

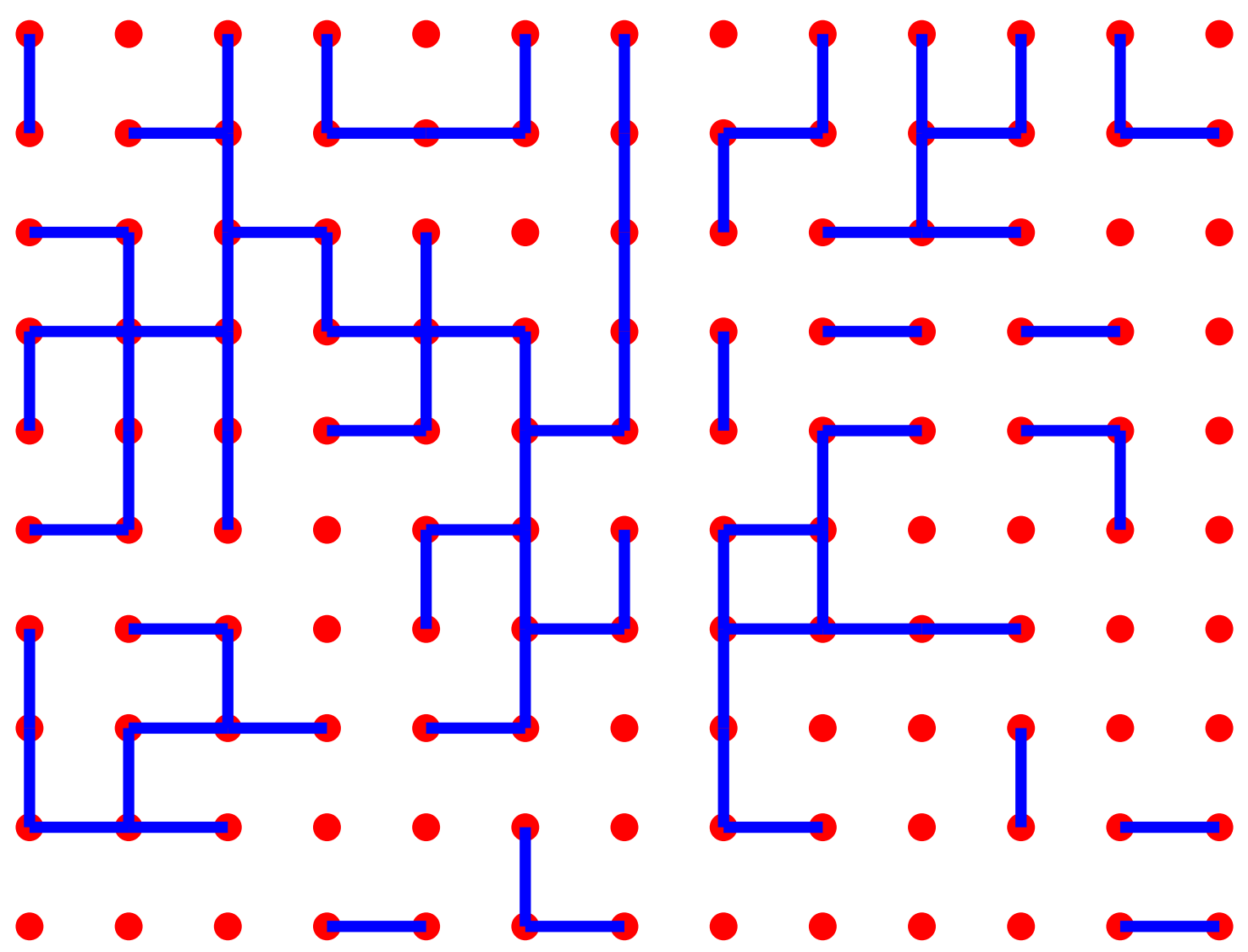


Perkolation

Lange Nacht der Mathematik 2025



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Was ist eigentlich Perkolation...?

Perkolation kann durch ein Spiel veranschaulicht werden, bei dem man **Wegpunkte (Knoten)** und mögliche Pfade (Kanten) zwischen ihnen betrachtet. Jeder Pfad ist entweder **begehrbar (offen)** oder unbegehrbar (geschlossen). Mit $p \in [0, 1]$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfad begehrbar ist, wobei wir einzelne Pfade unabhängig voneinander betrachten. Das Ziel des Spiels ist es, herauszufinden, ob man von einem bestimmten Wegpunkt im Netzwerk zu einem anderen Wegpunkt laufen kann. Wegpunkte, die durch begehrbare Pfade miteinander verbunden sind, bezeichnen wir als zusammenhängende Cluster. Wir interessieren uns dafür, wie weit wir bei welchem Wert p vermutlich laufen können.

...Und wieso sollte man sich damit beschäftigen?

Unabhängig davon, dass Perkolation für sich schon mathematisch interessant ist, können wir spannende Beispiele in der Wirklichkeit finden, bei denen wir unser Modell anwenden können. Ein Beispiel: Stellt euch vor, dass jeder in eurer Schule ein Knoten ist und die Verbindungen zwischen euch die Kanten sind. Wenn jemand krank ist, kann die Krankheit von einer Person zu einer anderen übertragen werden, indem man miteinander redet, sich die Hände gibt oder eine andere Art von Kontakt hat. Diese Verbindungen sind wie die offenen Pfade in unserem Spiel. Wenn die Krankheit von einer Person zu einer anderen übertragen wird, ist es so, als ob sie von einem Knoten zu einem anderen Knoten durch die offene Kante gelangt. Wenn es genügend viele offene Kanten gibt, dann könnte ein Großteil der Personen in der Schule infiziert werden, auch wenn anfangs nur eine einzige Person erkrankt ist.

Nutzen von Simulationen

Simulationen können im mathematischen Alltag sehr nützlich sein, auch wenn sie keinen Beweis ersetzen. Beispielsweise hilft eine Simulation, um zu erraten, welches Resultat vermutlich bewiesen werden kann. Sie kann auch Aufschluss über auftretende Effekte geben, die im Beweis genutzt werden können. Wir benutzen Simulationen im Beispiel Perkolation.

Um Perkolation zu simulieren, nutzen wir ein Quadrat $[-n, \dots, n] \times [-n, \dots, n]$ in \mathbb{Z}^2 , betrachten alle Kanten zwischen zwei benachbarten Punkten in diesem Gitter einzeln und würfeln zufällig mit Wahrscheinlichkeit p , ob die betrachtete Kante offen oder geschlossen ist. Rechts sind für diesen Prozess die größten entstehenden Cluster für $n = 500$ und $p \in \{0.5, 0.585, 0.59, 0.595\}$ dargestellt.

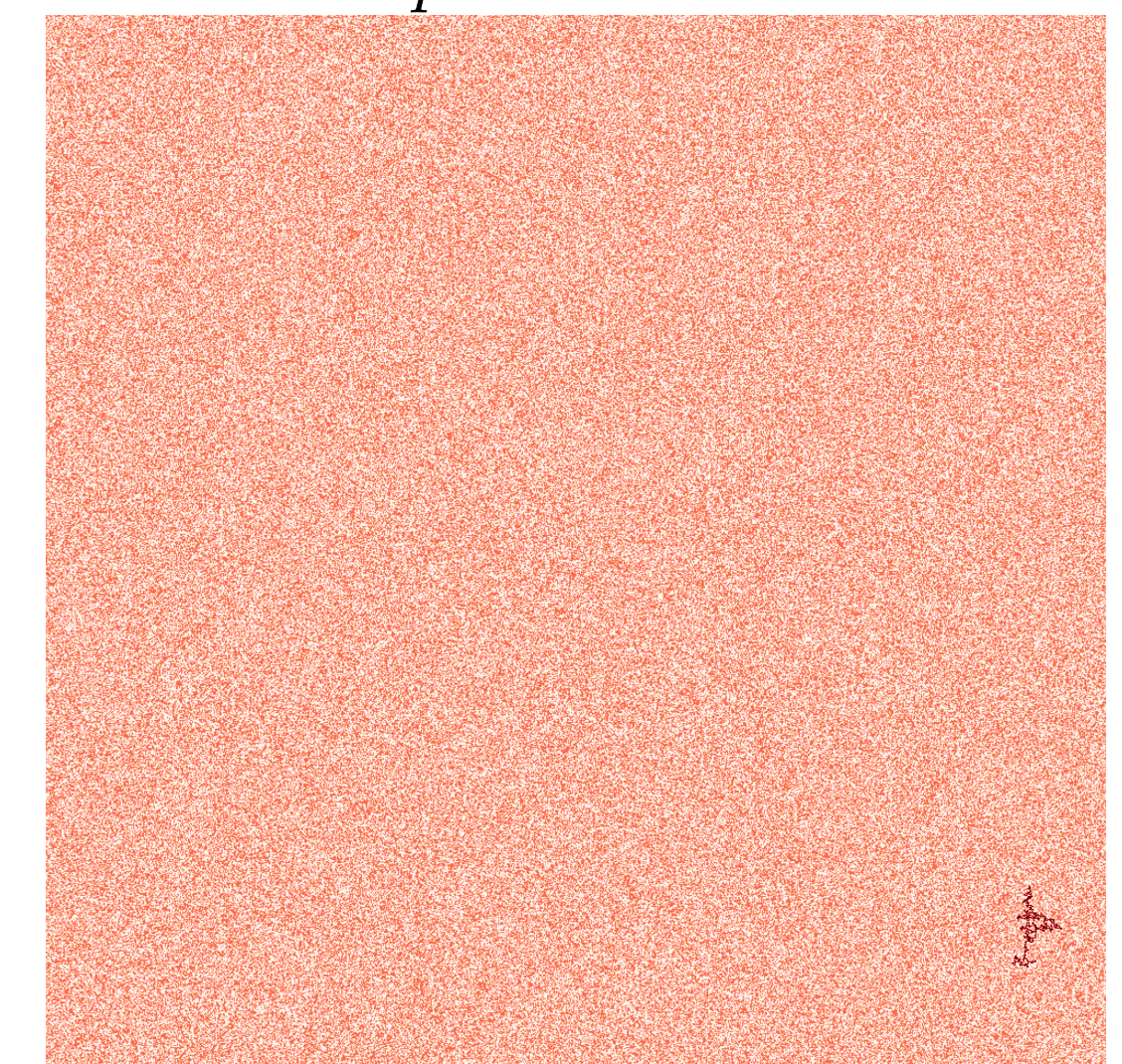
Mögliche Fragen, die bei diesen Bildern und beim Austesten der ausgestellten Simulation auftreten könnten, sind: Wenn n beliebig groß wird, existiert auch ein beliebig groß werdendes Cluster und, wenn ja, kann es mehrere geben? Wie groß ist der Anteil des größten Clusters gemessen an der Gittergröße? Im obigen Beispiel könnten damit folgende Fragestellungen diskutiert werden: Breitet sich die Krankheit an verschiedenen Orten getrennt voneinander aus? Falls sich eine Krankheit über die ganze Welt ausbreitet, wieviele Menschen sind insgesamt betroffen?

Der kritische Parameter

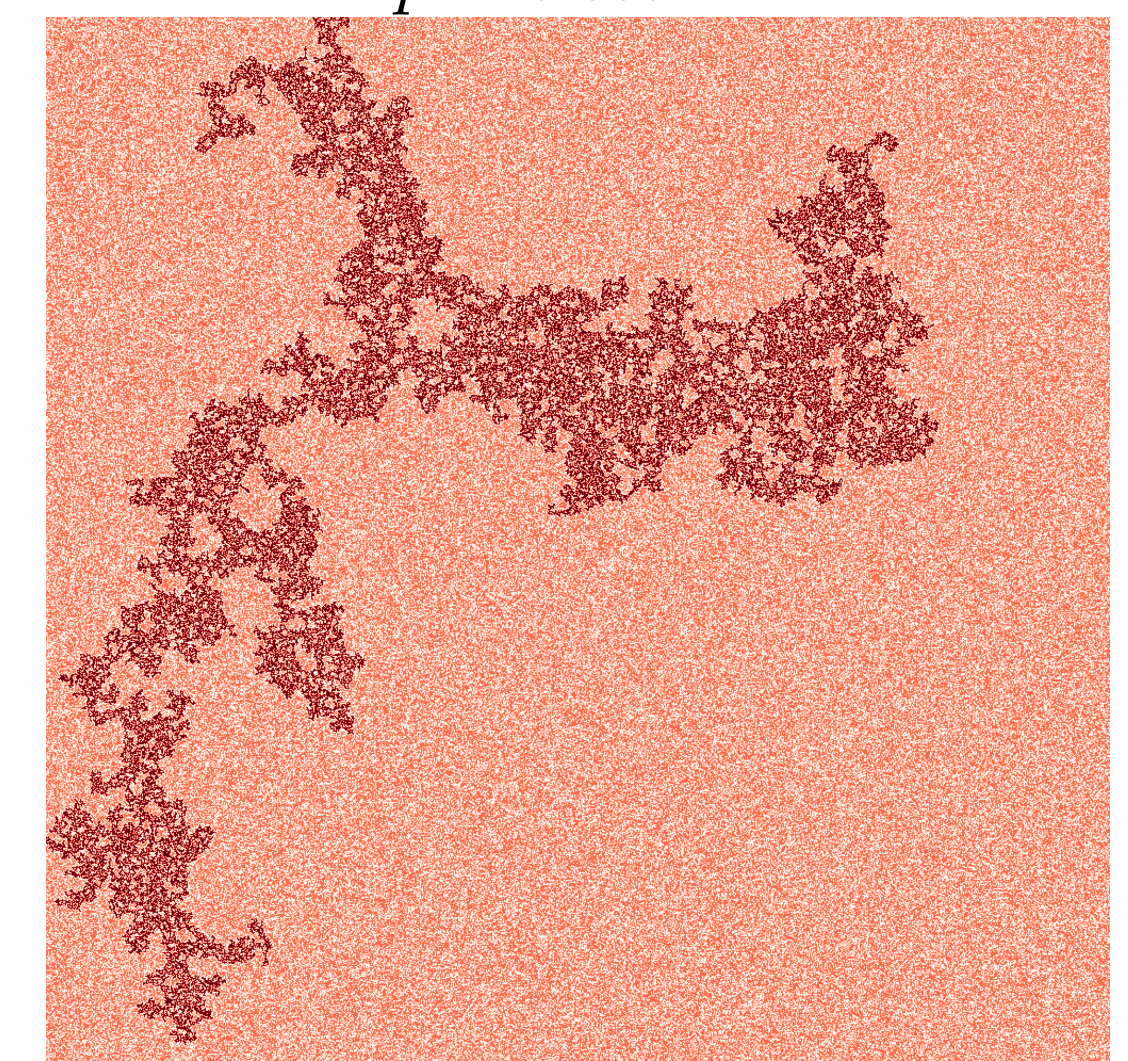
Der kritische Perkolationsparameter ist ein bestimmter Wert p_c , bei dem sich das Verhalten des Netzwerks dramatisch ändert. Für $p < p_c$ gibt es nur kleine zusammenhängende Cluster und es ist unwahrscheinlich, dass man von einem Knoten aus sehr weite Strecken gehen kann. Für $p > p_c$ gibt es ein großes zusammenhängendes Cluster, das sich über das gesamte Netzwerk erstreckt. Das bedeutet, dass beliebig große Distanzen innerhalb eines Clusters zurückgelegt werden können. Daher ist p_c der Übergangswert, bei dem das Netzwerk von einem Zustand mit kleinen zusammenhängenden Clustern zu einem Zustand mit einem großen zusammenhängenden Cluster wechselt.

Größte Cluster in Simulationen

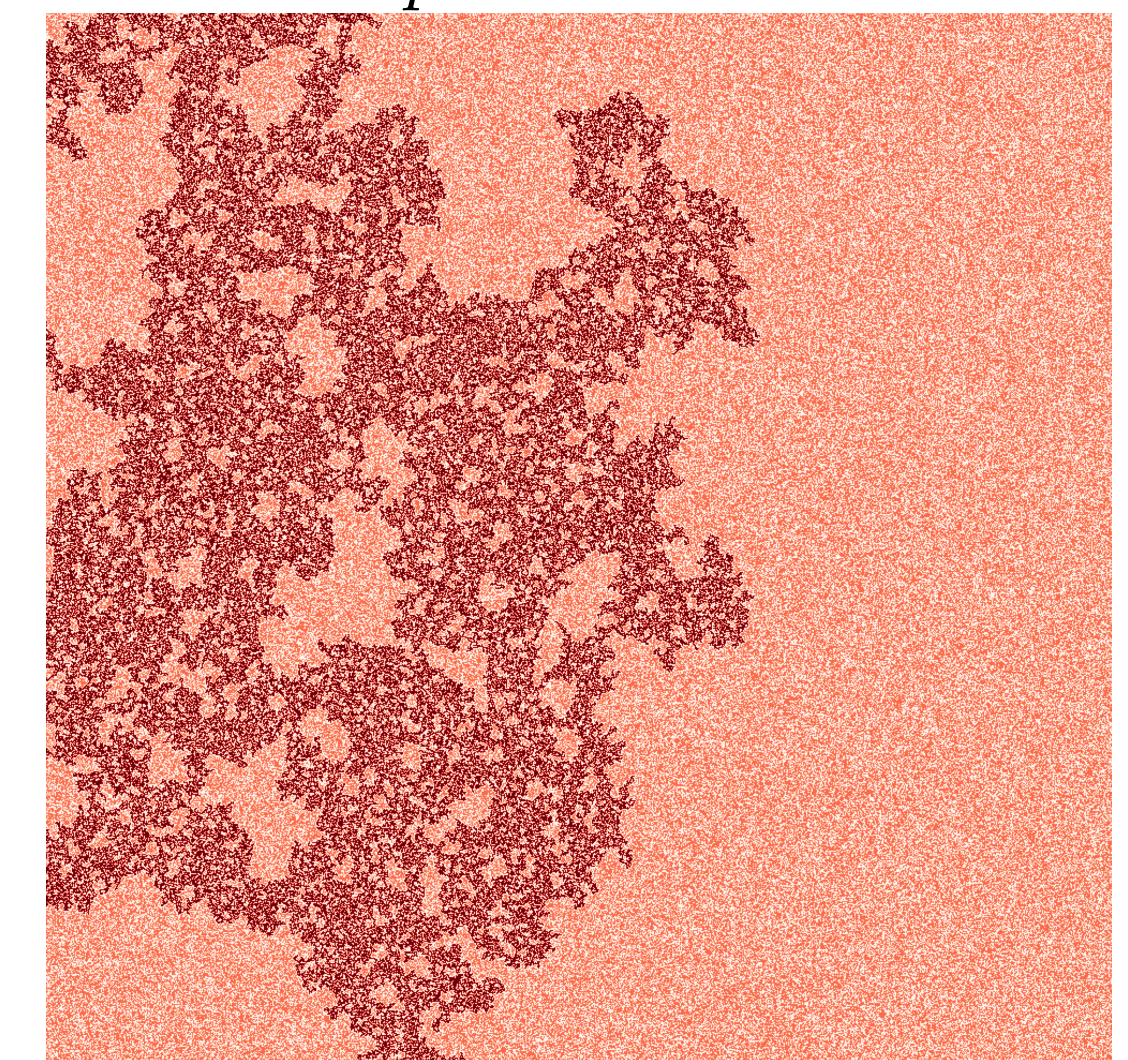
$p = 0.5$



$p = 0.585$



$p = 0.59$



$p = 0.595$

