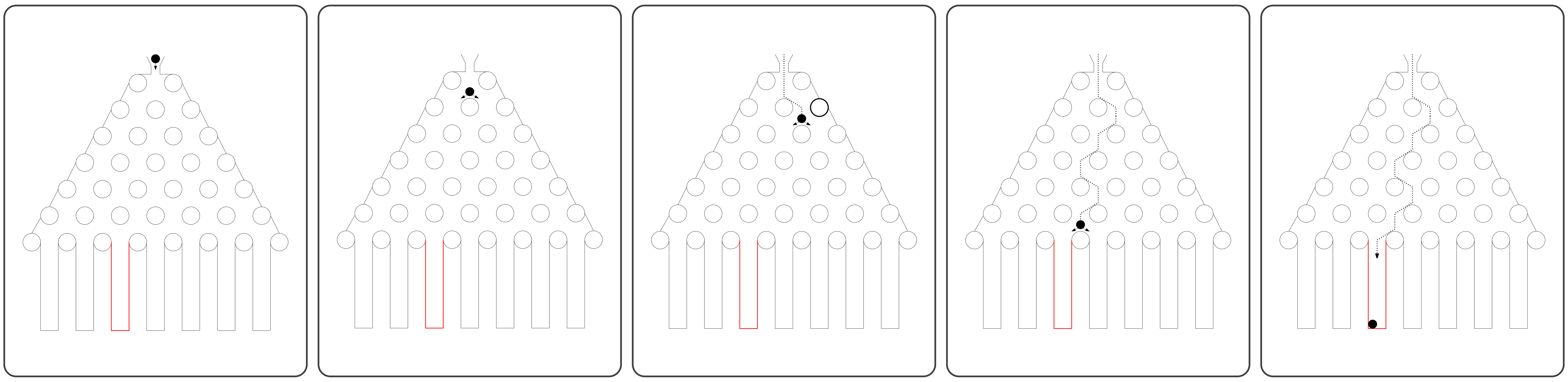
Galtonbrett

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beschreibung des Experiments

Ein Galtonbrett ist ein Gerät, mit dem man ein Zufallsexperiment durchführen kann. Es besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Hindernissen. Von oben wird eine Kugel in die Apparatur geworfen. Am ersten Hindernis springt die Kugel zufällig entweder nach links oder rechts und kommt dann auf die zweite Ebene, wo wieder ein Hindernis wartet. Am zweiten Hindernis kommt es wieder zur gleichen Zufallsentscheidung, etc. Nach dem Passieren aller Hindernisse werden die Kugeln in Fächern aufgefangen. Wir bezeichnen mit n die Anzahl der Hindernisebenen (im Bild unten ist $n = 6$). Es gibt am Ende des Bretts $n + 1$ Fächer (im Bild gibt es 7 Fächer).



Die Grundfrage

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Kugel in einem bestimmten Fach landet, z.B. dem roten?

Überlegung

Um in das erste Fach (das äußere linke, $k := 0$) zu kommen, muss die Kugel an jedem Hindernis nach links springen. Es gibt also genau einen Pfad, der die Kugel dorthin führt. Ingesamt gibt es 2^n Pfade. Jeder Pfad ist gleich wahrscheinlich. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, genau im linken Fach zu landen, $\frac{1}{2^n}$.

Für das zweite Fach ergibt sich durch analoge Überlegung (man muss genau einmal nach rechts gehen, wofür es genau n mögliche Pfade gibt) die Wkt. $n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Setze diese Überlegung für die weiteren Fächer fort.

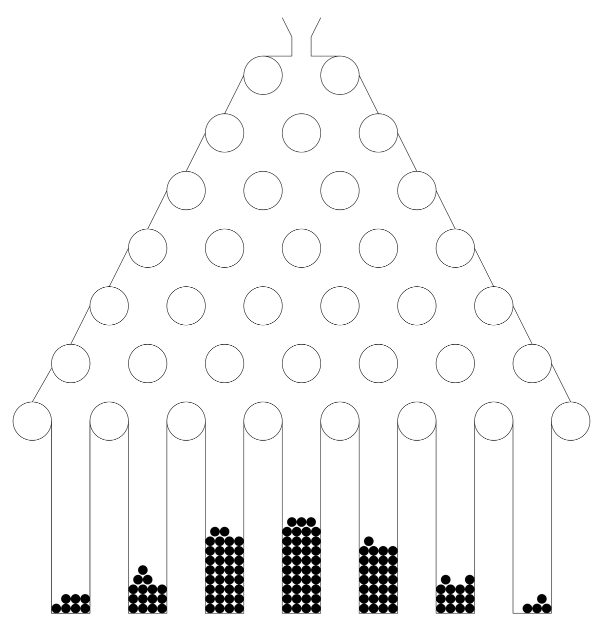
Allgemeine Formel

Sei n die Anzahl der Hindernisebenen des Bretts. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel im k-ten Fach landet ($0 \leq k \leq n$; $k = 0$ ist das äußere linke, $k = n$ das äußere rechte), ist gegeben durch

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{1}$$

Dabei ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Der Faktor $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der Pfade, die in Fach Nummer k führen: Wähle aus n Ebenen genau k aus (genau die Stellen, an denen man nach rechts geht). Die Verteilung in (1) nennt man Binomialverteilung.

Viele Kugeln

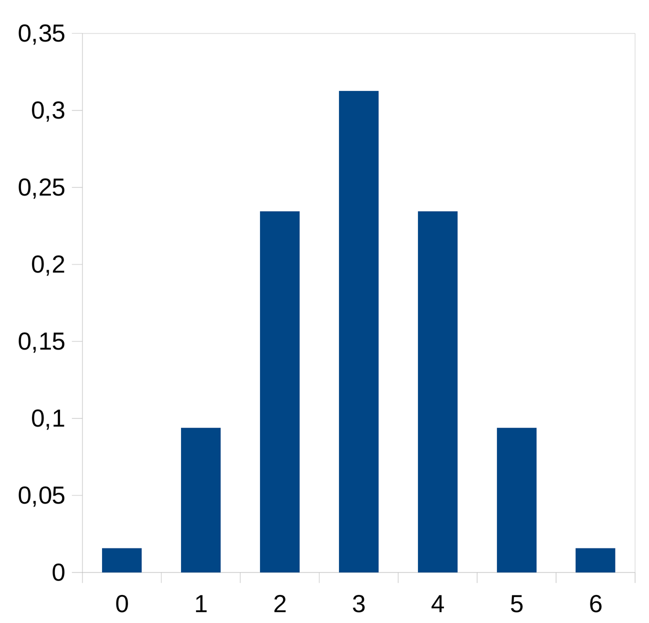


Das Gesetz der großen Zahlen

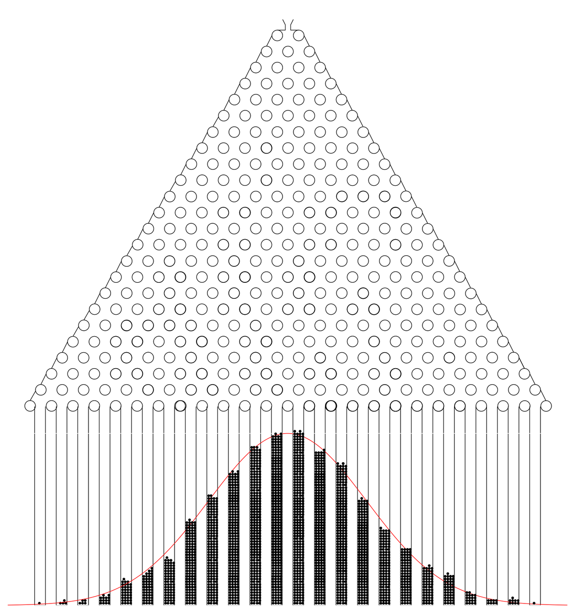
Was heißt es, dass die Wahrscheinlichkeit, im roten Fach zu landen, gleich $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$ ist ($n = 6$, $k = 3$ in den obigen Bildern)?

Die Wahrscheinlichkeit zu kennen, ist nur nützlich, wenn man eine große Anzahl an Versuchen macht, also viele Kugeln durch das Labyrinth an Hindernissen schickt. Die Anzahl der Kugeln in einem Fach wird dann proportional zu der Wahrscheinlichkeit sein, dass die Kugel dort landet (also zu der oben erwähnten Binomialverteilung). Dies ist eine Folgerung aus dem Gesetz der großen Zahlen: Relative Häufigkeiten nähern sich den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.

Binomialverteilung



Viele Fächer



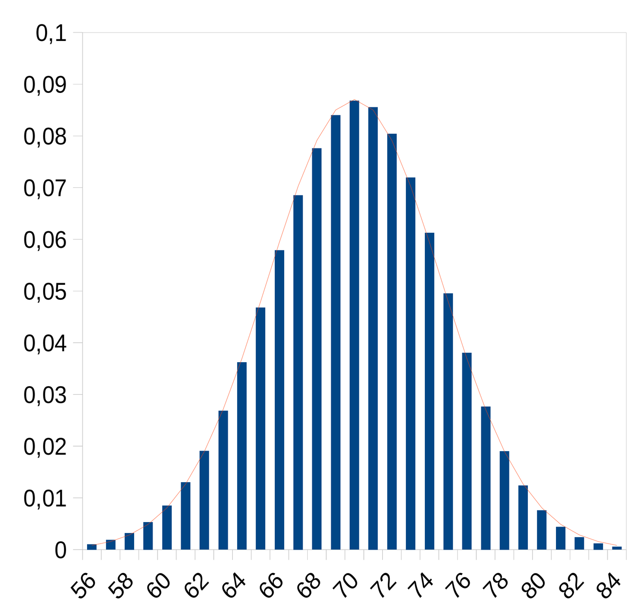
Der zentrale Grenzwertsatz

Hat man ein Galtonbrett mit vielen Fächern (und vielen Kugeln), so lässt sich die auftretende Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve) approximieren. Dies ist eine Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes. Die Formel für die Gaußsche Glockenkurve lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Diese Funktion muss angepasst werden (durch Verschiebung und Stauchung), um die entsprechende Binomialverteilung zu 'fitten' (vgl. rechtes Bild).

Normalverteilung



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster