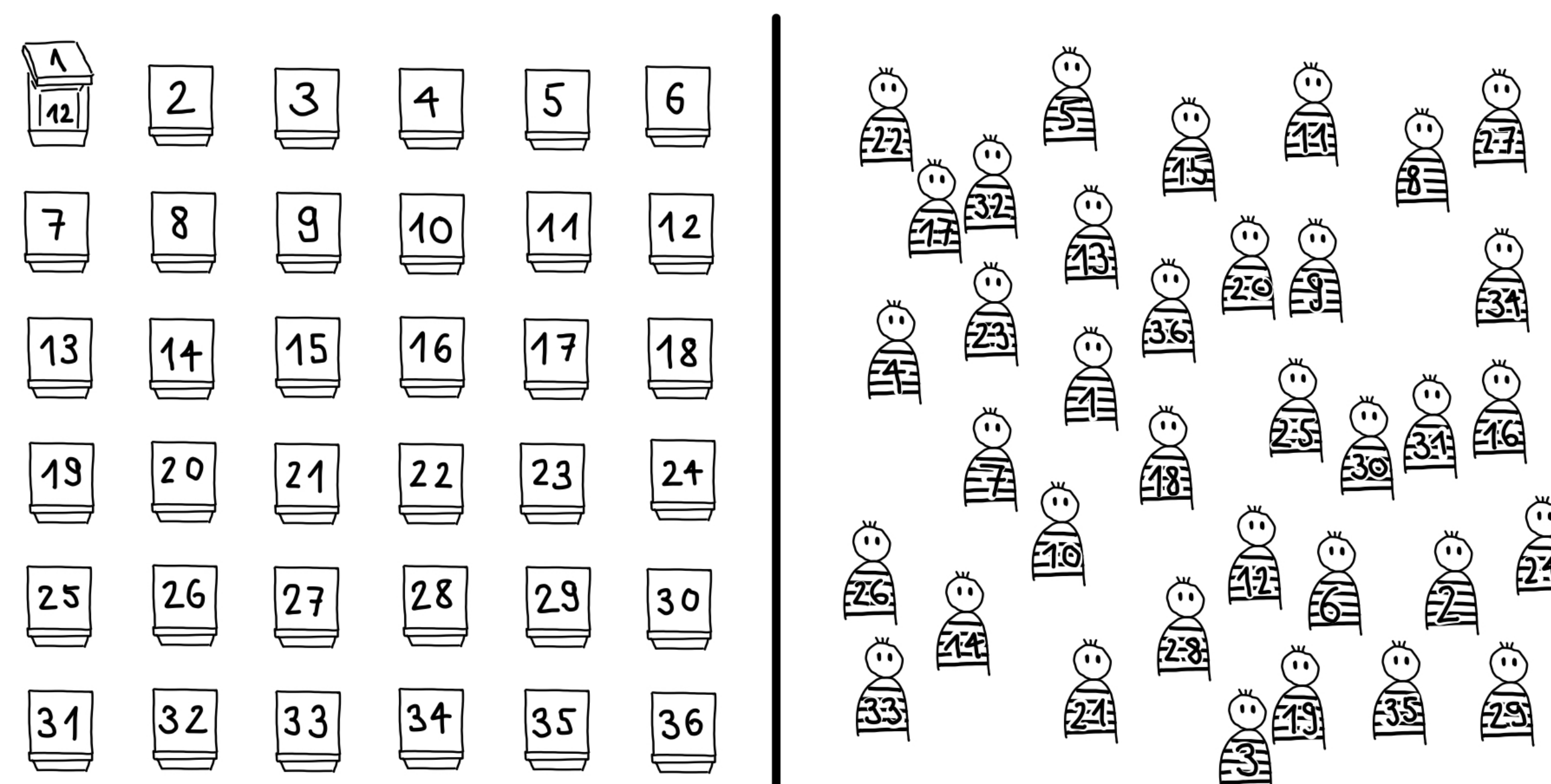




Lange Nacht der Mathematik 2025

Bitte spiele zuerst das Spiel am Stand, bevor du das Poster weiterliest!



Jeder Gefangene wählt zufällig die Hälfte der Boxen aus und öffnet sie. Dabei hat er eine Wahrscheinlichkeit von 50%, seine eigene Nummer zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 36 Gefangenen ihre Nummer finden, beträgt daher: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{36} \approx 0.0000000000146$, da die Erfolgswahrscheinlichkeit der Gefangenen jeweils unabhängig voneinander ist.

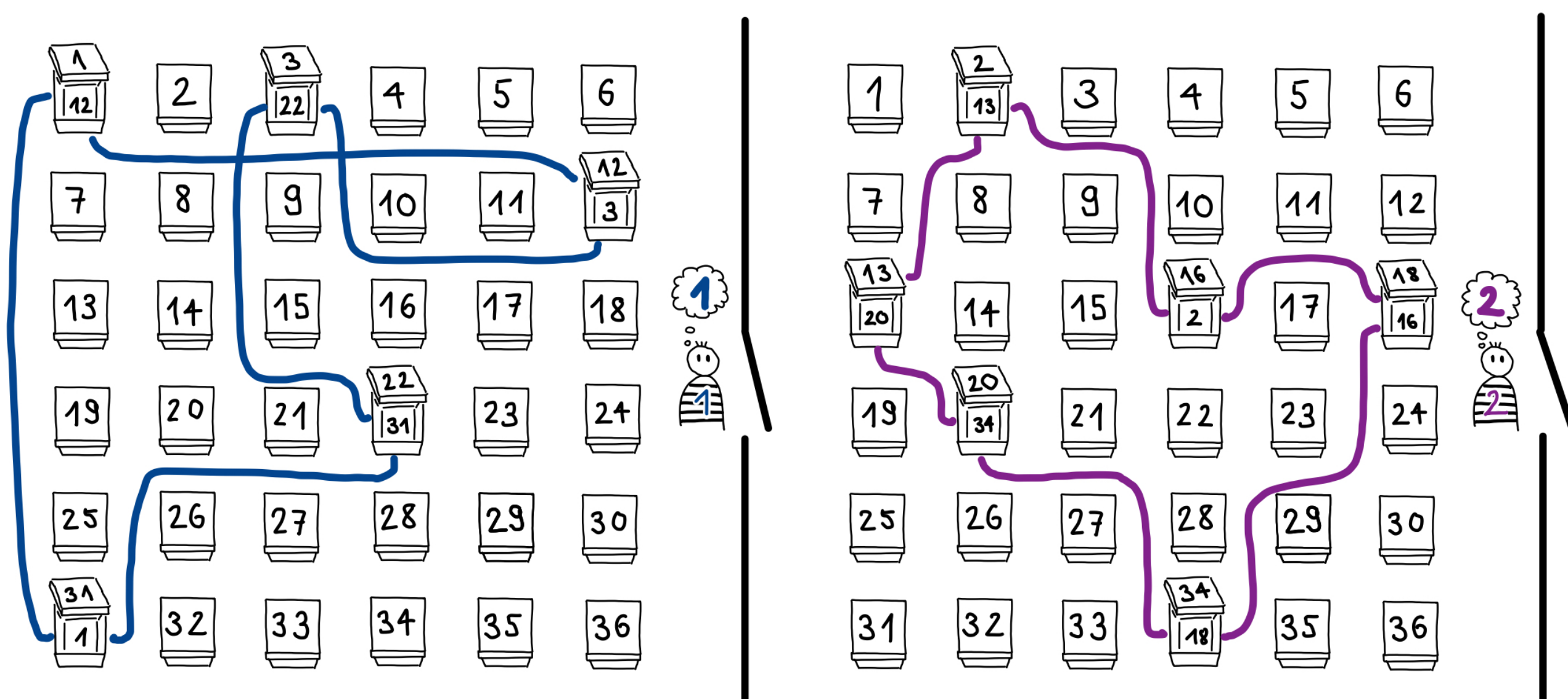
Zum Vergleich: Die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem einzigen Los im Lotto gewinnt, ist deutlich höher!

Es existiert jedoch eine Strategie, mit der die Erfolgswahrscheinlichkeit auf über 30% ansteigt.

Die Gefangenen nutzen eine andere Herangehensweise:

1. Jeder Gefangene beginnt bei der Box, die seiner eigenen Nummer entspricht.
2. Er öffnet diese Box und liest die Zahl, die er darin findet.
3. Als Nächstes geht er zur Box mit dieser Zahl und wiederholt Schritt 2.

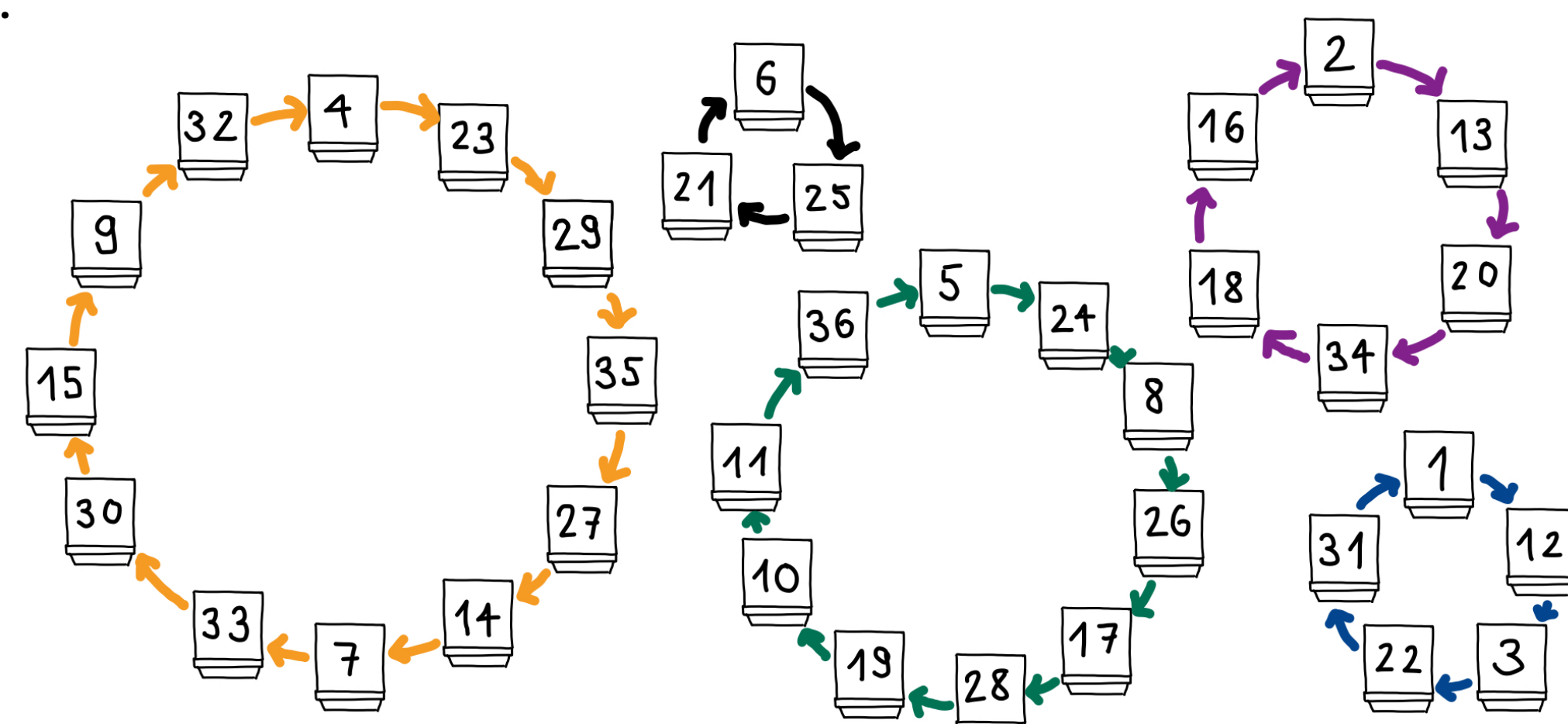
Dies setzt sich so lange fort, bis er entweder seine eigene Nummer findet oder die maximal erlaubten 18 Schritte erreicht sind.



Auf diese Weise erhöht sich die Erfolgswahrscheinlichkeit auf etwa 32%. Doch warum ergibt diese Strategie Sinn?

Führt man die Schritte 1-3 ohne die Beschränkung auf 18 Schritte aus, findet man immer seinen eigenen Zettel: Angenommen, dem wäre nicht so. Die Schrittfolge endet nur, sobald man einen Zettel findet, dessen Box schon offen ist. Findet man seinen eigenen Zettel nicht, beendet man die Schrittfolge also mit einem anderen Zettel. Die Box zu diesem Zettel kann aber nur dann schon offen sein, wenn der Zettel zu der Box vorher schon gefunden wurde (denn die einzige Box, die ohne vorheriges Finden des Zettels geöffnet wurde, ist die Box mit der eigenen Nummer). Also müsste es den letzten Zettel zweimal gegeben haben.

Die Zuordnung der Zahlen in den Boxen kann als eine Permutation dargestellt werden, also als eine 1:1 Zuordnung der Zahlen. Jede Permutation lässt sich in Zyklen zerlegen:



Die eigene Zahl muss daher früher oder später in dem Zyklus auftauchen, denn spätestens nach dem Durchlaufen aller 36 Boxen muss der Zettel mit der eigenen Nummer gefunden worden sein. Entscheidend ist: **Jeder Gefangene findet seine Nummer, wenn der Zyklus, der seine Nummer enthält, höchstens 18 Boxen beinhaltet.**

Die Strategie ist also für alle erfolgreich, wenn kein Zyklus der Permutation länger als 18 Elemente ist. Die Erfolgswahrscheinlichkeit entspricht daher der Wahrscheinlichkeit, dass alle Zyklen der Permutation maximal die Länge 18 haben.

Um die Erfolgswahrscheinlichkeit zu berechnen, berechnen wir zunächst die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten für einen Zyklus der Länge k , wobei $k > 18$. Dann können wir diese von 1 abziehen und erhalten die gewünschte Wahrscheinlichkeit. Als Beispiel bestimmen wir diese Wahrscheinlichkeit nun für einen Zyklus der Länge 36.

Die Anzahl aller möglichen Zuordnungen der Zettel zu den Boxen beträgt $36!$. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Für die erste Box können wir einen beliebigen der 36 Zettel wählen, für die zweite Box bleibt eine Auswahl aus 35 Zetteln, für die dritte 34 Zettel, und so weiter, bis zur letzten Box, die nur noch einen einzigen verbleibenden Zettel enthält, also ist die Anzahl $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot \dots \cdot 1$.

Nun berechnen wir die Anzahl der Permutationen, die einen einzigen Kreis der Länge 36 bilden. Schreiben wir die Kreise auf, indem wir die erste Zahl aus 36 auswählen, die zweite aus 35 usw., so erhalten wir wieder $36!$ Möglichkeiten, die Zahlen in einem solchen Kreis aufzuschreiben. Allerdings haben wir hierbei jeden Zyklus mehrfach gezählt: Ein und derselbe Kreis kann an jedem beliebigen Punkt gestartet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Permutation genau einen einzigen Zyklus der Länge 36 enthält, ist daher $\frac{1}{36!}$. Genauso beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Zyklus der Länge $k > 18$ genau $\frac{1}{k!}$. Damit ergibt sich als Erfolgswahrscheinlichkeit tatsächlich $1 - \frac{1}{36} - \frac{1}{35} - \dots - \frac{1}{19} \approx 32,05\%$.

