathbf{u}}_0 \in \mathring{\Omega}_0^n$, für den $z_0 = \Psi_*(\underline{\mathbf{u}}_0)$ nicht auf dem Bild von τ_* liegt. Damit gilt für die Windungszahl $w \in \mathbb{Z}$ der Kurve $\tilde{\tau}_*$ bezüglich z_0

$$\oint_\tau \frac{dz}{z-z_0} = \frac{n}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{\tau^j} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\, \frac{wn}{\nu}\,. \tag{5.17}$$

Es gibt nun ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt:

- $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m$ ist injektiv und damit $\tau_{m,*}$ eine geschlossene Jordankurve. Dies folgt aus Lemma 3.15.
- Das Bild von $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{m,*}$ liegt ganz im Inneren von $\tau_m(\partial_+\Omega_0^n)$. Dies zeigt man mit derselben Argumentation wie im Beweis von Lemma 3.15.
- Das Bild von $\tau_{m,*}$ enthält den Punkt z_0 nicht. Dies folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\tau_{m,*}$ gegen τ_*.

Somit ist

$$2\pi = \lim_{\ell\to\infty} \left| \oint_{\tau_{m(\ell)}} \frac{dz}{z-z_0} \right| = \left| \oint_\tau \frac{dz}{z-z_0} \right| = 2\pi\, \frac{|wn|}{|\nu|} \tag{5.18}$$

und $|\nu| = |wn|$, was zu beweisen war. □

Nun können wir eine untere Schranke für den Polynomgrad verallgemeinerter charakteristischer Abbildungen angeben.

Lemma 5.4. *Sei* $\mathbf{x} \in C^1_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^3)$ *ein nichtentarteter* $\boldsymbol{\varphi}$*-Spline,* $\boldsymbol{\varphi}$ *stückweise polynomial und* $n \neq 4$*, dann besitzt* $\mathbf{x}$ *eine verallgemeinerte charakteristische Abbildung* Ψ *mit* $J \not\equiv 0$ *vom Bigrad* $\deg \Psi \geq k+1$.

Beweis. Betrachten wir die Doppelsegmente $\Psi^{j,+}$, $j \in \mathbb{Z}_n$, von Ψ gemäß (2.43) und nehmen wir an, es sei $\deg \Psi \leq k$. Dann ist $\Psi^{j,+}$ nicht nur stückweise polynomial, sondern tatsächlich ein Polynom über ω_0^+. Identifizieren wir dieses mit seiner Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}^2$, dann erhält man aus (2.44) durch Iteration

$$\Psi_m^{j,+} = \Psi_m^{j+\nu,+} \circ R_{\pi/2}^\nu\,, \quad \nu \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{5.19}$$

Insbesondere ist $R_{\pi/2}^4 = \mathrm{Id}$ und damit $\Psi_m^{j,+} = \Psi_m^{j+4,+}$ für alle $j \in \mathbb{Z}_n$. Also ist Ψ 4-periodisch im Widerspruch zu Lemma 5.3. □

2.2. Die Gradabschätzung. Wir beweisen nun folgende Gradabschätzung:

SATZ 5.5. *Sei $\boldsymbol{\varphi}$ ein stückweise polynomiales erzeugendes System. Wenn eine Teilmenge $C' \subset C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n, \mathbb{R}^3)$ nichtentarteter $\boldsymbol{\varphi}$-Splines $2r$-flexibel in $\mathbf{0}$ ist, dann enthält $\boldsymbol{\varphi}$ Funktionen vom Bigrad $g \geq 2r(k+1)$.*

BEWEIS. Sei $\mathbf{x} \in C'$ eine nichtentartete Subdivisionsfläche, die in $\mathbf{0}$ die lokale kanonische Form

$$\zeta = \|\boldsymbol{\xi}\|^{2r} + o\big(\|\boldsymbol{\xi}\|^{2r}\big) \tag{5.20}$$

hat, wobei $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ wie zuvor die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wählen wir lokale Koordinaten, das heißt $\mathbf{x}(\mathbf{0})$ als Ursprung und $\mathbf{n}(\mathbf{0})$ als dritten Einheitsvektor, dann haben die Splineringe die Form $\mathbf{x}_m = (\boldsymbol{\xi}_m, \zeta_m)$, wobei $\boldsymbol{\xi}_m = \Pi[\mathbf{0}]\mathbf{x}_m, m \in \mathbb{N}$. Mit

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m := \boldsymbol{\xi}_m / \|\boldsymbol{\xi}_m\|_\infty\,, \quad \tilde{\zeta}_m := \zeta_m / \|\boldsymbol{\xi}_m\|_\infty^{2r}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{5.21}$$

ist (5.20) äquivalent zu

$$\tilde{\zeta}_m = \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m\|^{2r} + o(1)\,. \tag{5.22}$$

Sei $\Psi = \lim_{\ell \to \infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{m(\ell)}$ eine verallgemeinerte charakteristische Abbildung mit $\det D_{\mathbf{u}} \Psi \not\equiv 0$, dann gilt

$$\zeta^* := \lim_{\ell \to \infty} \tilde{\zeta}_{m(\ell)} = \|\Psi\|^{2r} \in C^k_{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega^n_0, \mathbb{R})\,, \tag{5.23}$$

und mit Lemma 5.4 erhalten wir

$$g := \deg \zeta^* = \deg \|\Psi\|^{2r} = 2r \deg \Psi \geq 2r(k+1)\,. \tag{5.24}$$

□

Die Beschränkung des Satzes auf geradzahlige Flexibilität hat folgende Ursache: Wenn wir (5.20) durch einen Ausdruck der Form

$$\zeta = p(\boldsymbol{\xi}) + o\big(\|\boldsymbol{\xi}\|^r\big) \tag{5.25}$$

ersetzen, wobei p ein bivariates Polynom von Grad r ist, dann erhalten wir analog zu (5.23) die Gleichung

$$\zeta^* = p(\Psi)\,. \tag{5.26}$$

Für ungerades r kann hier aber nicht auf $\deg p(\Psi) = r \deg \Psi$ geschlossen werden, da eine Auslöschung der führenden Monomkoeffizienten nicht auszuschließen ist.

Als Ergebnis dieses Kapitels können wir festhalten, dass die Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen höherer Regularität strengen Restriktionen unterworfen ist. Sollen beispielsweise stückweise polynomiale krümmungsstetige Flächen konstruiert werden, so ist bei 2-Flexibilität mindestens der Polynombigrad 6 erforderlich. Damit ist ausgeschlossen, dass Varianten des Catmull-Clark-Algorithmus hierfür in Frage kommen, da dieser von Typ $(3, 2)$ ist. Ganz allgemein sind Algorithmen ungeeignet, die Verallgemeinerungen uniformer B-Spline Subdivisionsalgorithmen sind, denn hier ist $g = k + 1 < 2k + 2$. Dies ist in der Struktur stückweise polynomialer Flächen begründet und nicht von der speziellen Wahl der Algorithmen abhängig.

KAPITEL 6

Topologisch unbeschränkte rationale B-Splines

Die Ergebnisse des letzten Kapitels zeigen deutlich, dass die Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen höherer Regularität kaum dadurch gelingen kann, dass freie Gewichte in der Subdivisionsmatrix geeignet justiert werden. Im C^1-Fall war dies, wie gesehen, möglich und auch Eigenwertbedingungen der Form $\lambda_3 = \lambda^2$ lassen sich damit noch beherrschen. Dagegen stellen hochdimensionale nichtlineare Bedingungen der Form (5.12) ein substanzielles Hindernis auf diesem Weg dar.

Rückblickend hat sich diese Erkenntnis insofern als fruchtbar erwiesen, als gerade der Versuch, (5.12) nicht als Bedingung, sondern als konstruktives Element von Subdivisionsalgorithmen zu begreifen, auf ein neues Modell zur Erzeugung von Freiformflächen beliebiger Topologie geführt hat — die **t**opologisch **u**nbeschränkten **r**ationalen **B**-**S**plines (TURBS). Dabei handelt es sich um eine Klasse von C^k-Splineflächen beliebiger Regularität k und Flexibilität $r \leq k$, die Stückweise polynomial vom Bigrad $g = r(k+1)$ sind. Da TURBS verfeinerbar sind, lösen sie zum einen das Problem, C^k-Subdivisionsalgorithmen zu konstruieren und beweisen zum anderen, dass die Gradabschätzung $g \geq r(k+1)$ für gerades $r \leq k$ nach Satz 5.5 scharf ist. Darüber hinaus ist das Konstruktionsprinzip von TURBS verblüffend einfach und eine natürliche Verallgemeinerung einer speziellen Unterklasse nicht-uniformer rationaler B-Splines (NURBS), die heute de facto den Standard bei der industriellen Modellierung von Splineflächen regulärer Topologie darstellen.

Das TURBS-Konzept, wie es hier vorgestellt wird, wurde in [Rei96b, Rei98] erstmals publiziert. Etwa zeitgleich wurde von H. Prautzsch in [Pra97a] ein ähnliches, unabhängig entwickeltes Verfahren vorgeschlagen. Wir werden darauf am Ende dieses Kapitels kurz eingehen.

1. Univariate Splines mit mehrfachen äquidistanten Knoten

Zur Vorbereitung wollen wir uns mit einer speziellen Klasse univariater B-Splines mit mehrfachen äquidistanten Knoten befassen, die der Konstruktion von TURBS zugrunde liegt. Die Aussagen hier sind einfache Folgerungen aus Standardresultaten der B-Splinetheorie und werden meist ohne Beweis angegeben. Im Übrigen sei auf die Lehrbücher [dB78, Sch81, Far88, HL92] verwiesen.

1.1. B-Splines. Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist die Relation $g = r(k+1)$, die bei gegebener Flexibilität r die Glattheit k mit dem Grad g verknüpft. Der wichtige C^1-Fall wird in [Rei97] ausführlich untersucht. Wir konzentrieren uns daher im Folgenden auf den Fall $k \geq r \geq 2$ und setzen damit

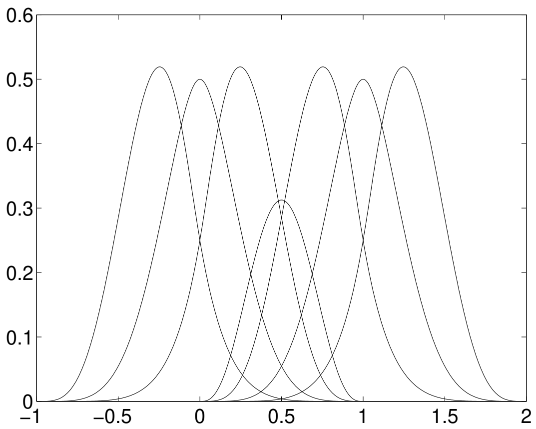


ABBILDUNG 6.1. B-Splines $B^0_{6,2}, \dots, B^6_{6,2}$
.

insbesondere stets $g \geq 2k+2 \geq 6$ voraus. Im univariaten Fall betrachten wir nun Splines mit ganzzahligen Knoten der Vielfachheit $\mu := g-k$. Bezeichnen wir die zugehörigen B-Splines mit $B^i_{g,k}$, $i \in \mathbb{Z}$, dann gibt es genau $g+1$ Stück davon, sagen wir $B^0_{g,k}, \dots, B^g_{g,k}$, die auf dem Intervall $\gamma = [0,1]$ nicht verschwinden. Diese haben Träger

$$\operatorname{supp} B^i_{g,k} = \begin{cases} [-1,1] & \text{für} \quad 0 \leq i \leq k \\ [0,1] & \text{für} \quad k < i < g-k \\ [0,2] & \text{für} \quad g-k \leq i \leq g \end{cases} \tag{6.1}$$

und bilden, eingeschränkt auf γ, eine Basis des Raums der Polynome vom Grad g über γ. Aus Symmetriegründen gilt

$$B^i_{g,k} = B^{i+\ell(g-k)}_{g,k}(\cdot + \ell)\,, \quad i, \ell \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.2}$$

BEISPIEL. Als Beispiel wollen wir in diesem Kapitel den Fall $g = 6, k = 2$ betrachten. Diesem liegt die Relation $g = r(k+1)$ für $r = k = 2$ zugrunde. Abbildung 6.1 zeigt die B-Splines $B^0_{6,2}, \dots, B^6_{6,2}$.

1.2. Kontrollpunkte. Sei $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{Z}$, eine Folge von *Kontrollpunkten*, dann ist der zugehörige *Spline* definiert durch

$$\mathbf{s} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} B^i_{g,k}(t) \mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^d\,. \tag{6.3}$$

Diesen zerlegen wir gemäß $\mathbf{s}(t+\ell) \equiv \mathbf{s}^\ell(t), t \in \gamma$, in Segmente

$$\mathbf{s}^\ell : \gamma \ni t \mapsto \sum_{i=0}^{g} B^i_{g,k}(t) \mathbf{C}^\ell_i\,,\ \ell \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.4}$$

Dabei ist $\mathbf{C}^\ell_i := \mathbf{C}_{\ell(g-k)+i}$ und damit

$$\mathbf{C}^\ell_{g-i} = \mathbf{C}^{\ell+1}_{k-i}\,, \quad i = 0, \dots, k\,,\ \ell \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.5}$$

Betrachten wir die Segmente $\mathbf{s}^\ell$ als unabhängig voneinander, dann ist umgekehrt aufgrund der Basiseigenschaft der B-Splines diese Bedingung äquivalent zum C^k-Kontakt der Segmente $\mathbf{s}^\ell$ und $\mathbf{s}^{\ell+1}$ gemäß

$$D_t^i \mathbf{s}^\ell(1) = D_t^i \mathbf{s}^{\ell+1}(0)\,, \quad i = 0, \ldots, k\,. \tag{6.6}$$

Im Folgenden ist von großer Bedeutung, dass die Glattheitsbedingungen (6.5) für den rechten und linken Rand eines Segments entkoppelt sind. Betrachten wir nämlich ein Segment $\mathbf{s}^\ell$ und seine beiden Nachbarn $\mathbf{s}^{\ell-1}, \mathbf{s}^{\ell+1}$, dann ergeben sich für den linken und rechten Randpunkt Bedingungen für die Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0^\ell, \ldots, \mathbf{C}_k^\ell$ bzw. $\mathbf{C}_{g-k}^\ell, \ldots, \mathbf{C}_g^\ell$. Nun ist $k < g - k$, da $g \geq 2k+2$. Die beiden Gruppen von Kontrollpunkten sind also disjunkt; es gibt sogar eine nichtleere Menge von Kontrollpunkten $\mathbf{C}_{k+1}^\ell, \ldots, \mathbf{C}_{g-k-1}^\ell$, die keinen Bedingungen unterworfen sind.

1.3. Die Bernstein-Bézierform. Wir betrachten nun ein einzelnes Segment $\mathbf{s}^0$. Fassen wir die zugehörigen B-Splines und Kontrollpunkte zu Spaltenvektoren zusammen,

$$\mathbf{B}_{g,k} := [B_{g,k}^0; \ldots; B_{g,k}^g]\,, \quad \mathbf{C} := [\mathbf{C}_0^0; \ldots; \mathbf{C}_g^0]\,, \tag{6.7}$$

dann ist $\mathbf{s}^0 = B_{g,k}^{\mathrm{t}} \mathbf{C}$. Sei $\mathbf{b}_g := [b_g^0; \ldots; b_g^g]$ der Spaltenvektor der Bernsteinpolynome vom Grad g, dann ist die Bernstein-Bézierform von $\mathbf{s}^0$

$$\mathbf{s}^0 = \mathbf{b}_g^{\mathrm{t}} \mathbf{P}\,. \tag{6.8}$$

Dabei ist $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(g+1)\times d}$ der Spaltenvektor der *Bézierkontrollpunkte*, der durch Knoteneinfügen mittels des de Boor-Algorithmus aus $\mathbf{C}$ gewonnen werden kann. Bezeichnet Id die Einheitsmatrix der Dimension $g - 2k - 1 > 0$, dann ergibt sich für den Wechsel zwischen Spline– und Bernsteinbasis

$$\mathbf{b}_g^{\mathrm{t}} = H \mathbf{B}_{g,k}^{\mathrm{t}}\,, \quad H := \begin{pmatrix} \bar{h} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}\,, \; H^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{h}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & h^{-1} \end{pmatrix}\,, \tag{6.9}$$

wobei die Teilmatrizen durch

$$\left.\begin{aligned} h_{p,q} &= \bar{h}_{k-p,k-q} = 2^{-p} \binom{p}{q} \\ h_{p,q}^{-1} &= \bar{h}_{k-p,k-q}^{-1} = (-1)^{p+q} 2^q \binom{p}{q} \end{aligned}\right\} \quad p, q = 0, \ldots, k \tag{6.10}$$

gegeben sind. Die Transformation zwischen Bézier– und B-Splinekontrollpunkten ist dementsprechend $\mathbf{P} = H\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{C} = H^{-1}\mathbf{P}$.

Beispiel. Für $r = k = 2$ erhalten wir

$$H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

1.4. Subdivision. Wir verfeinern die ganzzahlige Knotenfolge durch Einfügen μ-facher Knoten in allen ungeraden Vielfachen von $1/2$. Somit sind die alte und die neue Knotenfolge bis auf Skalierung äquivalent und die neuen B-Splines sind einfach $\tilde{B}^i_{g,k} \equiv B^i_{g,k}(2\cdot), i \in \mathbb{Z}$. Um eine Darstellung eines gegebenen Splines über der verfeinerten Knotenfolge zu erhalten, betrachten wir zunächst den Bézierfall. Sei $\tilde{\gamma} := [0, 1/2]$, dann ist

$$\mathbf{b}^{\mathrm{t}}_g(t)\mathbf{P} = \mathbf{b}^{\mathrm{t}}_g(2t)\, R\mathbf{P}\,, \quad t \in \tilde{\gamma}\,, \tag{6.12}$$

wobei die Matrix R definiert ist durch

$$R_{p,q} := 2^{-p}\binom{p}{q}, \quad p, q = 0, \dots, g\,. \tag{6.13}$$

Damit erhalten wir aus (6.8), (6.9) und (6.12)

$$\begin{aligned} s^0(t) &= \mathbf{B}^{\mathrm{t}}_{g,k}(t)\mathbf{C} = \mathbf{b}^{\mathrm{t}}_g(t)H\mathbf{C} \\ &= \mathbf{b}^{\mathrm{t}}_g(2t)RH\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{t}}_{g,k}(2t)H^{-1}RH\mathbf{C}\,, \quad t \in \tilde{\gamma}\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Also sind die Kontrollpunkte des Splinesegments über dem Intervall $\tilde{\gamma}$ bezüglich der verfeinerten Knotenfolge gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{C}} := S\mathbf{C}\,, \quad S := H^{-1}RH\,. \tag{6.15}$$

Die Kontrollpunkte des Splinesegments über dem Intervall $[1/2, 1]$ berechnen sich aus Symmetriegründen analog.

Beispiel. Für $r = k = 2$ erhalten wir

$$S = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 36 & 24 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 40 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 38 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 33 & 16 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 18 & 24 & 18 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 33 & 10 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

2. Polynomiale C^k-Splineflächen

Auf Basis der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten univariaten Splines wollen wir nun ein Modell für polynomiale C^k-Splineflächen entwickeln.

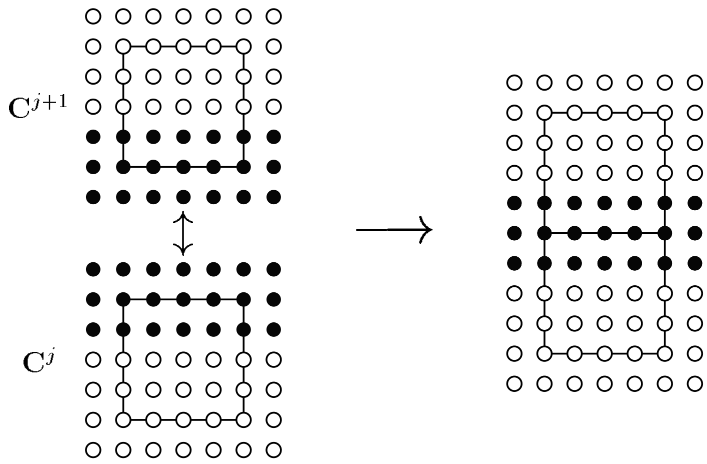


ABBILDUNG 6.2. C^2-Kontakt zweier Patches vom Bigrad 6. Drei Reihen von Kontrollpunkten ($\bullet$) müssen übereinstimmen.

2.1. Tensorproduktpatches. Ein polynomialer Tensorproduktpatch vom Bigrad g lässt sich mittels der B-Splines $\mathbf{B}_{g,k}$ und einer $(g+1)\times(g+1)$-Matrix $\mathbf{C}$ von Kontrollpunkten in $\mathbb{R}^d$ darstellen als

$$\mathbf{x}^i(u,v) = \sum_{p=0}^{g}\sum_{q=0}^{g} \mathbf{C}_{p,q} B^p_{g,k}(u) B^q_{g,k}(v) =: B^{\mathrm{t}}_{g,k}(u)\mathbf{C}B_{g,k}(v)\,, \quad (u,v)\in\omega\,. \tag{6.17}$$

In der letzteren Darstellung ist also das übliche Matrizenprodukt getrennt für jede räumliche Koordinate zu berechnen. Die Transformation in Bernstein-Bézierform ist gemäß (6.9) gegeben durch

$$\mathbf{x}^i(u,v) = \mathbf{b}^{\mathrm{t}}_g(u)\mathbf{P}\mathbf{b}_g(v)\,, \quad \mathbf{P} := HCH^{\mathrm{t}}\,,\ (u,v)\in\omega\,. \tag{6.18}$$

Für die Subdivision des Patches erhalten wir mit (6.12) und (6.15)

$$\mathbf{x}^i(u,v) = \mathbf{B}^{\mathrm{t}}_{g,k}(2u)\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B}_{g,k}(2v)\,, \quad \tilde{\mathbf{C}} := S\mathbf{C}S^{\mathrm{t}}\,,\ (2u,2v)\in\omega\,. \tag{6.19}$$

2.2. C^k-Kontakt benachbarter Patches. Wir untersuchen nun den C^k-Kontakt von n Patches vom Bigrad g,

$$\mathbf{x}^j(u,v) = \mathbf{B}^{\mathrm{t}}_{g,k}(u)\mathbf{C}^j\mathbf{B}_{g,k}(v)\,, \quad (u,v)\in\omega\,,\ j\in\mathbb{Z}_n\,, \tag{6.20}$$

die eine gemeinsame Ecke $\mathbf{m} = \mathbf{x}^0(0,0) = \cdots = \mathbf{x}^{n-1}(0,0)$ der Ordnung $n \geq 3$ haben. Aus Symmetriegründen stellt es wieder keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, wenn wir die Nachbarschaftsrelation (2.21) annehmen, also $(e_4,j) \subsetneq (e_1,j+1), j\in\mathbb{Z}_n$. Betrachten wir zunächst die C^k-Glattheitsbedingungen zwischen benachbarten Patches $\mathbf{x}^j$ und $\mathbf{x}^{j+1}$ gemäß (2.22). Wie aus (6.5) und (6.6) einfach folgt, sind diese genau dann erfüllt, wenn je $k+1$ Reihen von Kontrollpunkten entlang der gemeinsamen Kante übereinstimmen,

$$\mathbf{C}^j_{i,\ell} = \mathbf{C}^{j+1}_{\ell,k-i}\,, \quad \ell = 0,\ldots,g\,,\ i=0,\ldots,k\,,\ j\in\mathbb{Z}_n\,. \tag{6.21}$$

Abbildung 6.2 illustriert diesen Sachverhalt. Betrachten wir nun dieses zyklische Gleichungssystem für festes ℓ. Für $\ell > k$ sind die Gleichungen entkoppelt in dem

Sinne, dass nur Paare von Punkten übereinstimmen müssen. Es kann also jeweils der gemeinsame Wert dieses Paares frei gewählt werden. Für $0 \le \ell \le k$ folgt dagegen

$$\mathbf{C}^j_{i,\ell} = \mathbf{C}^{j+4}_{i,\ell}\,, \quad i,\ell = 0,\dots,k\,,\ j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{6.22}$$

Andererseits gilt aber per Konstruktion auch

$$\mathbf{C}^j_{i,\ell} = \mathbf{C}^{j+n}_{i,\ell}\,, \quad i,\ell = 0,\dots,k\,,\ j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{6.23}$$

Für $n = 4$, also im regulären Fall, sind die beiden Bedingungen identisch und besitzen Lösungen vom Typ

$$\mathbf{C}^0_{i,\ell} = \mathbf{C}^1_{\ell,k-i} = \mathbf{C}^2_{k-i,k-\ell} = \mathbf{C}^3_{k-\ell,i}\,. \tag{6.24}$$

Hier ist also eine $(k+1)\times(k+1)$-Matrix von Punkten frei wählbar, beispielsweise $\mathbf{C}^0_{i,\ell}$, $i,\ell = 0,\dots,k$. Dagegen scheint eine 4-periodische Anordnung gemäß (6.22) für $n \ne 4$ nicht mit einer n-periodischen Anordnung gemäß (6.23) zu harmonieren. Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich aber durch die triviale Lösung

$$\mathbf{C}^j_{i,\ell} = \mathbf{C}^0_{0,0}\,, \quad i,\ell = 0,\dots,k\,,\ j \in \mathbb{Z}_n \tag{6.25}$$

elegant auflösen. Dies ist im Übrigen auch die einzige Lösung für ungerades n. Für gerades $n \ne 4$ existieren auch nichttriviale Lösungen, die aber außer Betracht bleiben sollen, da sie, wie sich zeigen lässt, auf nichtreguläre Flächen führen.

2.3. Degeneration irregulärer Patches. Die triviale Lösung (6.25) hat die Eigenschaft, dass sie ganz im Einklang mit Satz 2.10 auf singulär parametrisierte Patches führt. Es verschwinden hier aber auch Ableitungen höherer Ordnung. Transformieren wir den Patch $\mathbf{x}^j$ mit Kontrollpunkten $\mathbf{C}^j$ gemäß (6.25) auf Bernstein-Bézierform, dann erhalten wir für die Einträge der Koeffizientenmatrix $\mathbf{P}^j = H\mathbf{C}^j H^{\mathrm{t}}$ mit Indizes $p,q = 0,\dots,k$ mit Hilfe von (6.10)

$$\mathbf{P}_{p,q} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbf{C}^j_{i,\ell}\bar{h}_{p,i}\bar{h}_{q,\ell} = \mathbf{C}^0_{0,0}\sum_{i=0}^{k}\bar{h}_{p,i}\sum_{\ell=0}^{k}\bar{h}_{q,\ell} = \mathbf{C}^0_{0,0}\,. \tag{6.26}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Matrix H und damit auch $\bar{h}$ die Zeilensumme 1 hat. Die linke obere $(k+1)\times(k+1)$-Teilmatrix von $\mathbf{P}$ hat also identische Einträge, die mit dem Wert $\mathbf{m} = \mathbf{C}^0_{0,0}$ des Patches in der irregulären Ecke übereinstimmen. Durch Anwendung der Differenziationsformel für Bézierpatches erhalten wir damit

$$D^p_u D^q_v \mathbf{x}^j(0,0) = \begin{cases} \mathbf{m} & \text{für} \quad p = q = 0 \\ \mathbf{0} & \text{für} \quad 0 < \max(p,q) \le k\,. \end{cases} \tag{6.27}$$

Einen Patch mit dieser Eigenschaft nennen wir *k-fach degeneriert* in der irregulären Ecke. Man überzeugt sich leicht, dass (6.25) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die k-fache Degeneration eines Patches gemäß (6.27) ist.

2.4. Der Splineraum $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Wir führen nun Räume stückweise polynomialer Splines ein.

Definition 6.1. *Sei $k \geq 2, g \geq 2k+2$ und $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ein Splineraum beliebiger Topologie, dann definieren wir den Splineraum $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ als denjenigen Teilraum von $C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$, dessen Elemente aus polynomialen Patches vom Bigrad g bestehen, die in den irregulären Knoten k-fach degeneriert sind.*

Die Elemente des Raums $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ lassen sich durch geeignet strukturierte Mengen von Kontrollpunkten, sogenannte *Kontrollnetze*, zweckmäßig repräsentieren. Prinzipiell kann jedem Patch $\mathbf{x}^i$ eine $(g+1) \times (g+1)$-Matrix $\mathbf{C}^i$ von Kontrollpunkten zugewiesen werden. Da die Einträge dieser Matrizen aber nicht unabhängig voneinander gewählt werden können, sind drei Fälle zu unterscheiden.

- *Knotenassoziierte Kontrollpunkte:* Einem regulären Knoten kann gemäß (6.24) eine frei gewählte $(k+1) \times (k+1)$-Matrix $\mathbf{M}_E$ von Kontrollpunkten zugewiesen werden. Dieses ist allen Zellen, die den Knoten umschließen, gemeinsam. Zu einem irregulären Knoten gehört dagegen nur ein einziger Kontrollpunkt $\mathbf{m}$; dies ist gerade der Wert der irregulären Ecke. Entspricht der Knoten beispielsweise der Ecke $(0,0)$ der Zelle (ω, i), dann ist die linke obere $(k+1) \times (k+1)$-Teilmatrix von $\mathbf{C}^i$ im regulären Fall durch $\mathbf{M}_E$ gegeben, im irregulären Fall erscheint dagegen der Punkt $\mathbf{m}$ als $(k+1)^2$-facher Eintrag.
- *Kantenassoziierte Kontrollpunkte:* Sehen wir von den zuvor behandelten knotenassoziierten Kontrollpunkten ab, dann kann einer Kante gemäß (6.21) eine frei gewählte $(g-2k-1) \times (k+1)$-Matrix $\mathbf{M}_K$ von Kontrollpunkten zugewiesen werden. Dieses ist den Zellen, die die Kante enthalten, gemeinsam. Entspricht die Kante beispielsweise der Seite $([0,1], 0)$ der Zelle (ω, i), dann ist die Teilmatrix von $\mathbf{C}^i$ mit Indizes $(p,q) \in \{k+1, \ldots, g-k-1\} \times \{0, \ldots, k\}$ durch $\mathbf{M}_K$ gegeben.
- *Zellenassoziierte Kontrollpunkte:* Dem Inneren einer Zelle (ω, i) kann eine frei gewählte $(g-2k-1) \times (g-2k-1)$-Matrix $\mathbf{M}_Z$ von Kontrollpunkten zugewiesen werden. Dies entspricht, geeignet orientiert, der Teilmatrix von $\mathbf{C}^i$ mit Indizes $(p,q) \in \{k+1, \ldots, g-k-1\}^2$.

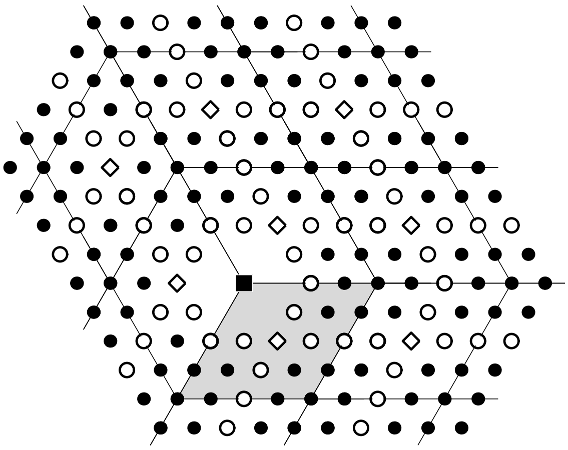
Für ein Definitionsgebiet mit E_r regulären und E_i irregulären Knoten, K Kanten und Z Zellen ist die Gesamtzahl der Kontrollpunkte des Kontrollnetzes also

$$M := (k+1)^2 E_r + E_i + (g-2k-1)(k+1)K + (g-2k-1)^2 Z\,. \tag{6.28}$$

Abbildung 6.3 zeigt schematisch die Struktur eines Kontrollnetzes in einer Umgebung eines Knotens der Ordnung 3 sowie die Belegung der Matrix $\mathbf{C}^1$, die zu der schattiert dargestellten irregulären Zelle $(\omega, 1)$ gehört.

2.5. B-Splines. Wir sammeln die Punkte eines Kontrollnetzes in einem Vektor $\mathbf{C} := [\mathbf{C}_1; \ldots; \mathbf{C}_M]$ und betrachten die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^{M \times d} \ni \mathbf{C} \mapsto \mathbf{x} \in P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)\,, \tag{6.29}$$



$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \diamond & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

ABBILDUNG 6.3. Struktur der Kontrollpunkte und Belegung der Kontrollpunktmatrix im Fall $r = k = 2$. Die verschiedenen Typen von Kontrollpunkten sind durch folgende Symbole dargestellt: irregulär knotenassoziiert ($\blacksquare$), regulär knotenassoziiert ($\bullet$), kantenassoziiert ($\circ$) und zellenassoziiert ($\diamond$).

die dem Kontrollnetz die zugehörige Splinefläche zuweist. Ein Patch $\mathbf{x}^i$ von $\mathbf{x} = L\mathbf{C}$ berechnet sich wie folgt: Man bildet zunächst die $(g + 1) \times (g + 1)$ Matrix C^i nach den oben beschriebenen Regeln. Daraus gewinnt man dann die Bernstein-Bézierform durch Anwendung von Gleichung (6.18). Offensichtlich ist dieser Prozess und somit die Abbildung L linear und affin invariant. Wir konstruieren nun eine Basis des Splineraums $P_g^k(\Omega, \mathbb{R})$, indem wir für den Vektor der Kontrollpunkte Einheitsvektoren einsetzen. Seien also $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_M$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^M$, dann definieren wir die *B-Splines*

$$B^\mu := L\mathbf{E}_\mu \in P_g^k(\Omega, \mathbb{R}), \quad \mu = 1, \ldots, M. \tag{6.30}$$

Demzufolge gilt in völliger Analogie zu Tensorprodukt B-Splines für beliebige Kontrollnetze $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times d}$ die Gleichung

$$L\mathbf{C} = \sum_{\mu=1}^{M} B^\mu \mathbf{C}_\mu. \tag{6.31}$$

Der Träger des B-Splines B^μ umfasst $1, 2$ oder n Zellen, wenn der zugehörige Kontrollpunkt $\mathbf{C}^\mu$ zu einer Zelle, einer Kante oder einem Knoten der Ordnung n assoziiert ist. Außerdem sind die B-Splines linear unabhängig, denn angenommen, es ist $\mathbf{x}^i = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{B}^i = \mathbf{0}$ und wegen (6.9) auch $\mathbf{C}^i = \mathbf{0}$. Ist also der Spline $\mathbf{x}$ identisch Null, dann sind alle Patches und damit auch alle Kontrollpunkte Null. Wir können also zusammenfassend feststellen:

SATZ 6.2. *Sei Ω ein Splinedefinitionsgebiet, M die Anzahl der Kontrollpunkte gemäß* (6.28) *und $g \geq 2k+2$, dann ist $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ein affin invarianter Vektorraum* *der Dimension*

$$\dim P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d) = dM\,. \tag{6.32}$$

Eine unmittelbare Konsequenz aus diesem Satz ist die Feststellung, dass die Abbildung L invertierbar ist und somit eine Bijektion zwischen der Menge der Kontrollpunkte und dem Raum $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ stiftet.

3. C^k-Regularität in irregulären Knoten

Der Raum $P_g^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ weist aus differenzialgeometrischer Sicht ein ernstes Manko auf. Die notwendig singuläre Parametrisierung irregulärer Patches gemäß (6.27) führt in der Regel auf Flächen, die nicht normalenstetig, geschweige denn C^k-regulär sind. Nun stellt eine singuläre Parametrisierung wohl ein Problem, keinesfalls aber ein Hindernis dar, wenn es darum geht, glatte Freiformflächen zu modellieren. Diesem Thema wollen wir uns nun zuwenden.

3.1. D^k-Patches. In der Menge der degenerierten Patches zeichnen wir diejenigen aus, die im Sinne von Definition 2.6 regulär sind.

Definition 6.3. *Ein k-fach degenerierter Patch $\mathbf{x}^i$ heißt* D^k-Patch, *wenn er in der singulär parametrisierten Ecke C^k-regulär ist.*

Für D^k-Patches lässt sich ganz einfach eine Gradabschätzung analog zu Satz 5.5 beweisen, die aber keine Einschränkungen für die Parität der Flexibilität erfordert:

Lemma 6.4. *Wenn eine Menge von D^k-Patches r-flexibel ist, dann enthält sie Elemente vom Bigrad $g \geq r(k+1)$.*

Beweis. Betrachten wir ein D^k-Patch $\mathbf{x} = (\xi, \eta, \zeta)$ gemäß (6.27) mit der lokalen Form $\zeta = \xi^r + o\big(\|(\xi,\eta)\|^r\big)$. Nun ist $\deg \xi \geq k+1$, denn aus $\deg \xi \leq k$ folgt $\xi \equiv 0$. Damit gilt $\deg \zeta \geq r \deg \xi \geq r(k+1)$. □

Eine Charakterisierung der Menge der D^k-Patches ist ein Problem, dessen Schwierigkeitsgrad mit wachsendem k rapide zunimmt. D^1-Patches werden in [Rei97, Rei95b] untersucht. Hier ergibt sich im Wesentlichen eine Koplanaritätsbedingung für die Kontrollpunkte in der Nähe der Singularität. Bereits für $k = 2$ sind die zu untersuchenden nichtlinearen Bedingungen sehr komplex. Ergebnisse hierzu finden sich in [Boh95, BR97]. Für $k \geq 3$ ist das Problem ungelöst und es ist fraglich, ob es mit vertretbarem Aufwand zu analysieren ist.

Der Schlüssel zu der Konstruktion von D^k-Patches und später auch von TURBS liegt nun darin, die Regularität nicht als Bedingung zu verstehen, sondern sie per Konstruktion zu gewährleisten. Wir wollen dies an einem Beispiel verdeutlichen, das gleichzeitig zeigt, dass die Gradabschätzung nach Lemma 6.4 scharf ist. Ist $\mathbf{p} : \omega \to \mathbb{R}^3$ ein bivariates Polynom vom totalen Grad r mit $\operatorname{rank} D_{\mathbf{u}}\mathbf{p}(0,0) = 2$, dann ist $\mathbf{x}^i(u,v) := \mathbf{p}\big(u^{k+1}, v^{k+1}\big), (u,v) \in \omega$, ein k-fach degenerierter Patch vom Bigrad $r(k+1)$ und insbesondere auch ein D^k-Patch, da die Bilder $\mathbf{x}(\omega)$ und $\mathbf{p}(\omega)$ identisch sind. Ferner ist die auf diesem Weg erzeugbare Menge von Patches offensichtlich r-flexibel. Der angegebenen Konstruktion liegt die k-fach degenerierte Umparametrisierung $(u,v) \mapsto (u^{k+1}, v^{k+1})$ zugrunde und diesen Gedanken wollen wir nun weiterentwickeln.

3.2. D^k-Patches über Ω^n. Betrachten wir zur Vorbereitung nun Splines über dem Definitionsgebiet $\Omega^n = \omega \times \mathbb{Z}_n$, die aus k-fach degenerierten Patches $\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^{n-1}$ bestehen. Die Regularität im inneren Knoten kann mittels einer fest gewählten Umparametrisierung gewährleistet werden.

DEFINITION 6.5. *Eine lokale Darstellung* $\mathbf{r} \in P^k_{k+1}(\Omega^n, \mathbb{R}^2)$ *von* Ω^n *mit* $\mathbf{r}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *heißt* (k,n)-Darstellung.

Wir werden die Konstruktion solcher Abbildungen in einem späteren Abschnitt diskutieren, um den Gedankengang an dieser Stelle nicht zu unterbrechen. Im Folgenden bezeichnet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$ stets einen Multiindex und $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ dessen Betrag.

LEMMA 6.6. *Sei* $\mathbf{r}$ *eine* (k,n)*-Darstellung und*

$$T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}) := \left\{ \sum_{|\alpha| \le r} \mathbf{T}_\alpha \mathbf{r}^\alpha : \mathbf{T}_\alpha \in \mathbb{R}^d \right\}, \tag{6.33}$$

dann ist $T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}) \subset P^k_{r(k+1)}(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$ *ein linearer, affin invarianter Splineraum der Dimension*

$$\dim T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}) = dr', \quad r' := (r+1)(r+2)/2\,. \tag{6.34}$$

Ferner bestehen fast alle Splines in $T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$ *aus* D^k*-Patches.*

BEWEIS. Linearität und affine Invarianz sind wieder trivial. Sei $\mathbf{x} \in T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$, dann folgt mit Hilfe der Kettenregel, dass die Patches von $\mathbf{x}$ k-fach degeneriert sind. Weiterhin ist aufgrund der Ringeigenschaft des Raums der C^k-Splines $\mathbf{x} \in C^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$ und wegen $\deg \mathbf{x} \le r \deg \mathbf{r} = r(k+1)$ ist damit $\mathbf{x} \in P^k_{r(k+1)}(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$. Betrachten wir nun die Umparametrisierung

$$\hat{\mathbf{x}} : \mathbf{r}(\Omega^n) \ni \mathbf{s} \mapsto \mathbf{x}\big(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{s})\big) = \sum_{|\alpha| \le r} \mathbf{T}_\alpha \mathbf{s}^\alpha\,, \tag{6.35}$$

dann ist $\hat{\mathbf{x}}$ nach dem Satz über implizite Funktionen C^∞-regulär in $\mathbf{0}$, falls $\mathbf{T}_{1,0}$ und $\mathbf{T}_{0,1}$ linear unabhängig sind. Dies ist aber für fast alle Koeffizienten $\{\mathbf{T}_\alpha \in \mathbb{R}^d : |\alpha| \le r\}$ der Fall. Zum Beweis von (6.34) nehmen wir an, dass $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$. Dies impliziert $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{0}, |\alpha| \le r$. Also ergibt sich die Dimension von $T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$ als Raumdimension d mal Anzahl r' der Multiindizes mit Betrag $\le r$. □

3.3. Quasikontrollpunkte und freie Kontrollpunkte. Die Splines des Raums $T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$ lassen sich natürlich durch Kontrollnetze und B-Splines gemäß (6.31) darstellen. Den Raum all dieser Kontrollnetze bezeichnen wir mit

$$\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}} := \big\{ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times d} : L\mathbf{C} \in T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}) \big\}\,. \tag{6.36}$$

Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{r'}\}$ die Menge aller Multiindizes mit Betrag $\leq r$ und $\mathbf{T} := \left[\mathbf{T}_{\alpha_1}; \ldots; \mathbf{T}_{\alpha_{r'}}\right]$ der Spaltenvektor der Koeffizienten, dann ist $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}}$ auch in der Form

$$\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}} := \left\{Q_{\mathbf{r}}\mathbf{T} : \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{r' \times d}\right\} \tag{6.37}$$

darstellbar. $Q_{\mathbf{r}}$ ist dabei eine $(M \times r')$-Matrix, deren q-te Spalte das skalare Kontrollnetz zum Spline $\mathbf{r}^{\alpha_q}$ enthält, also $Q_{\mathbf{r}}\mathbf{E}_q = L^{-1}\mathbf{r}^{\alpha_q}$.

Kontrollpunkte von Splines im Raum $T^k_r(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$ können also nicht wie sonst üblich beliebig in $\mathbb{R}^d$ gewählt werden, sie unterliegen vielmehr gewissen Restriktionen. Um diesen Unterschied hervorzuheben, bezeichnen wir die Elemente von $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}}$ als *Quasikontrollnetze* und die zugehörigen Kontrollpunkte als *Quasikontrollpunkte*. Die Einschränkung der Quasikontrollnetze auf einen linearen Teilraum des $\mathbb{R}^{r' \times d}$ stellt für viele Zwecke, wie beispielsweise Approximationsaufgaben oder finite Elemente, nur ein Problem, aber kein Hindernis dar. Dagegen erfordert der interaktive Einsatz in CAD-Systemen Kontrollpunkte, die frei manipulierbar sind. Eine Lösung dieses Problems könnte nun darin bestehen, unmittelbar die Koeffizienten $\mathbf{T}$ zur Darstellung der Splines zu verwenden, doch verliert man damit die intuitive Koppelung von Geometrie und Struktur zwischen der Splinefläche und dem Kontrollnetz. Dies ist aber eine essenzielle Eigenschaft bei der interaktiven Modellierung von Freiformflächen. Wir schlagen deshalb einen anderen Weg vor: Aus einem *freien Kontrollnetz* $\mathbf{C}$, also einem Kontrollnetz eines beliebigen Splines in $P^k_{r(k+1)}(\Omega^n, \mathbb{R}^d)$, konstruiert man ein Quasikontrollnetz $\mathbf{C}_{\mathrm{q}}$ mittels einer affin invarianten Projektion $P_{\mathbf{r}}$ in den Raum $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}}$, also $\mathbf{C}_{\mathrm{q}} = P_{\mathbf{r}}\mathbf{C}$. Bezeichne $Q^+_{\mathbf{r}}$ die Pseudoinverse der Matrix $Q_{\mathbf{r}}$, dann ist beispielsweise die orthogonale Projektion gegeben durch

$$P_{\mathbf{r}} = Q_{\mathbf{r}}\, Q^+_{\mathbf{r}}\,. \tag{6.38}$$

Die affine Invarianz von $P_{\mathbf{r}}$, also Zeilensumme 1, folgt hier einfach aus $Q_{\mathbf{r}}\, Q^+_{\mathbf{r}} Q_{\mathbf{r}} = Q_{\mathbf{r}}$ und der Tatsache, dass $Q_{\mathbf{r}}$ die Zeilensumme 1 hat. Es sei an dieser Stelle nur angemerkt, dass sich beispielsweise durch Lösen des linearen Programms

$$Q_{\mathbf{r}} Q^*_{\mathbf{r}} \geq 0\,,\; Q_{\mathbf{r}} Q^*_{\mathbf{r}}\mathbf{e} = \mathbf{e}\,,\; \|\operatorname{Id} - Q_{\mathbf{r}} Q^*_{\mathbf{r}}\|_\infty \to \min \tag{6.39}$$

mit $\mathbf{e} = [1; \ldots; 1]$ auch Projektoren der Form $P_{\mathbf{r}} = Q_{\mathbf{r}} Q^*_{\mathbf{r}}$ konstruieren lassen, die ausschließlich nichtnegative Einträge haben, also $P \geq 0$. Für diese liegt $\mathbf{C}_{\mathrm{q}}$ und damit auch die zugehörige Splinefläche in der konvexen Hülle des freien Kontrollnetzes.

4. TURBS

Wir können nun in naheliegender Weise die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf beliebige einfache Definitionsgebiete verallgemeinern. Die so entstehenden Splines, die wir kurz TURBS nennen wollen, haben eine Reihe günstiger Eigenschaften mit Standard NURBS gemein und erlauben insbesondere Subdivision. Schließlich wollen wir uns in diesem Abschnitt noch kurz mit der Konstruktion geeigneter lokaler Darstellungen des Gebiets Ω^n befassen und einige Beispiele von TURBS-Flächen anführen.

4.1. Der Splineraum. Der Raum der TURBS, den wir nun definieren, ist ein Teilraum von $P^k_{r(k+1)}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, der dadurch charakterisiert ist, dass jeweils n Patches, die eine irreguläre Ecke umschließen, D^k-Patches gemäß der im letzten Abschnitt angegebenen Konstruktion sind.

DEFINITION 6.7. *Sei $k \geq r \geq 2$ und Ω ein einfaches Definitionsgebiet, das S irreguläre Knoten $\mathbf{K} := \{K_1, \dots, K_S\}$ der Ordnung $\mathbf{N} := \{n_1, \dots, n_S\}$ enthält. Zugeordnet sind lokale Darstellungen $\mathbf{R} := \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_S\}$, wobei $\mathbf{r}_s$ eine (k, n_s)-Darstellung ist, $s = 1, \dots, S$. Bezeichnen wir die Einschränkung eines Splines $\mathbf{x}$ auf die n_s Zellen, die den irregulären Knoten K_s gemeinsam haben, mit $\mathbf{x}_{|s}$, dann ist*

$$T^k_r(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R}) := \left\{\mathbf{x} \in P^k_{r(k+1)}(\Omega, \mathbb{R}^d) : \mathbf{x}_{|s} \in T^k_r(\Omega^{n_s}, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}_s), s = 1, \dots, S\right\}. \tag{6.40}$$

Die Elemente dieses Raums nennen wir topologisch unbeschränkte rationale B-Splines (TURBS).

BEMERKUNG. Die Namenswahl orientiert sich an den nichtuniformen rationalen B-Splines (NURBS). Etwas inkonsequent wird der Begriff „NURBS“ üblicherweise für Splinekurven und –flächen verwendet, also für Linearkombinationen von B-Splines. Dieser Konvention folgend sind auch TURBS keine B-Splines im Sinne von Basisfunktionen sondern vielmehr Splines gemäß Definition 2.1.

SATZ 6.8. *Der Raum $T^k_r(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R})$ ist linear, affin invariant und hat die Dimension*

$$\dim T^k_r(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R}) = \dim P^k_g(\Omega, \mathbb{R}^d) - d\Big(S(1 - r') + (g+1)(g-k)\sum_{s=1}^{S} n_s\Big), \tag{6.41}$$

wobei wie zuvor $g = r(k+1)$ und $r' = (r+1)(r+2)/2$ ist.

BEWEIS. Linearität und affine Invarianz ergeben sich aus Satz 6.2 und Lemma 6.6. Die Anzahl der Kontrollpunkte eines TURBS-Kontrollnetzes $\mathbf{C}$ ist $\dim P^k_g(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Diese können aber nicht alle frei gewählt werden. Sammeln wir die Kontrollpunkte, die dem irregulären Knoten K_s zuzuordnen sind, in der Menge

$$\mathbf{Q}_s := \{\mathbf{C}^i : B^i_{|s} \not\equiv 0, i \in I\}, \quad s = q, \dots, S, \tag{6.42}$$

dann folgt zunächst aus der Annahme, das Ω einfach sei, dass die Mengen $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_S$ paarweise disjunkt sind. Der Einfluss auf die Raumdimension kann also separat für jeden irregulären Knoten berücksichtigt werden. Die Anzahl der Elemente von $\mathbf{C}_s$ ist gemäß Satz 6.2 und (6.28)

$$\#\mathbf{Q}_s = \dim P^k_g(\Omega^{n_s}, \mathbb{R}^d)/d = 1 + (g+1)(g-k)n_s. \tag{6.43}$$

Gemäß Lemma 6.33 variieren die Kontrollpunkte in $\mathbf{Q}_s$ aber nur in einem linearen Raum der Dimension

$$\dim T^k_r(\Omega^{n_s}, \mathbb{R}^d, \mathbf{r}_s) = dr'. \tag{6.44}$$

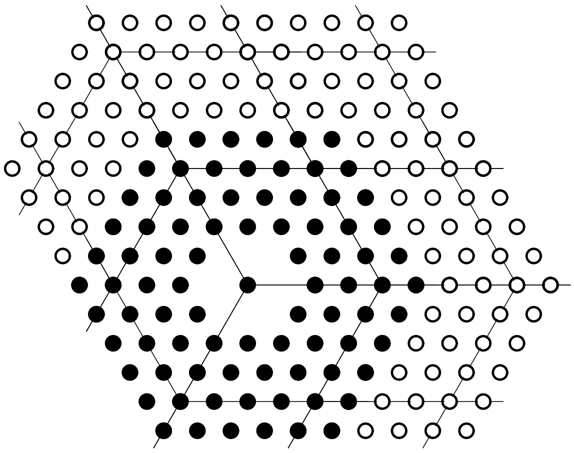


ABBILDUNG 6.4. Freie Kontrollpunkte (○) und Quasikontrollpunkte (●) für $r = k = 2$ in der Umgebung eines irregulären Knotens der Ordnung 3.

Die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert sich also durch jeden Knoten K_s um $d\bigl(1 + (g+1)(g-k)n_s - r'\bigr)$, und die Summation über alle irregulären Knoten liefert die Dimensionsformel (6.41). □

4.2. Kontrollpunkte und B-Splines. TURBS lassen sich zweckmäßig als Linearkombinationen von verallgemeinerten B-Splines mit räumlichen Kontrollpunkten darstellen. Die Diskussion der Kontrollnetze und –punkte verläuft weitgehend analog zu Abschnitt 3.3, während sich die Konstruktion von B-Splines an Abschnitt 2.5 orientiert.

4.2.1. *Kontrollpunkte.* Den Raum der Kontrollnetze, die TURBS erzeugen, bezeichnen wir mit

$$\mathcal{Q}^d_{\mathbf{R}} := \left\{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times d} : L\mathbf{C} \in T^k_r(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R})\right\}. \tag{6.45}$$

Dieser kann in die direkte Summe

$$\mathcal{Q}^d_{\mathbf{R}} = \mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}_S} \oplus \mathcal{Q}^d_* \tag{6.46}$$

zerlegt werden. Für $s = 1, \ldots, S$ enthält dabei der Raum $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}_s}$ die *Quasikontrollpunkte* in $\mathbf{Q}_s$, die gemäß (6.42) zum irregulären Knoten K_s gehören und $\mathcal{Q}^d_*$ die verbleibenden *freien Kontrollpunkte*, die keinen Einschränkungen unterliegen. Die Elemente des Raums $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{R}}$ bezeichen wir wieder als *Quasikontrollnetze*. Abbildung 6.4 zeigt die Anordnung von Quasikontrollpunkten und freien Kontrollpunkten in der Umgebung eines irregulären Knotens der Ordnung 3.

Ein beliebiges Kontrollnetz kann nun mittels einer affin invarianten Projektion $P_{\mathbf{R}}$ in den Raum der Quasikontrollnetze abgebildet werden. Dabei bleiben die freien Kontrollpunkte in $\mathcal{Q}^d_*$ unverändert und die übrigen Kontrollpunkte werden getrennt für jede irreguläre Ecke durch Projektoren $P_{\mathbf{r}_1}, \ldots, P_{\mathbf{r}_S}$, wie sie oben beschrieben wurden, in die Räume $\mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathcal{Q}^d_{\mathbf{r}_S}$ abgebildet.

4.2.2. *B-Splines.* Die Konstruktion *verallgemeinerter B-Splines* in TURBS-Räumen erfolgt in zwei Schritten. Sei M wieder die Anzahl der Kontrollpunkte und $\mathbf{E}^i$ der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^M$. Dann projizieren wir zunächst $\mathbf{E}^i$ in den Raum der Quasikontrollnetze und bilden anschließend die zugehörige skalare Splinefunktion, also

$$\tilde{B}^i := LP_{\mathbf{R}}\mathbf{E}^i\,, \quad i = 1, \ldots, M\,. \tag{6.47}$$

Mittels verallgemeinerter B-Splines kann man zu einem beliebigen Kontrollnetz $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1; \ldots; \mathbf{C}_M]$ einen zugehörigen TURBS konstruieren,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{M} \tilde{B}^i \mathbf{C}^i \in T_r^k(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R})\,. \tag{6.48}$$

Umgekehrt besitzt jeder TURBS eine solche Darstellung. Diese ist allerdings nicht eindeutig, da die verallgemeinerten B-Splines nicht linear unabhängig sind. Dies ist eine Folge aus der Tatsache, dass die Projektion $P_{\mathbf{R}}$ nicht vollen Rang hat.

Die verallgemeinerten B-Splines bilden eine Partition der Eins. Dies folgt aus der affinen Invarianz von $P_{\mathbf{R}}$ gemäß

$$\sum_{i=1}^{M} \tilde{B}^i = LP_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{E}^i = L \sum_{i=1}^{M} \mathbf{E}^i = \sum_{i=1}^{M} B^i \equiv 1\,. \tag{6.49}$$

Schließlich überzeugt man sich leicht, dass der Träger verallgemeinerter B-Splines kompakt ist und $1, 2, 4$ oder $3n_s$ Zellen umfasst, je nach dem, ob der zugehörige Kontrollpunkt zu einer Zelle, einer Kante, einem regulären oder einem irregulären Knoten der Ordnung n_s assoziiert ist.

4.3. Subdivision. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der TURBS ist die Verfeinerbarkeit. Ist $\Upsilon : \tilde{\Omega} \to \Omega$ der Isomorphismus zwischen den Splinedefinitionsgebieten $\tilde{\Omega}$ und Ω gemäß Definition 2.12, dann meint dies die Tatsache, dass mit $\mathbf{x}$ auch der verfeinerte Spline $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \Upsilon$ ein TURBS ist.

Hierzu definieren wir zunächst die Verfeinerung $\tilde{\mathbf{r}}$ einer (n, k)-Darstellung $\mathbf{r}$ mit Patches $\mathbf{r}^0, \ldots, \mathbf{r}^{n-1}$ als

$$\tilde{\mathbf{r}} : \Omega^n \ni (u, v, j) \mapsto \tilde{\mathbf{r}}^j(u, v) = \mathbf{r}^j(u/2, v/2)\,. \tag{6.50}$$

Für eine Menge $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_S\}$ von Darstellungen ist entsprechend $\tilde{\mathbf{R}} = \{\tilde{\mathbf{r}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{r}}_S\}$. Nun gilt

Satz 6.9. *Sei Ω ein einfaches Splinedefinitionsgebiet und $\tilde{\Omega}$ dessen Verfeinerung, dann induziert der Isomorphismus $\Upsilon : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine Einbettung $T_r^k(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R}) \hookrightarrow T_r^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d, \tilde{\mathbf{R}})$; das heißt, für alle TURBS $\mathbf{x} \in T_r^k(\Omega, \mathbb{R}^d, \mathbf{R})$ ist $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \Upsilon \in T_r^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d, \tilde{\mathbf{R}})$.*

Beweis. Nach Satz 2.13 ist $\tilde{\mathbf{x}} \in C^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. Außerdem ist $\tilde{\mathbf{x}}$ stückweise polynomial vom Bigrad $g = r(k+1)$. Betrachten wir einen D^k-Patch $\mathbf{x}^j$, der die

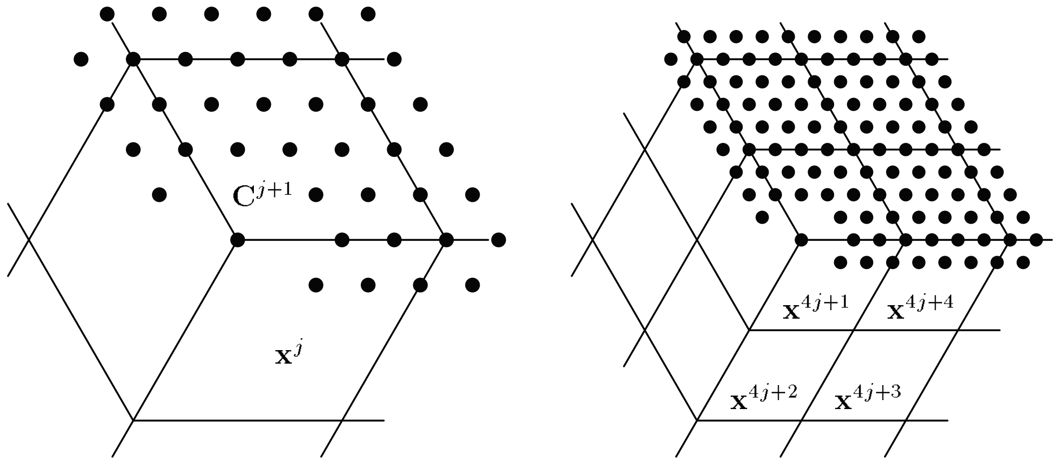


ABBILDUNG 6.5. Subdivision eines TURBS.

irreguläre Ecke zum Knoten K_s enthält, $\mathbf{x}^j(0,0) = \mathbf{x}(K_s)$. Dieser wird durch die Verfeinerung in vier Patches $\tilde{\mathbf{x}}^{4j+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}^{4j+4}$ zerlegt, wobei nach (2.33)

$$\tilde{\mathbf{x}}^{4j+1}(u,v) = \mathbf{x}^j(u/2, v/2)\,, \quad (u,v) \in \omega\,, \tag{6.51}$$

ist. Also enthält $\tilde{\mathbf{x}}^{4j+1}$ die irreguläre Ecke und ist k-fach degeneriert; es gilt somit $\tilde{\mathbf{x}}^{4j+1} \in P_g^k(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. Ist nun

$$\mathbf{x}^j = \sum_{\|\alpha\| \le r} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{r}_s^j)^\alpha\,, \tag{6.52}$$

dann ergibt sich für $(u,v) \in \omega$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{4j+1}(u,v) = \mathbf{x}^j(u/2,v/2) = \sum_{\|\alpha\| \le r} \mathbf{T}_\alpha \big(\mathbf{r}_s^j(u/2,v/2)\big)^\alpha = \sum_{\|\alpha\| \le r} \mathbf{T}_\alpha \big(\tilde{\mathbf{r}}_s^j(u,v)\big)^\alpha \tag{6.53}$$

und damit die gewünschte Form der Reparametrisierung. □

Bezeichnen wir die Anzahl der Kontrollpunkte vor und nach der Verfeinerung mit M bzw. $\tilde{M}$, dann entspricht dem Subdivisionsprozess $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$ eine Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^{M \times d} \ni L^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{C} \mapsto \tilde{\mathbf{C}} = L^{-1}\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\tilde{M} \times d} \tag{6.54}$$

für die Quasikontrollnetze. Diese lässt sich wie folgt konstruieren: Zu einem gegebenen Patch $\mathbf{x}^i$ bildet man die $(g+1) \times (g+1)$-Matrix $\mathbf{C}^i$ der Kontrollpunkte, wie oben beschrieben. Die entsprechenden Matrizen $\tilde{\mathbf{C}}^{4i+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{C}}^{4i+4}$ der verfeinerten Patches erhält man mittels der Matrix S, wie sie in (6.15) definiert wurde. Beispielsweise ergibt sich für den Patch $\tilde{\mathbf{x}}^{4i+1}$ gemäß (6.19)

$$\tilde{\mathbf{C}}^{4i+1} = S\mathbf{C}^i S^{\mathrm{t}}\,. \tag{6.55}$$

Die drei anderen Patches erhält man aus Symmetriegründen vollkommen analog. Abbildung 6.5 illustriert diesen Vorgang.

Iteriert man den Subdivisionsprozess beginnend mit einem Quasikontrollnetz $\mathbf{C}[0]$, so entsteht eine Folge

$$\mathbf{C}[m+1] := \mathcal{S}\mathbf{C}[m]\,, \quad m \in \mathbb{N}_0\,, \tag{6.56}$$

immer feinerer Quasikontrollnetze, die rasch gegen die Grenzfläche $\mathbf{x} = L\mathbf{C}[0]$ konvergiert. Da bei der Unterteilung alle Patches separat behandelt werden, lässt sich die Konvergenzgeschwindigkeit an einem einzelnen Patch studieren. Hier finden Standardresultate über die quadratische Konvergenz von Unterteilungsalgorithmen Anwendung [CS85, Dah86] und man erhält als Ergebnis, dass es eine nur von den Anfangsdaten $\mathbf{C}[0]$ abhängige Konstante Γ gibt, so dass für den Hausdorffabstand zwischen Quasikontrollnetz und Splinefläche die Abschätzung

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{C}[m]) \leq 2^{-2m}\Gamma \tag{6.57}$$

gilt. Bemerkenswert an dem hier vorgestellten Algorithmus sind drei Dinge:

- Die Subdivisionsvorschrift (6.55) ist vollkommen uniform, das heißt, dass für alle regulären und irregulären Patches dieselben Gewichte verwendet werden. Lediglich bei der Belegung der Matrix $\mathbf{C}^i$ muss im irregulären Fall berücksichtigt werden, dass der zentrale Kontrollpunkt $\mathbf{m}$ $(k+1)^2$-fach eingetragen wird.
- Der Grenzwert $\mathbf{x}$ des Algorithmus lässt sich in geschlossener Form durch *endlich viele* polynomiale Patches darstellen.
- Es handelt sich hier um den ersten Subdivisionsalgorithmus für Glattheit und Flexibilität beliebiger Ordnung. Der Typ des Algorithmus ist $\bigl(r(k+1), k\bigr)$ und der Polynomgrad somit minimal.

4.4. Aspekte einer Implementierung. Die Implementierung eines CAD-Systems auf TURBS-Basis ist ein Projekt für die Zukunft. In diesem Abschnitt soll lediglich gezeigt werden, dass TURBS nicht nur aus theoretischer Sicht glatt sind, sondern auch die Modellierung von Freiformflächen erlauben, die gewissen ästhetischen Maßstäben genügen. Dieser etwas „unmathematische“ Gesichtspunkt ist tatsächlich von entscheidender Bedeutung für die Praxistauglichkeit eines Splinemodells.

4.4.1. *Konstruktion von (n,k)-Darstellungen.* Die Wahl der (n,k)-Darstellung $\mathbf{r}$ ist von entscheidender Bedeutung für die Gestalt der erzeugbaren Flächen. Wie bei vielen Anwendungen sinnvoll, wollen wir im Folgenden voraussetzen, dass $\mathbf{r}$ symmetrisch ist, das heißt, dass für alle $j \in \mathbb{Z}_n$ der Patch $\mathbf{r}^j$ durch eine Drehung um den Winkel $2\pi/n$ in $\mathbf{r}^{j+1}$ übergeht.

In [Rei98] wird vorgeschlagen, die Bernstein-Bézierdarstellung der Patches $\mathbf{r}^j$ so zu wählen, dass der Ursprung ein $(k+1)^2$-facher Kontrollpunkt ist und die übrigen Kontrollpunkte aus der äquidistanten Unterteilung der Seiten eines regelmäßigen n-Ecks gewonnen werden. Diese Konstruktion ist möglich, liefert aber keine optimalen Ergebnisse. Der folgende Ansatz erweist sich als überlegen: Wir stellen die Segmente $\mathbf{r}^0, \ldots, \mathbf{r}^{n-1}$ als uniforme Tensorproduktsplines vom Bigrad $k+1$ mit Kontrollpunktmatrizen $\mathbf{R}^0, \ldots, \mathbf{R}^{n-1}$ der Dimension $(k+2) \times (k+2)$ dar. Analog zu dem weiter oben Gesagten haben die Patches genau dann

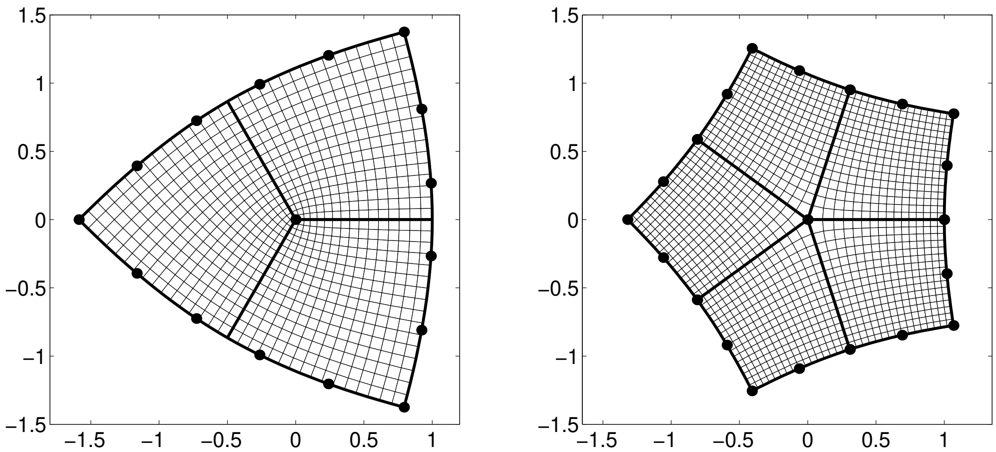


ABBILDUNG 6.6. Darstellung $\mathbf{z}_n$ und Anordnung der Kontrollpunkte $\mathbf{R}^j_{p,q}$ für $n = 3, k = 3$ *(links)* und $n = 5, k = 2$ *(rechts)*.

C^k-Kontakt, wenn jeweils $k+1$ Reihen von Kontrollpunkten benachbarter Patches übereinstimmen. Auch hier sind zusammenfallende Kontrollpunkte erforderlich,

$$\mathbf{R}^j_{p,q} = \mathbf{0}\,, \quad p, q = 0, \ldots, k\,,\ j \in \mathbb{Z}_n\,. \tag{6.58}$$

Es ist also nur der äußere Ring von Kontrollpunkten variabel. Nach einer auf D. LEVIN[1] zurückgehenden Idee definieren wir die Darstellung $\mathbf{z}_n \in C^\infty(\Omega^n, \mathbb{R}^2)$ durch

$$\mathbf{z}'_n : (u, v, j) \mapsto \exp(2\pi i j/n)(u + iv)^{4/n} \tag{6.59}$$

$$\mathbf{z}_n := (\operatorname{Re}\mathbf{z}'_n, \operatorname{Im}\mathbf{z}'_n)\,, \tag{6.60}$$

siehe Abbildung 6.6. Mit $k' := \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ setzen wir nun

$$\mathbf{R}^j_{p,q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } \max(p,q) \le k \\ \mathbf{z}_n(1, (2q-k)/(k+2), j) & \text{für } p > k,\ q \ge k' \\ \mathbf{z}_n((2p-k)/(k+2), 1, j) & \text{für } p \ge k',\ q > k \\ \mathbf{R}^{j-1}_{k-q,p} & \text{für } p > k,\ q < k' \\ \mathbf{R}^{j+1}_{q,k-p} & \text{für } p < k',\ q > k \end{cases} \tag{6.61}$$

siehe Abbildung 6.6. Die zugehörigen (n, k)-Darstellungen sind in Abbildung 6.7 gezeigt.

4.4.2. *Beispiele.* Wir wollen nun anhand einiger Beispiele zeigen, dass mit den oben konstruierten (n, k)-Darstellungen tatsächlich Flächen konstruierbar sind, die den Anforderungen in der Praxis gerecht werden. Dies ist keineswegs trivial, da es unter Umständen Schwierigkeiten bereiten kann, die hochgradig singulären Parametrisierungen der D^k-Patches mit den sie umgebenden regulären Patches geeignet zu koppeln. Insofern liegt unser Augenmerk hier auf der Betrachtung der Umgebung einzelner irregulärer Ecken und nicht auf der Darstellung komplexer

[1] D. LEVIN, private Mitteilung, Tel Aviv, Januar 1994.

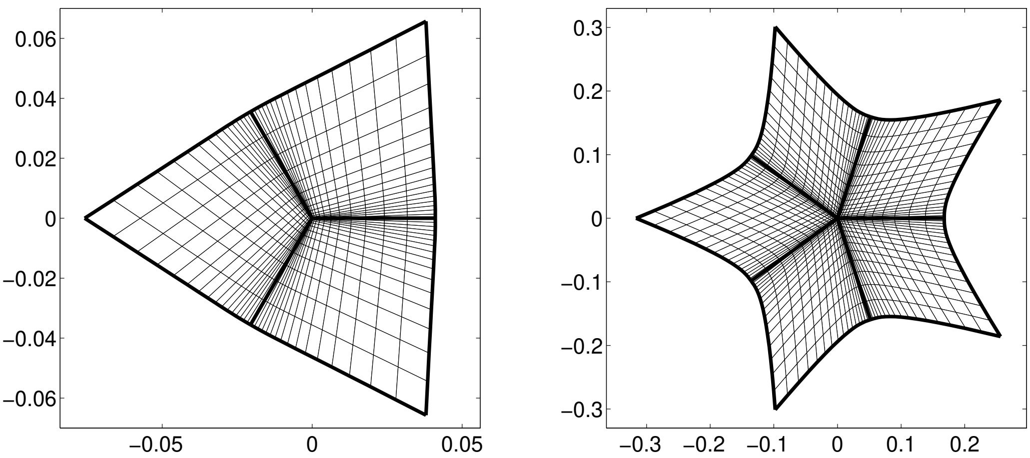


Abbildung 6.7. $(3,3)$-Darstellung *(links)* und $(5,2)$-Darstellung *(rechts)*.

globaler Strukturen. Abbildung 6.8 zeigt einen Ausschnitt aus einer C^2-TURBS-Fläche vom Bigrad 6 in einer Umgebung eines irregulären Punktes des Ordnung $n = 3$. In Abbildung 6.9 ist eine rationale C^2-TURBS-Fläche vom Bigrad 9 in einer Umgebung eines irregulären Punktes des Ordnung $n = 5$ dargestellt. Links oben ist jeweils das ursprüngliche Kontrollnetz zu sehen; rechts oben das Kontrollnetz nach Verfeinerung. Darunter sind die zugehörigen Bézier-Kontrollnetze zu sehen, wobei die Patchränder hervorgehoben sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Verteilung der Bézierpunkte in einiger Entfernung von der irregulären Ecke sehr homogen ist; die Verzerrungen, die durch die Singularität der Parametrisierung hervorgerufen werden, lassen sich also lokal begrenzen. Links unten ist schließlich jeweils die zugehörige beleuchtete Fläche zu sehen und rechts daneben die Reflexionslinien eines achsparallelen Gitters in der Draufsicht. Reflexionslinien dienen insbesondere in der Automobilindustrie als empfindliches Kriterium zur Beurteilung der Güte von Freiformflächen. Der harmonische Verlauf verdeutlicht, dass die hier gezeigten TURBS-Flächen von guter Qualität sind.

4.5. Der Ansatz von Prautzsch. Das hier vorgestellt Konzept der TURBS erlaubt vielfältige Varianten und Verallgemeinerungen. Darunter ist das bereits oben erwähnte, von H. Prautzsch vorgeschlagene Verfahren von besonderem Interesse. Wir wollen dieses darum abschließend noch kurz vorstellen:

Der Ansatz unterscheidet sich von dem hier vorgestellten in erster Linie durch die Wahl der Darstellung $\mathbf{r}$. Diese wird ebenfalls als stückweise polynomial vom Bigrad $d = k + 1$ angenommen, der Kontakt benachbarter Patches wird aber für $t \in [0, 1)$ nur als stetig angenommen; lediglich für den zu $t = 1$ gehörigen Knoten wird C^k-Glattheit gemäß (2.22) gefordert. Insbesondere sind die Patches von $\mathbf{r}$ im inneren Knoten nicht notwendig singulär parametrisiert. Abbildung 6.10 zeigt eine derartige Darstellungen für $n = 6$.

Dieser Ansatz hat folgende Konsequenzen: Zum einen lässt sich auch mit einem so gewählten $\mathbf{r}$ ein Splineraum $T_r^k(\Omega^n, \mathbb{R}^d, \mathbf{r})$ analog zu (6.33) konstruieren, dessen Elemente fast alle reguläre Flächen sind. Die Patches dieser Flächen sind in der Regel nicht singulär parametrisiert, sie sind dann auch nicht parametrisch, sondern vielmehr geometrisch glatt verbunden. Dies bringt Vorteile bei praktischen Anwendungen mit sich. Zum anderen ist aufgrund der C^k-Glattheit in den äußeren Knoten die Konstruktion eines Splineraums analog zu Definition 6.7 möglich. Die Elemente dieses Splineraums werden als *Freeform Splines* bezeichnet.

In [Pra97a] wird angedeutet, dass Freeform Splines in einem gewissem Sinne verfeinerbar sind, also ebenfalls die Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen erlauben. Es handelt sich jedoch nicht um Verfeinerbarkeit im üblichen Sinne, es ist vielmehr eine Reparametrisierung der gegebenen Fläche notwendig, um diese zu reproduzieren. Es entsteht so ein neue Klasse „geometrischer“ Subdivisionsalgorithmen, deren Eigenschaften in Zukunft zu untersuchen sein werden.

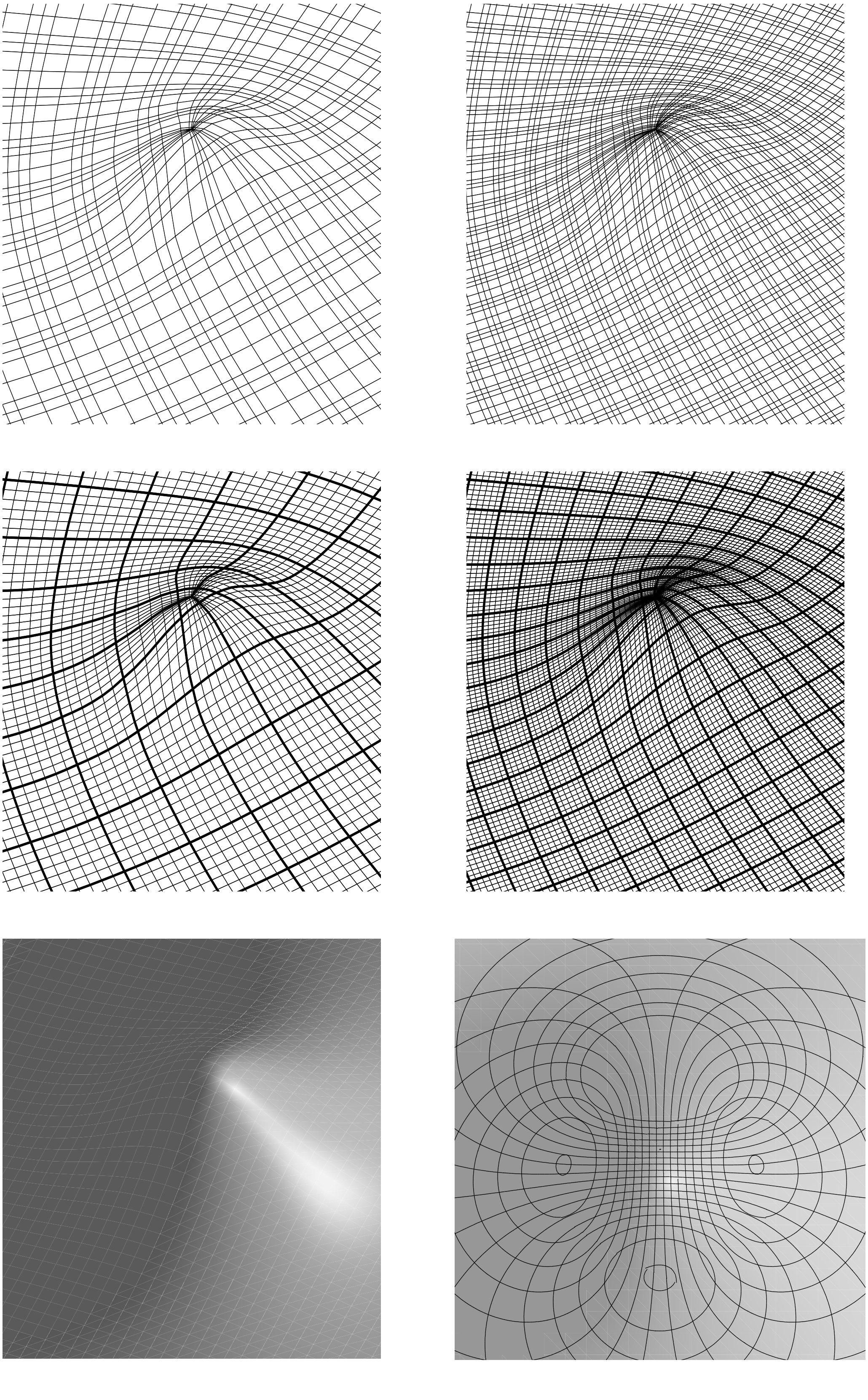


Abbildung 6.8. TURBS-Fläche vom Grad 6.

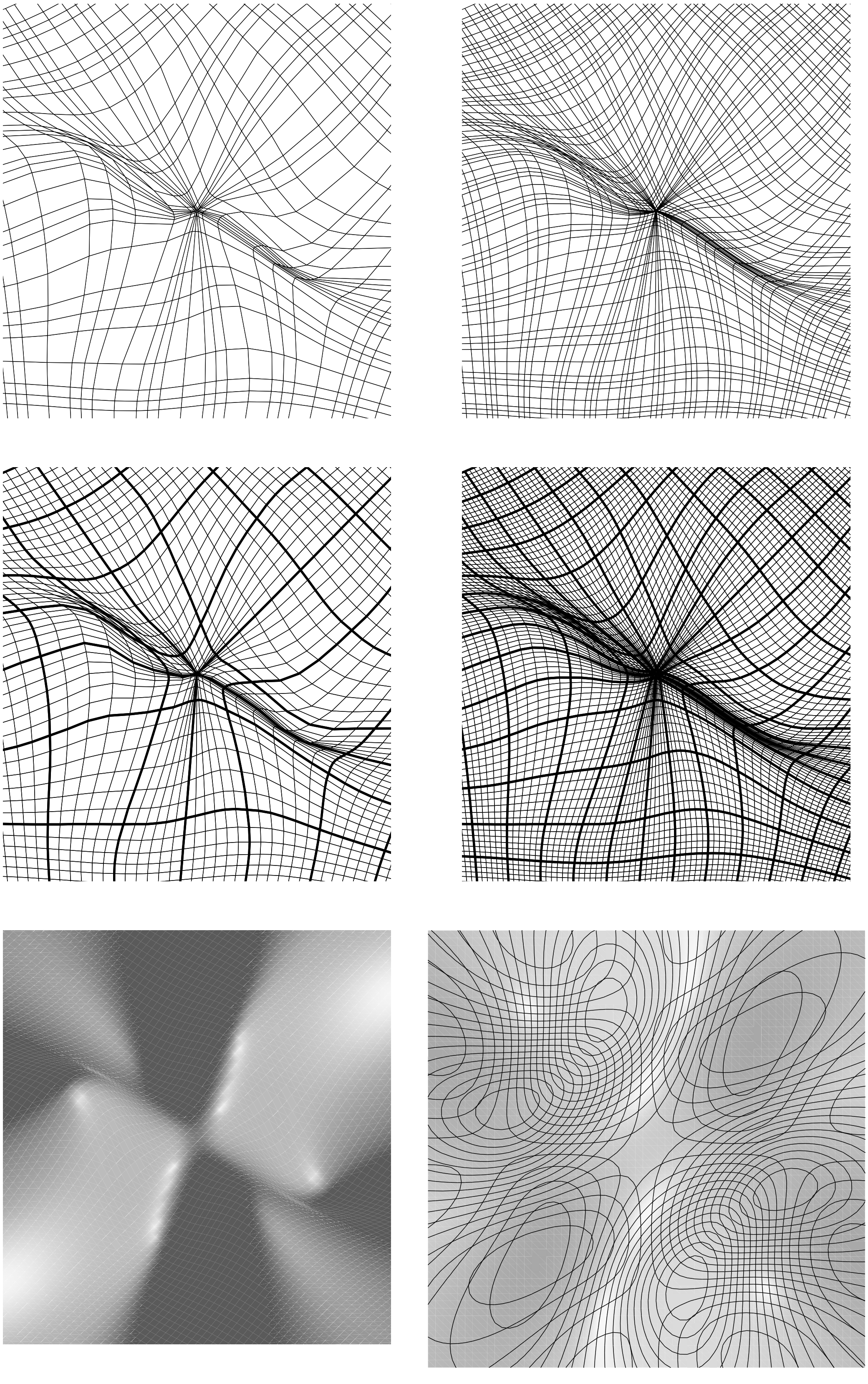


Abbildung 6.9. Rationale TURBS-Fläche vom Grad 9.

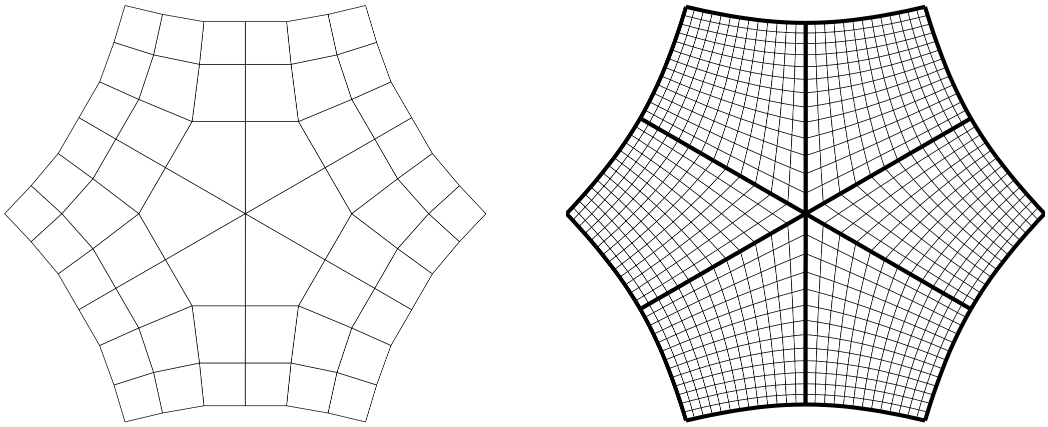


Abbildung 6.10. Modifizierte $(6,2)$-Darstellung nach Prautzsch *(rechts)* und zugehöriges Bézier-Kontrollnetz *(links)*.

Literaturverzeichnis

[Baj88] Ch.L. Bajaj. Geometric modeling with algebraic surfaces. In D. Handscomb, Hrsg., *The Mathematics of Surfaces III*, Seiten 3–48. Oxford University Press, 1988.

[BCX95] Ch.L. Bajaj, J. Chen und G. Xu. Modeling with cubic A-patches. *ACM Transactions on Graphics*, 14(2):103–133, April 1995.

[BD84] B.A. Barsky und T.D. DeRose. Geometric continuity of parametric curves. Technical Report UCB/CSD 84/205, University of California, Berkeley, 1984.

[Boe80] W. Boehm. Inserting new knots into B-spline curves. *Computer Aided Design*, 12:199–201, 1980.

[Boe85] W. Boehm. Triangular spline algorithms. *Comp. Aided Geom. Design*, 2:61–67, 1985.

[Boh95] H. Bohl. Degenerierte Kurven und Flächenstücke mit stetiger Krümmung. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Math. Inst. A, 1995.

[BR97] H. Bohl und U. Reif. Degenerate Bézier patches with continuous curvature. *Comp. Aided Geom. Design*, 14:749–761, 1997.

[BS86] A.A. Ball und D.J.T. Storry. A matrix approach to the analysis of recursively generated B-spline surfaces. *Computer Aided Design*, 18:437–442, 1986.

[BS88] A.A. Ball und D.J.T. Storry. Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 7:83–102, 1988.

[BS90] A.A. Ball und D.J.T. Storry. An investigation of curvature variations over recursively generated B-spline surfaces. Technical report, Loughborough University of Technology, 1990.

[Cat74] E. Catmull. A subdivision algorithm for computer display of curved surfaces. Technical report, University of Utah, 1974.

[CC78] E. Catmull und J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 10:350–355, 1978.

[CDM91] A.S. Cavaretta, W. Dahmen und C.A. Micchelli. Stationary subdivision. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 93(453):1–186, 1991.

[Cha74] G.M. Chaikin. An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:346 – 349, 1974.

[CLR80] E. Cohen, T. Lyche und R. F. Riesenfeld. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:87 – 111, 1980.

[CS85] E. Cohen und L.L. Schumaker. Rates of convergence of control polygons. *Comp. Aided Geom. Design*, 2:229–235, 1985.

[Dah86] W. Dahmen. Subdivision algorithms converge quadratically. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 16:145–158, 1986.

[dB78] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Applied Mathematical Sciences. Springer–Verlag, 1978.

[dB87] C. de Boor. Cutting corners always works. *Comp. Aided Geom. Design*, 4:125–131, 1987.

[dB90] C. de Boor. Local corner cutting and the smoothness of the limiting curve. *Comp. Aided Geom. Design*, 7:389–397, 1990.

[dBHR93] C. de Boor, K. Höllig und S. Riemenschneider. *Box-Splines*. Springer Verlag, 1993.

[DDL85] W. Dahmen, N. Dyn und D. Levin. On the convergence rates of subdivision algorithms for box splines. *Constructive Approximation*, 1:305–322, 1985.

[Deg90] W. L. F. Degen. Explicit continuity conditions for adjacent Bézier surface patches. *Comp. Aided Geom. Design*, 7:181–189, 1990.

[DeR85] T. D. DeRose. *Geometric continuity: a parametrization independent measure of continuity for computer aided geometric design*. Dissertation, University of California, Berkeley, 1985.

[DGL87] N. Dyn, J.A. Gregory und D. Levin. A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Comp. Aided Geom. Design*, 4:257–268, 1987.

[DGL91] N. Dyn, J.A. Gregory und D. Levin. Analysis of Uniform Binary Subdivision Schemes for Curve Design. *Constructive Approximation*, 7:127–147, 1991.

[DHK93] T. DeRose, M. Halstead und M. Kass. Efficient, Fair Interpolation using Catmull-Clark Surfaces. In *SIGGRAPH '93 Proc.*, Seiten 35–44. Apple Computer, Inc., 1993.

[DL92] N. Dyn und D. Levin. Stationary and Non-Stationary Binary Subdivision Schemes. In T. Lyche und L.L. Schumaker, Hrsg., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, Seiten 209–216. Academic Press, 1992.

[DL95] N. Dyn und D. Levin. Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes. *J. Mathematical Analysis and Applications*, 193:594–621, 1995.

[DLG90] N. Dyn, D. Levin und J.A. Gregory. A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control. *ACM Transactions on Graphics*, 9:160–169, 1990.

[DLL92] N. Dyn, D. Levin und D. Liu. Interpolatory convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces. *Computer Aided Design*, 24:211–216, 1992.

[DM84] W. Dahmen und C.A. Micchelli. Subdivision algorithms for the generation of box splines. *Comp. Aided Geom. Design*, 1:77–85, 1984.

[dR47] G. de Rham. Un peu de mathematique à propos d'une courbe plane. *Elemente der Mathematik*, 2:73–76; 89–97, 1947. Collected works, 678–689.

[dR56] G. de Rham. Sur une courbe plane. *J. Math. Pures Appl.*, 35:25–42, 1956. Collected works, 696–713.

[dR59] G. de Rham. Sur les courbes limites de polygones obtenus par trisection. *Enseign. math.*, 5:29–43, 1959. Collected works, 728–743.

[DS78] D. Doo und M.A. Sabin. Behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 10:356–360, 1978.

[Dub86] S. Dubuc. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. Appl.*, 114:185–204, 1986.

[Dyn91] N. Dyn. Subdivision schemes in computer aided geometric design. In W.A. Light, Hrsg., *Advances in Numerical Analysis II*, Seiten 36–104. Oxford University Press, 1991.

[EDD+95] M. Eck, T.D. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery und W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *SIGGRAPH '95 Proc.*, Seiten 173–182. ACM, August 1995.

[Far88] G. Farin. *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press Inc. (London) Ltd., 1. Auflage, 1988.

[GD86] R.N. Goldman und T.D. DeRose. Recursive subdivision without the convex hull property. *Comp. Aided Geom. Design*, 3:247–265, 1986.

[Hah89] J. Hahn. Filling polygonal holes with rectangular patches. In W. Strasser, Hrsg., *Theory and Practice of Geometric Modeling*. Springer, 1989.

[HL92] J. Hoschek und D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner Stuttgart, 2. Auflage, 1992.

[HM90] K. Höllig und H. Mögerle. G-splines. *Comp. Aided Geom. Design*, 7:197–207, 1990.

[HW58] G.H. Hardy und E.M. Wright. *Zahlentheorie*. R. Oldenbourg München, 4. Auflage, 1958.

[Kob95a] L. Kobbelt. Interpolatory refinement by variational methods. In C. Chui und L. Schumaker, Hrsg., *Approximation Theory VIII, Vol. 2: Wavelets and Multilevel Approximation*, Seiten 217–224. World Scientific Publishing Co., 1995.

[Kob95b] L. Kobbelt. *Iterative Erzeugung glatter Interpolanten.* Dissertation, Universität Karlsruhe, 1995.

[Kob96] L. Kobbelt. A variational approach to subdivision. *Comp. Aided Geom. Design*, 13:743–761, 1996.

[Kob97] L. Kobbelt. Discrete fairing. In *Proceedings of the Seventh IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*, Seiten 101–131, 1997.

[Kob98a] L. Kobbelt. Using the discrete Fourier-transform to analyze the convergence of subdivision schemes. *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 5:68–91, 1998.

[Kob98b] L. Kobbelt. Variational design with parametric meshes of arbitrary topology. In *Creating fair and shape preserving curves and surfaces*, 1998. to appear.

[KvD97] F. Kuijt und R. van Damme. Smooth interpolation by a convexity preserving nonlinear subdivision algorithm. In A. Le Méehauté et al, Hrsg., *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, Seiten 219–224. Vanderbilt University Press, 1997.

[LDW97] M. Lounsbery, T.D. DeRose und J. Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Trans. on Graphics*, 16(1):34–73, 1997.

[Leb94] M. Leber. Interpolierende Unterteilungsalgorithmen. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1994.

[LH89] D. Liu und J. Hoschek. GC^1 continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches. *CAD*, 21(4):194–200, May 1989.

[Lip81] J.D. Lipson. *Elements of Algebra and Algebraic Computing.* Addison-Wesley, 1981.

[Loo87] Ch.T. Loop. Smooth subdivision for surfaces based on triangles. Diplomarbeit, University of Utah, 1987.

[LR80] J.M. Lane und R.F. Riesenfeld. A theoretical development for the computer generation of piecewise polynomial surfaces. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 2:35–46, 1980.

[MP87a] C.A. Micchelli und H. Prautzsch. Computing curves invariant under halving. *Comp. Aided Geom. Design*, 4:133–140, 1987.

[MP87b] C.A. Micchelli und H. Prautzsch. Computing surfaces invariant under subdivision. *Comp. Aided Geom. Design*, 4:321–328, 1987.

[MP89] C.A. Micchelli und H. Prautzsch. Uniform refinement of curves. *Linear Algebra and Applications*, 114/115:841–870, 1989.

[MU94] A. Le Méhauté und F. Utreras. Convexity preserving interpolatory subdivision. *Comp. Aided Geom. Design*, 11:17–37, 1994.

[NP94] M. Neamtu und P.R. Pfluger. Degenerate polynomial patches of degree 4 and 5 used for geometrically smooth interpolation in $\mathbb{R}^3$. *Comp. Aided Geom. Design*, 11:451–474, 1994.

[Pet91] J. Peters. Parametrizing singularly to enclose vertices by a smooth parametric surface. In E. M. Kidd S. MacKay, Hrsg., *Proceedings of Graphics Interface '91*, Seiten 1–7. Canadian Man-Computer Communications Society, 1991.

[Pet95] J. Peters. C^1-surface splines. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32(2):645–666, 1995.

[Pet96] J. Peters. C^2 surfaces built from zero sets of the 7-direction box spline. In G. Mullineux, Hrsg., *The Mathematics of surfaces VI*, Seiten 463–474. Clarendon Press, 1996.

[PK94] H. Prautzsch und L. Kobbelt. Convergence of subdivision and degree elevation. *Advances in Comp. Mathematics*, 2:143–154, 1994.

[PR97] H. Prautzsch und U. Reif. Necessary conditions for subdivision surfaces. Technical report, Sonderforschungsbereich 404, Universität Stuttgart, 1997. Report 97/04.

[PR98a] J. Peters und U. Reif. Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998. To appear.

[PR98b] J. Peters und U. Reif. The simplest subdivision scheme for smoothing polyhedra. *ACM Transactions on Graphics*, 1998. To appear.

[Pra95] H. Prautzsch. Analysis of C^k-subdivision surfaces at extraordinary points. Technical report, Universität Karlsruhe, 1995. unpublished manuscript.

[Pra97a] H. Prautzsch. Freeform Splines. *Comp. Aided Geom. Design*, 14:201–206, 1997.

[Pra97b] H. Prautzsch. How smooth are subdividable surfaces at extraordinary points? Technical report, Universität Karlsruhe, 1997. available at http://i33www.ira.uka.de.

[PU97a] H. Prautzsch und G. Umlauf. A G^2-subdivision algorithm. Technical report, Universität Karlsruhe, 1997. available at http://i33www.ira.uka.de.

[PU97b] H. Prautzsch und G. Umlauf. Improved triangular subdivision schemes. Technical report, Universität Karlsruhe, 1997. available at http://i33www.ira.uka.de.

[Rei93] U. Reif. *Neue Aspekte in der Theorie der Freiformflächen beliebiger Topologie*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1993.

[Rei95a] U. Reif. Biquadratic G-spline surfaces. *Comp. Aided Geom. Design*, 12:193–205, 1995.

[Rei95b] U. Reif. A note on degenerate triangular Bézier patches. *Comp. Aided Geom. Design*, 12:547–550, 1995.

[Rei95c] U. Reif. Some new results on subdivision algorithms for meshes of arbitrary topology. In C. K. Chui und L. L. Schumaker, Hrsg., *Wavelets and Multilevel Approximation*, Jgg. 2 of *Series in Approximations and Decompositions*, Seiten 367–374. World Scientific, 1995.

[Rei95d] U. Reif. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. *Comp. Aided Geom. Design*, 12:153–174, 1995.

[Rei96a] U. Reif. A degree estimate for subdivision surfaces of higher regularity. *Proc. of the AMS*, 124(7):2167–2174, 1996.

[Rei96b] U. Reif. On Constructing Topologically Unrestricted B-Splines. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 76:73–74, 1996. Suppl. 1.

[Rei97] U. Reif. A refineable space of smooth spline surfaces of arbitrary topological genus. *Journal of Approximation Theory*, 90(2):174–199, 1997.

[Rei98] U. Reif. TURBS – topologically unrestricted rational B-splines. *Constructive Approximation*, 14:57–77, 1998.

[Rie75] R.F. Riesenfeld. On Chaikin's algorithm. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4:304–310, 1975.

[Sch81] L.L. Schumaker. Spline functions: basic theory. In *Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication*. John Wiley & Sons, New York, 1981.

[SG94] H. Sitta und P. Gallmann. *Informationen zur neuen deutschen Rechtschreibung*. Dudenverlag, 1994.

[Sto85] D.J.T. Storry. *B-spline surfaces over an irregular topology by recursive subdivision*. Dissertation, Loughborough University of Technology, 1985.

[Zor97] D. Zorin. *Subdivision and multiresolution surface representations*. Dissertation, Caltech, Pasadena, 1997.

[Zor98] D. Zorin. Smoothness of stationary subdivision on irregular meshes. Technical report, Stanford University, 1998.