

Efronsche Würfe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2025

Spielregel

Vor uns liegen vier ungewöhnliche Würfel. Wir spielen ein Spiel mit zwei Spielern. Spieler 1 ist die Besucherin bzw. der Besucher der Langen Nacht. Spieler 2 ist die Mathematikerin bzw. der Mathematiker am Stand.

Spieler 1 kann sich die Würfel anschauen. Danach wählt Spieler 1 einen der Würfel aus. Spieler 2 nimmt danach einen (der anderen) Würfel. Beide Personen würfeln gleichzeitig. Wer die höhere Augenzahl hat, gewinnt die Runde. Dabei gewinnt die Eule immer gegen alle anderen Zahlen. In der nächsten Runde kann Spieler 1 einen (ggf. neuen) Würfel auswählen, Spieler 2 nimmt danach einen (der anderen) Würfel.

Es gewinnt das Spiel, wer zuerst 10 Runden gewonnen hat. Die Besucherinnen und Besucher des Standes erhalten für die Teilnahme am Spiel einen Preis.

Bitte spiele zuerst das Spiel am Stand, bevor du das Poster weiterliest!

Die Würfel

Die beiden Spieler benutzen verschiedene Würfel, wenn sie gegeneinander antreten. Zur Auswahl stehen die folgenden vier Würfel:

- Würfel A: 3, 3, 3, 3, 3, 3
- Würfel B: 0, 0, 4, 4, 4, 4
- Würfel C: 1, 1, 1, 5, 5, 5
- Würfel D: 2, 2, 2, Eule, Eule

A vs. B

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel A gegen Würfel B gewinnt? Dazu muss Würfel B eine '0' zeigen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, denn in zwei (günstigen) Fällen von sechs (möglichen) Fällen zeigt Würfel B eine '0'. Also ist Würfel A schlechter als Würfel B.

B vs. C

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel B gegen Würfel C gewinnt? Dazu muss Würfel B eine '4' zeigen und Würfel C eine '1'. Es gibt hier insgesamt 36 mögliche Fälle für die Ausgänge. Günstig sind davon $4 \cdot 3 = 12$. Daher hat "B gewinnt gegen C" die Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Also ist Würfel B schlechter als Würfel C.

Zum Nachdenken

Angenommen, Spieler 1 benutzt Würfel A und Spieler 2 benutzt Würfel B. Wie wahrscheinlich ist es, dass Spieler 1 die Runde gewinnt?

Wie ist es, wenn Spieler 1 Würfel B und Spieler 2 Würfel C wählt? ...

C vs. D

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel C gegen Würfel D gewinnt? Dazu muss Würfel C eine '5' zeigen und Würfel D eine '2', was in $3 \cdot 4 = 12$ Fällen vorkommt. Daher hat "C gewinnt gegen D" die Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Also ist Würfel C schlechter als Würfel D.

D vs. A

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel D gegen Würfel A gewinnt? Dazu muss Würfel D die Eule zeigen. Dies ist in zwei von sechs Fällen so. Daher hat "D gewinnt gegen A" die Wahrscheinlichkeit $=\frac{1}{3}$. Also ist Würfel D schlechter als Würfel A.

Spielstrategie, Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler 2

Spieler 1 wählt zuerst den Würfel. Damit hat Spieler 2 die Möglichkeit, einen "besseren" Würfel auszuwählen. Mit Wahrscheinlichkeit ²/₃ gewinnt Spieler 2 also in einer Runde.

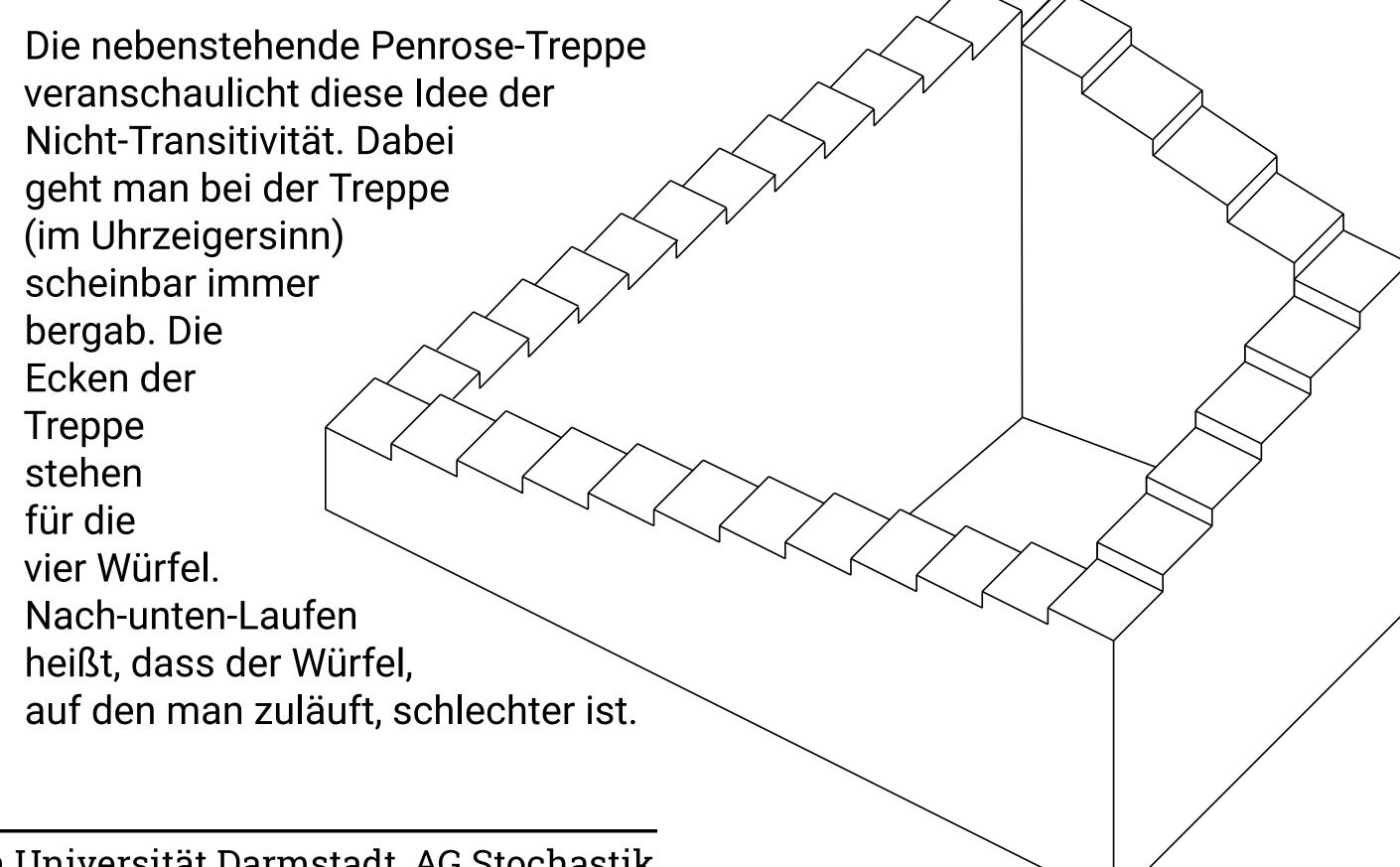
Zum Nachdenken: Wie wahrscheinlich ist es, dass Spieler 2 zuerst 10 Runden gewonnen hat?

Tipp: Spieler 2 gewinnt genau dann das Spiel, wenn er/sie in Runde k zum 10. Mal gewinnt für ein $k \in \{10, 11, ..., 19\}$. Spieler 2 muss also die k. Runde gewinnen und vorher genau 9 aus k-1 Spielen.

Lösung zum Vergleichen: Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt ca. 94%.

Nicht-Transitivität

Daraus, dass Würfel A schlechter als Würfel B ist, Würfel B schlechter als Würfel C ist und Würfel C schlechter als Würfel D ist, folgt nicht, dass Würfel A der schlechteste ist. Denn wie oben gesehen wird Würfel D von Würfel A geschlagen. Man spricht von einer "nicht-transitiven" (oder "intransitiven") Relation zwischen den Würfeln. Bei einer "transitiven" Relation wären solche Schlussfolgerungen zulässig. Überlege dir ein Beispiel für Würfel mit einer transitiven Relation.



Anwendungen

Die Analyse von intransitiven Relationen mit probabilistischen Komponenten kann in folgenden Gebieten nützlich sein:

- Entscheidungsfindung: Optionen z.B. in einer ökonomischen Entscheidung sind im Allgemeinen nicht linear geordnet.
- Psychologische Forschung: Menschliche Entscheidungen berücksichtigen eine Vielzahl rationaler und auch unbewusster (unvergleichbarer) Faktoren.
- Künstliche Intelligenz: Algorithmen, die mit nicht-linearen und schlecht vorhersagbaren Umgebungen umgehen müssen, werden mit Hilfe von wahrscheinlichkeitsbasierten Szenarien trainiert.
- Biologische und ökologische Modelle: Z.B. in komplexen Räuber-Beute-Modellen gibt es viele Abhängigkeiten.
- Analyse von Spielen: Entscheidungen in (z.B. Brett-)Spielen folgen ähnlichen Prinzipien wie im Bsp. der Efron-Würfel.

