Häuserproblem

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Problemstellung

Eine Familie ist auf der Suche nach einem Haus, das all ihre Wünsche erfüllt. Die Auswahl an Häusern ist sehr groß. Aus diesem Grund können sie jedes Haus maximal einmal besichtigen und müssen sich sofort entscheiden, ob sie in das Haus einziehen wollen. Einmal abgelehnte Häuser werden direkt an die nächste Familie verkauft und stehen nicht mehr zur Verfügung.

Wie findet die Familie das beste Haus?

Optimale Strategie

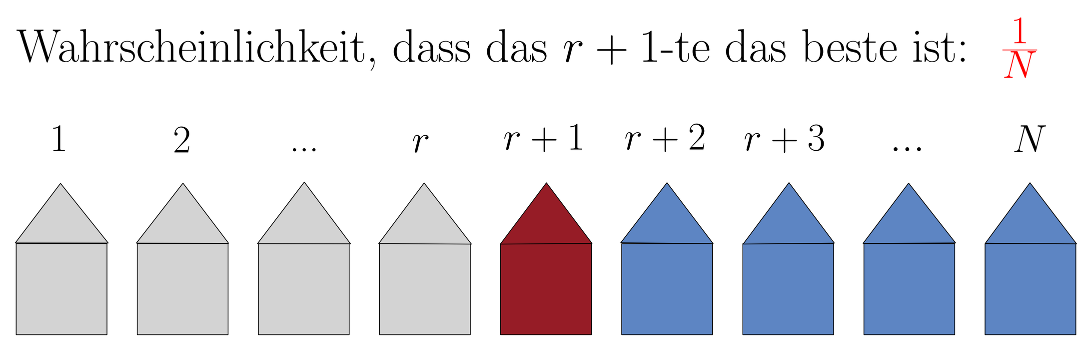
Es gibt N verschiedene Häuser. Gesucht ist eine Strategie, mit der die Familie die Wahrscheinlichkeit maximiert, das beste Haus ( ) zu finden.

Dabei kann sie wie folgt vorgehen: Die Familie wird sich erst eine repräsentative Auswahl an Häusern ansehen. Genauer: Sie wird sich r Häuser ( ) anschauen. Unter den verbleibenden $N-r$ Häusern ( ) wählt sie dann das erste Haus aus, welches besser ist als die vorherigen. Falls sie kein solches findet, muss sie das N-te nehmen.

Welches r maximiert die Wahrscheinlichkeit $P = P(r)$ dafür, dass das beste Haus gewählt wird?

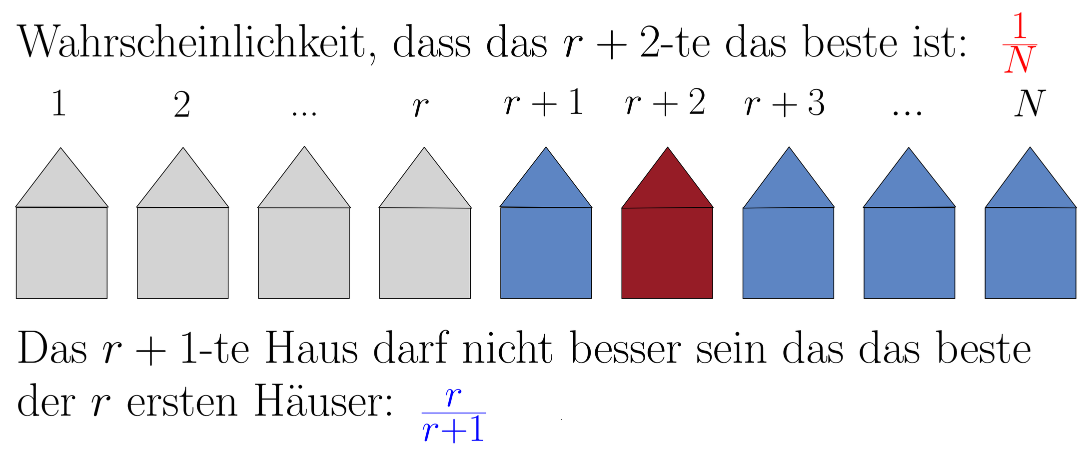
Einzelwahrscheinlichkeiten

1. Fall: Das $r+1$-te Haus ist das beste.



Die Wahrscheinlichkeit, dass das $r+1$-te Haus das beste ist, beträgt $\frac{1}{N}$. In diesem Fall wird mit der Strategie immer das beste Haus gewählt.

2. Fall: Das $r+2$-te Haus ist das beste.



Die Wahrscheinlichkeit, dass das $r+2$-te Haus das beste ist, beträgt wieder $\frac{1}{N}$. Damit dieses von der Strategie ausgewählt wird, muss das $r+1$-te Haus schlechter sein als das beste der vorherigen r Häuser. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{r}{r+1}$.

Weitere Fälle: Die Fälle, dass das $r+3, r+4, \ldots, N$-te Haus das beste ist, kann man analog behandeln.

Gesamtwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, das beste Haus zu finden, ist

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \cdot \frac{r}{r+1} + \cdots + \frac{1}{N} \cdot \frac{r}{N-1} \\ &= \frac{r}{N}\left(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) \\ &\approx \frac{r}{N}\int_r^N \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{r}{N}(\ln N - \ln r) = -\frac{r}{N}\ln\frac{r}{N}. \end{aligned}$$

Maximale Wahrscheinlichkeit

Wir bestimmen das optimale r durch Ableiten der Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$P'(r) \approx -\frac{1}{N}\left(\ln\frac{r}{N} + 1\right).$$

Die Nullstelle der Ableitung liefert dann den Wert für das optimale r mit

$$r_{opt} = \frac{N}{e} \approx 0{,}37 \cdot N.$$

Interpretation: Man schaue sich 37% der Häuser an und nehme dann das Haus, das besser ist als alle bisherigen.

Einsetzen von r_{opt} in die Formel für $P(r)$ liefert die Wkt., mit dieser Strategie das beste Haus zu finden: $P(r_{opt}) \approx \frac{1}{e}$.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster