VOX POPULI - VOX DEI?

Lange Nacht der Mathematik 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

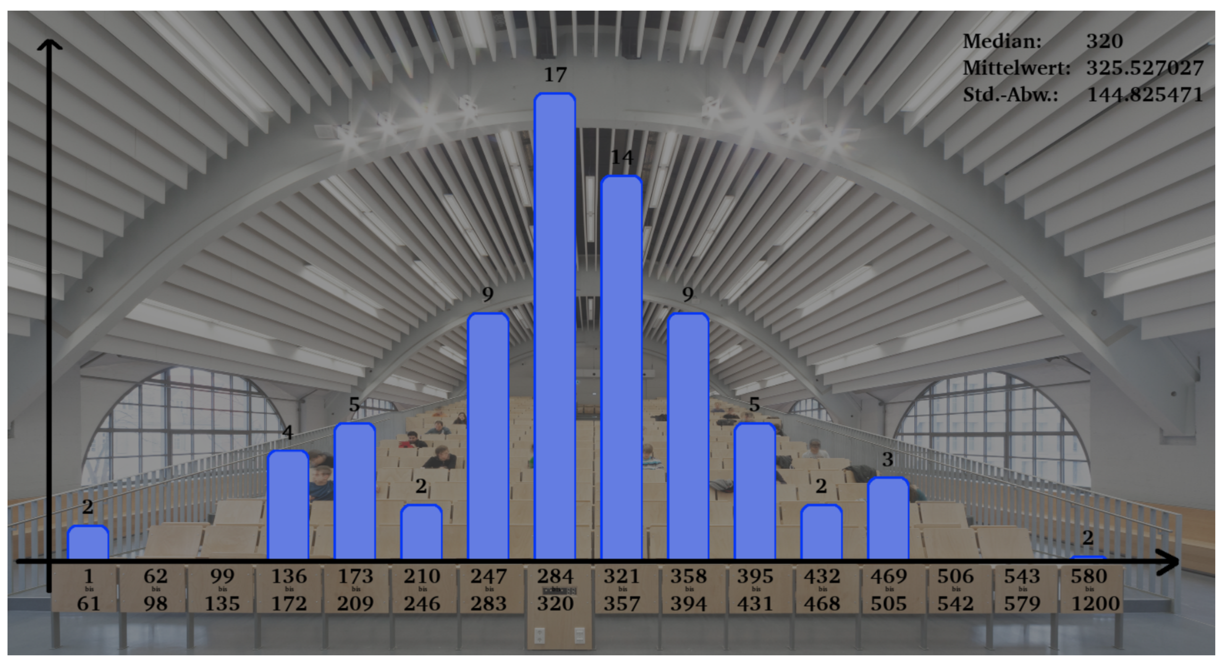
Ihre Stimme ist gefragt!

Können Sie die Zahl der Sitzplätze im großen Hörsaal richtig schätzen? Kann es mit Hilfe von kollektiver Intelligenz gelingen, die Anzahl der Sitzplätze möglichst genau zu schätzen (ohne nachzuzählen)?

Aufbau des Experiments:

Die Schülerinnen und Schüler geben ihre Schätzung für die Anzahl der Sitzplätze des großen Hörsaals in ein Programm ein. Als kollektive Intelligenz bezeichnen wir dann den Median, also die Schätzung in der Mitte aller Schätzungen. Wie gut wird sie sein? **Finden Sie das Ergebnis im Anschluss an die Veranstaltung über den QR-Code heraus!**

Ergebnisgrafik:

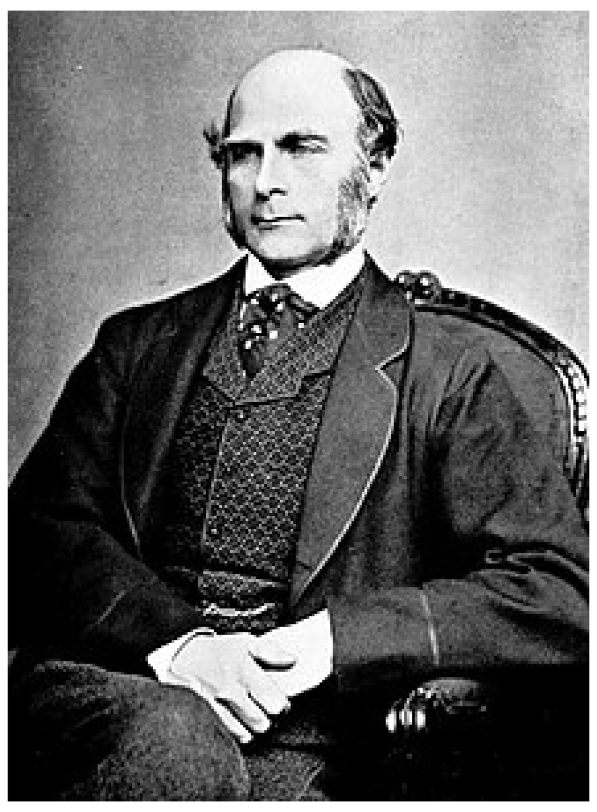


Wie genau wurde geschätzt?

Die korrekte Anzahl an Sitzplätzen ist: **372**

Die **74** Schätzungen der Schülerinnen und Schüler ergaben... Median: 320 Mittelwert: 325.53 Standardabweichung: 144.83

Der Median wich also um ca. 14% vom echten Wert ab.



Galton und die Stimme des Volks - Historischer Kontext[1]

Der britische Naturforscher und Schriftsteller Sir Francis Galton (1822 - 1911) ist skeptisch gegenüber der Weisheit der Masse, der Stimme des Volkes („Vox Populi“), und macht ein Experiment:

Auf einem Viehmarkt (1906) gibt es ein Gewinnspiel zur präzisen Schätzung des Gewichts eines großen Ochsen. Zur Teilnahme ist eine kleine Gebühr fällig. Er lässt sich die Lose übergeben und schreibt die Verteilung der Schätzungen auf. Zwar sind alle möglichen Ergebnisse dabei, doch zu seinem Erstaunen weicht der Median um lediglich 1% vom echten Wert ab.

Typische wichtige Voraussetzungen für solche Beobachtungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie sind die Unabhängigkeit und eine identische Verteilung hinter den Zufallsereignissen (z.B. den Angaben auf den Losen). **Sind diese bei menschlichen Abstimmungen gegeben?**

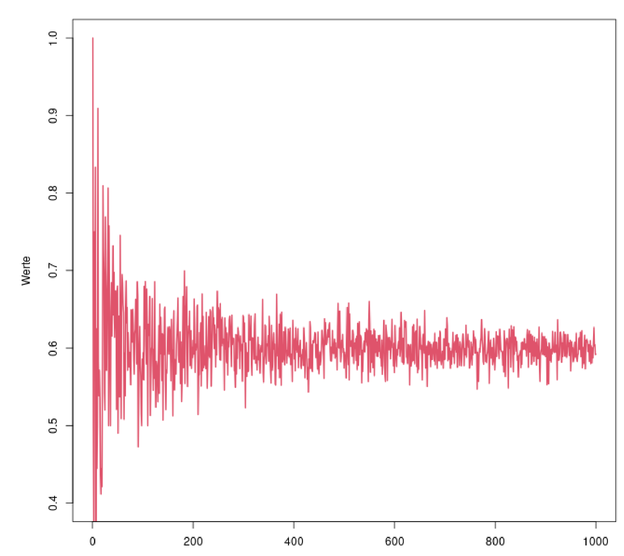
Ein weiteres Beispiel zur kollektiven Intelligenz: Das Condorcet-Jury-Theorem

Eine *ungerade* Anzahl $n > 2$ von Jurymitgliedern soll eine Entscheidung aus zwei Optionen treffen (genau eine ist richtig). Sie bestimmen diese durch die absolute Mehrheit. Alle Juroren entscheiden sich unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p > 0.5$ für die „richtige“ Option. *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Jury die richtige Wahl trifft? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für eine immer größer werdende Jury?*

Antwort: Die Jury trifft mit einer Wahrscheinlichkeit über 50% die „richtige“ Wahl, falls $p > 0.5$. Mit wachsender Zahl an Mitgliedern wird die Jury mit immer höherer Wahrscheinlichkeit die richtige Entscheidung treffen.

Gesetz der Großen Zahlen

Je mehr Juroren abstimmen, je mehr Lose Galton bekommt, je mehr Schülerinnen und Schüler Schätzungen abgeben, desto mehr scheinen sich Mittelwert und Median auf ein Ergebnis einzupendeln. Auch wenn wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie sind, passiert dies keinesfalls *„zufällig“*.
Das *Gesetz der großen Zahlen* besagt umgangssprachlich formuliert: Der Mittelwert einer großen Menge unabhängig gewählter Zufallszahlen ist sehr nah an dem Erwartungswert des dahinterliegenden „Zufallsgenerators“.
In der Grafik rechts sieht man für eine Condorcet-Jury mit $n = 1, \dots, 1000$ Juroren und $p = 0.6$ das Gesetz der großen Zahlen bei der Arbeit.



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik
[1] https://galton.org/cgi-bin/searchImages/galton/search/essays/pages/galton-1907-vox-populi_1.htm
Fotos Maschinenhaus: Thomas Ott / TU-Darmstadt

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster