UNIVERSITE DE PARIS-NORD

N°C.N.R.S. A.O. 12.103

Freundliche Grüße
R. Harting

THESES DE DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

présentées par

Jean CELEYRETTE

1ère Thèse

Catégories internes et fibrations

2ème Thèse

Cohomologie de gel´fand-fuks

Thèses soutenues le 15 Novembre 1975
devant la Commission d'Examen

MM. J.P. LAFON, Président
J. BENABOU, Rapporteur
D. LEHMANN
S. FAKIR
M. ANDLER
M. TIERNEY

CATEGORIES INTERNES

ET FIBRATIONS

SOMMAIRE

*

* *

INTRODUCTION

Dans l'étude des topos - en particulier - interviennent constamment des raisonnements relatifs aux catégories internes à une catégorie donnée. On se propose de développer une technique permettant dans de nombreux théorèmes importants de la théorie des catégories de remplacer $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ par une catégorie plus générale $\mathbb{B}$ à limites projectives finies. Cette technique repose sur l'utilisation des fibrations de base $\mathbb{B}$. On remarque d'abord qu'à toute catégorie $\mathbb{C}$ est associée une fibration $\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{C}) \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ (où un objet de $\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{C})$ au-dessus de I est une famille indexée par I d'objets de $\mathbb{C}$). Remplaçant $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ par $\mathbb{B}$, on peut associer à toute catégorie $\underline{C}$ interne à $\mathbb{B}$ une fibration $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$. Une telle fibration sera dite petite. A la catégorie $\mathbb{B}$ elle-même, on fait correspondre la fibration $\mathrm{But} : F\ell\, \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (notée B). Le rôle des catégories est alors joué dans ce contexte par les fibrations sur $\mathbb{B}$ (§ 2).

Une classe importante de fibrations est formée des fibrations localement petites (§ 3).

Les foncteurs entre catégories "ordinaires" sont remplacés par les foncteurs cartésiens sur $\mathbb{B}$.

En particulier, à tout foncteur interne entre $\underline{C}, \underline{C}' \in |\mathrm{Cat}\, \mathbb{B}|$, à tout préfaisceau interne (de $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\, \mathbb{B}|$, dans $\mathbb{B}$) correspondent des foncteurs cartésiens entre les fibrations correspondantes. Le problème de la composition d'un préfaisceau et d'un foncteur interne ou d'un préfaisceau et d'un foncteur, se ramène alors à la composition des foncteurs cartésiens.

On donne un sens à la notion de fibration à $\mathbb{B}$-limites ainsi qu'à celle de commutation aux $\mathbb{B}$-limites (§ 4).

On peut alors, dans ce contexte, établir quelques théorèmes importants tels que le théorème du foncteur adjoint, de représentabilité (§ 7) ou le théorème de Kan ($\hat{C}$ étant une catégorie de préfaisceaux, tout foncteur ϕ commutant aux limites inductives, de $\hat{C}$ dans $\mathbb{D}$ à limites inductives et localement petite, est déterminé par sa restriction à $\underline{C}$; de plus ϕ a un adjoint à droite) (§ 6).

Un chapitre préliminaire (§ 1), en exposant un cas particulier, justifie le recours aux catégories fibrées. On prend systématiquement les hypothèses minimales sur $\mathbb{B}$, qui, le plus souvent, doit simplement avoir des limites projectives finies (y compris un objet final 1). Pour certains théorèmes, $\mathbb{B}$ doit de plus posséder des Π_f (adjoints à droite des foncteurs images inverses). Tout topos élémentaire a évidemment ces propriétés mais, bien sûr, les hypothèses satisfaites par un topos sont beaucoup trop fortes.

L'idée d'utiliser les fibrations pour étudier les catégories internes à un topos (et plus généralement à une catégorie à $\underleftarrow{\lim}$ finies) est de J. BENABOU. Certains résultats (signalés comme tels dans le texte) sont également de lui. Il me faut d'ailleurs le remercier non seulement pour son aide au cours de l'élaboration de ce travail, mais surtout pour la patience, la générosité et l'amitié qu'il manifeste à l'égard de ses élèves.

Je désire enfin remercier Mesdames Bérat et Lengaigne pour le soin qu'elles ont mis à composer ce texte à partir d'un bien mauvais manuscrit.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Soit $F : \mathbb{E}ns \to \mathbb{E}ns$ un foncteur. Pour tout ensemble I, on peut lui associer un foncteur $F_I : \mathbb{E}ns/I \to \mathbb{E}ns/I$ (donné par : $F_I[(X_i)_{i\in I}] = ((FX_i)_{i\in I})$.

Par ailleurs, le foncteur

$$\text{But} : F\ell(\mathbb{E}ns) \to \mathbb{E}ns$$

est fibrant, car $\mathbb{E}ns$ a des $\underleftarrow{\lim}$ finies.

La famille, pour $I \in |\mathbb{E}ns|$, des foncteurs F_I précédents définit un foncteur cartésien de cette fibration dans elle-même.

Désirant remplacer $\mathbb{E}ns$ par une catégorie plus générale à $\underleftarrow{\lim}$ finies, on est amené à introduire la fibration :

$$\text{But} : F\ell\,\mathbb{B} \to \mathbb{B} \quad \text{(notée dans toute la suite B)}$$

et les foncteurs cartésiens de B dans B.

1.1.- Rappel - Définition.

Etant donné deux fibrations $C : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ et $C' : \mathbb{E}' \to \mathbb{B}$, on appelle foncteur cartésien de C dans C' (ou de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ au-dessus de $\mathbb{B}$) un foncteur $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ tel que $C'F = C$ et tel que l'image par F d'un morphisme cartésien de $\mathbb{E}$ soit cartésien dans $\mathbb{E}'$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "C"'] & & \mathbb{E}' \arrow[dl, "C'"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

Notation.- Pour tout $I \in |\mathbb{B}|$, on note F_I la restriction de F à la fibre au-dessus de I. On notera parfois F, au lieu de F_1 sa restriction à la fibre au-dessus de 1 (objet final de $\mathbb{B}$).

Remarque 1.1.1.- Etant donné un topos élémentaire $\mathbb{B}$, la plupart des foncteurs obtenus à partir des constructions usuelles dans les topos s'étendent à des foncteurs cartésiens entre des fibrations sur $\mathbb{B}$.

Exemple.- L'exponentiation $(X,Y) \to Y^X$ définit un bifoncteur

$$\mathbb{B}^{op} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Mais, pour tout I, $\mathbb{B}/I$ est un topos.

Pour $f : J \to I$, $f^* : \mathbb{B}/I \to \mathbb{B}/J$ est un foncteur logique, qui commute aux exponentielles, soit :

$$\forall\ \xi \in |\mathbb{B}/I|\ \forall\ \eta \in |\mathbb{B}/I| \quad (f^*\eta)^{f^*\xi} \simeq f^*(\eta^{\xi}).$$

On introduit alors les fibrations :

$$B : F\ell\ \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

et

$$P : \overline{F\ell\ \mathbb{B}} \underset{\mathbb{B}}{\times} F\ell\ \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$\begin{tikzcd} \overline{F\ell\ \mathbb{B}} \underset{\mathbb{B}}{\times} F\ell\ \mathbb{B} \arrow[rr] \arrow[d, "Q"] \arrow[drr, phantom, "\text{p.f.}"] & & F\ell\ \mathbb{B} \arrow[d, "B"] \\ \overline{F\ell\ \mathbb{B}} \arrow[rr, "\overline{B}"'] & & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

(où $P = \bar{B}\,Q$ et où $\bar{B}$ est une fibration telle que, pour tout I, la fibre au-dessus de I est $(\mathbb{B}/I)^{op}$, (voir 2.8.1.).

La famille des bifoncteurs "exponentiation" dans chaque fibre $(\mathbb{B}/I)^{op} \times (\mathbb{B}/I)$ définit alors un foncteur cartésien :

$$P \longrightarrow B$$

Remarque 1.1.2.- $\mathbb{B}$ est une catégorie à limites projectives finies. Soit F un foncteur cartésien de B dans B

$$F \in |Cart_{\mathbb{B}}(B,B)|$$

pour tout $T \in |\mathbb{B}|$ $(t : T \to 1)$ et $X \in |\mathbb{B}|$

$$\mathbb{B}(T,FX) \simeq \mathbb{B}/T(1_T, F_T(t^*X)) \;.$$

Remarque 1.1.3.- Si, pour tout I, $\mathbb{B}/I$ est cartésienne fermée (ce qui équivaut à l'existence d'adjoints à droite pour les foncteurs f^* de changement de bases, donc est vrai si $\mathbb{B}$ est un topos élémentaire), B/I est une catégorie relative à $\mathbb{B}/I$. Soit $\phi \in |Cart_{\mathbb{B}}(B,B)|$.

$\phi_I : B/I \to \mathbb{B}/I$ est un foncteur fort

(voir la démonstration d'une propriété plus générale en 3.4.a).

1.2.-Proposition.

Soit $\underline{C} \in |Cat\ \mathbb{B}|$. On note (provisoirement) $\mathbb{B}^{\underline{C}}$ la catégorie des préfaisceaux internes de $\underline{C}$ dans $\mathbb{B}$.

Si $F \in |Cart_{\mathbb{B}}(B,B)|$, F s'étend à un foncteur

$$F^{\underline{C}} : \mathbb{B}^{\underline{C}} \longrightarrow \mathbb{B}^{\underline{C}}$$

Preuve : Un objet de $\mathbb{B}^{\underline{C}}$ est un couple $(p_o, \bar{\lambda}_1)$, avec $p_o \in |\mathbb{B}/C_o|$ et $\bar{\lambda}_1 : d_o^* p_o \to d_1^* p_o (\bar{\lambda}_1 \in F\ell\ \mathbb{B}/C_1)$, vérifiant les conditions de descente habituelles

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_1 \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\theta_o"'] \arrow[d, "d_o^* p_o"'] & \mathcal{P}_o \arrow[d, "p_o"] \\ C_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & C_o \end{tikzcd}$$

θ_o est cartésienne au-dessus de d_o et λ_1 est la flèche au-dessus de d_1 correspondant à $\bar{\lambda}_1$.

$F^{\underline{C}}$ est défini sur les objets par :

$$F^{\underline{C}}(p_o,\bar{\lambda}_1) = (F_{C_o}(p_o),F_{C_1}(\bar{\lambda}_1)) .$$

On a en effet :

$$F_{C_o}(p_o) \in |\mathbb{E}/C_o|$$

$$F_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : F_{C_1}(d_o^* p_o) \longrightarrow F_{C_1}(d_1^* p_o),$$

et, F étant cartésien, $(F_{C_1} d_o^* \simeq d_o^* F_{C_o}$ et $F_{C_1} d_1^* \simeq d_1^* F_{C_o})$

$$F_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : d_o^* F_{C_o}(p_o) \longrightarrow d_1^* F_{C_o}(p_o).$$

La définition de $F^{\underline{C}}$ sur les morphismes est claire, et le fait que $F^{\underline{C}}$ est un foncteur se vérifie trivialement. On a ainsi défini un foncteur "composition par F" de $\mathbb{B}^{\underline{C}}$ dans $\mathbb{B}^{\underline{C}}$.

1.3.- *Sommes internes.*

On sait que pour toute catégorie $\mathbb{B}$ à $\underleftarrow{\lim}$ finies et pour toute $f \in |F\ell\ \mathbb{B}|$, f^* a un adjoint à gauche $\sum_f$ (la composition par f).

Si $i : I \to 1$, $i^* : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/I$ est le foncteur, qui pour $\mathbb{B} = \mathrm{Ens}$ associe à tout objet X, une famille indexée par I dont tous les termes sont égaux à X. L'adjoint à gauche $\sum_i$ associe donc à toute famille indexée par I la somme (coproduit) de ses termes.

Dans le cas plus général de la catégorie $\mathbb{B}$, les foncteurs $\sum_f$ définissent la notion de "somme interne à $\mathbb{B}$".

1.4.- *Définition.-*

On dit qu'un foncteur cartésien $F : B \to B$ commute aux "sommes internes" ssi

a) pour tout $f \in |F\ell\ \mathbb{B}|$ $f : J \to I$, la flèche canonique $\sum_f . F_J \longrightarrow F_I . \sum_f$ est un isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}/J \arrow[r, "F_J"] \arrow[d, "\sum_f"'] & \mathbb{B}/J \arrow[d, "\sum_f"] \\
\mathbb{B}/I \arrow[r, "F_I"] & \mathbb{B}/I
\end{tikzcd}$$

b) ε étant la flèche de coadjonction $\sum_f . f^* \to \mathrm{Id}$

$$F_I * \varepsilon = \varepsilon_{F_I} .$$

Remarque.- Pour $\mathbb{B} = \mathbb{E}\mathrm{ns}$ et $I = 1$, la deuxième condition exprime que les images par F des inductions

$$X \longrightarrow \coprod_{j \in J} (X_j = X)$$

sont les inductions :

$$FX \longrightarrow \coprod_{j \in J} (FX_j = FX) \; .$$

1.5.- Théorème.

Soit $F : B \to B$ un foncteur cartésien. Pour qu'il commute aux "sommes internes" il faut et il suffit qu'il existe $A \in |\mathbb{B}|$ tel que $F \simeq A \times (-)$.

Preuve :

On note $A \times (-)$ le foncteur cartésien défini de la façon suivante :

$$\forall\, I \in |\mathbb{B}| \quad (i : I \to 1) \quad [A \times (\;)]_I = i^*A \underset{I}{\times} (\;) : \mathbb{B}/I \to \mathbb{B}/I.$$

La commutation aux f^* et aux $\sum_f$ est triviale.

La commutation aux ε se montre en "recollant" deux produits fibrés.

Inversement :

Soit $F : B \to B$ un foncteur cartésien commutant aux "sommes internes".

Pour tout $\xi \in |\mathbb{B}/I|$

a) on calcule $F_I(\xi)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "\xi"'] & & 1 \\
& I \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

on a $\xi = \sum_{\xi} 1_X$

$$F_I(\xi) = F_I(\sum_\xi 1_X) = \sum_\xi F_X(1_X).$$

Mais $1_X = x^* 1$, F étant cartésien :

$$\sum_\xi F_X(1_X) \simeq \sum_\xi x^* F(1) \simeq \sum_\xi \xi^* i^* F(1)$$

$$\simeq i^* F(1) \times \xi \text{ (produit dans } \mathbb{B}/I)$$

$$\simeq (F(1) \times \xi)_I .$$

b) On note ξ_I la flèche finale : $\xi \to 1_I$, représentée par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\xi"'] & & I \arrow[dl, equal] \\ & I & \end{tikzcd}$$

et on calcule $\underline{F_I(\xi_I)}$.

ξ_I est aussi la flèche de coadjonction : $\sum_\xi \xi^* 1_I \to 1_I$ précédemment notée ε_{1_I}.

La condition 1.4.b montre que

$$F_I(\varepsilon_{1_I}) \simeq \varepsilon_{F_I(1_I)} \simeq \varepsilon_{i^* F(1)} .$$

Cette dernière flèche n'est autre que la flèche de $\mathbb{B}/I$

$$i^* F(1) \underset{I}{\times} \xi_I : \begin{tikzcd} X \times F(1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & I \times F(1) \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

déterminée par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} X \times F(1) \arrow[rr, "\xi\times F(1)"] \arrow[d, "\xi^{*}F(1)"'] \arrow[drr, "\sum\limits_{\xi} \xi^{*}\times F(1)"] & & I \times F(1) \arrow[d, "i^{*}F(1)"] \\ X \arrow[rr, "\xi"'] & & I \end{tikzcd}$$

c) Soit maintenant $f : K \to I$ une flèche de $\mathbb{B}$, on a, avec les notations suivantes

$$f = \sum_{i} f_I \quad (i : I \to 1)$$

$$f_I : \quad \begin{tikzcd} K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & I \\ & I \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

$$\underline{F(f)} = F(\sum_{i} f_I) = \sum_{i} F_I(f_I) = (\text{d'après b}) \ \underline{F(1) \times f}.$$

Il est clair que pour $f \in F\ell\ (\mathbb{B}/I)$, on a encore

$$F_I(f) = (F(1) \times f)_I .$$

CHAPITRE II

GENERALITES SUR LES FIBRATIONS.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie. On peut lui associer une fibration sur $\mathbb{E}ns$:

$$\mathbb{E}ns(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{E}ns$$

où un objet de $\mathbb{E}ns(\mathbb{C})$ est une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbb{C}$ indexée par un ensemble I, et une flèche de $\mathbb{E}ns(\mathbb{C})$, $f : (X_i)_{i\in I} \longrightarrow (Y_j)_{j\in J}$ est un couple formé de

$$u : I \to J \quad (u \in F\ell\ \mathbb{E}ns) \quad \text{et} \quad (\varphi_i : X_i \to Y_{u(i)})_{i\in I}, \ (\forall\, i \quad \varphi_i \in F\ell\ \mathbb{C}$$

La fibration est définie par :

$$(X_i)_{i\in I} \rightsquigarrow I$$

$$(u,(\varphi_i)_{i\in I}) \rightsquigarrow u\ .$$

La fibre au-dessus de I est :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}ns}(I,\mathbb{C}).$$

$\mathbb{B}$ est dans toute la suite une catégorie à limites projectives finies (a, en particulier, un objet final noté 1).

2.1.- *Définition*.- Soit $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$. On note $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$ la fibration définie de la manière suivante : pour $I \in |\mathbb{B}|$ la fibre au-dessus de I (notée $C(I)$) est donnée par

$$C(I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,\underline{C}).$$

$C(I)$ est une petite catégorie car $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,-) : \mathbb{B} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ étant exact à gauche se prolonge en un facteur de Cat $\mathbb{B}$ dans Cat Ens. Un objet de $C(I)$ est donc une flèche

$$x : I \to C_o.$$

Etant donné $x : I \to C_o$ ($x \in C(I)$) et $y : J \to C_o$ ($y \in C(J)$) un morphisme de $\mathbb{B}(\underline{C})$ de x dans y est un couple (u,ψ)
$(u : I \to j,\ \psi : I \to C_1)$ tel que :

$$\partial_o \psi = x \quad \text{et} \quad \partial_1 \psi = y.u$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "x"] \arrow[dd, "u"'] \arrow[drr, "\psi"] & C_o & \\
& & C_1 \arrow[ul, "\partial_o"'] \arrow[dl, "\partial_1"] \\
J \arrow[r, "y"'] & C_o &
\end{tikzcd}$$

Les projections $x \rightsquigarrow I$ et $(u,\psi) \rightsquigarrow u$ définissent bien une fibration.

Notation.- Dans toute la suite la fibration associée à une catégorie dans $\mathbb{B}$, est désignée par la même lettre, non soulignée
ex : $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$, $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$ ($C \in |\mathrm{Fib}\ \mathbb{B}|$).

2.2.- *Lemme de Yoneda*.- (Bénabou).

Soit $I \in |\mathbb{B}|$. Le foncteur source $\mathbb{B}/I \to \mathbb{B}$ est fibrant. (C'est la fibration notée $Y_I : \mathbb{B}/I = \mathbb{B}(I) \to \mathbb{B}$ associée à I considéré comme catégorie discrète dans $\mathbb{B}$).

Si $E : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ est une fibration, alors il existe une équivalence de catégories entre : $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E)$ et $\mathbb{E}(I)$ (fibre au-dessus de I).

Preuve : L'équivalence est définie par

a) Soit $f \in |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E)|$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}/I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Y_I"'] & & \mathbb{E} \arrow[dl, "E"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

On lui associe $f_I(1_I) \in |\mathbb{E}(I)|$.

b) Soit $X \in |\mathbb{E}(I)|$. On définit un foncteur cartésien f par sa fibre au-dessus de J.

Soit $u : J \to I$ $f_J(u) = u^* X \in |\mathbb{E}(J)|$.

(On doit ici choisir une image inverse de X par u).

La définition de f sur les morphismes de $\mathbb{B}/I$ et la vérification qu'on a bien défini ainsi l'équivalence cherchée sont triviales.

Corollaire.- Si $E : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ est fibrée, elle est $\mathbb{B}$-équivalente à une catégorie fibrée scindée.

Preuve : On introduit la fibration $E' : \mathbb{E}' \to \mathbb{B}$ définie par : $\mathbb{E}'(I) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}/Y_I, E)$. Elle est scindée.

Le lemme précédent permet de conclure.

2.3.- A la catégorie $\mathbb{B}$ elle-même, on peut associer la fibration dont la fibre au-dessus de I représente, dans le cas où $\mathbb{B} = \mathbb{E}\mathrm{ns}$, la catégorie des familles d'objets de $\mathbb{B}$ indexées par I, soit $\mathbb{B}/I$.

La fibration cherchée est donc :

$$B : F\ell\,\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B} \qquad (1.1.)$$

2.4.- Se donner un foncteur F entre deux catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ revient à se donner un foncteur cartésien, encore noté F, de $\mathbb{E}ns(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{E}ns(\mathbb{C}')$ au-dessus de $\mathbb{E}ns$.

La restriction à la fibre au-dessus de I est donnée par

$$F_I\left[(X_i)_{i\in I}\right] = (FX_i)_{i\in I}\ .$$

Si on remplace $\mathbb{E}ns$ par $\mathbb{B}$, l'homologue d'un foncteur sera un foncteur cartésien au-dessus de $\mathbb{B}$ entre deux fibrations de base $\mathbb{B}$.

Propriété (rappel) ([6] 1.5.).

Etant donné un foncteur cartésien $u : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ au-dessus de $\mathbb{B}$, les conditions suivantes sont équivalentes

1) u est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence)

2) pour toute fibration $\mathbb{X} \to \mathbb{B}$, le foncteur $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{X},u) : \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{X},\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{X},\mathbb{G})$ est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence).

3) pour tout $I \in |\mathbb{B}|$, la restriction u_I aux fibres au-dessus de I est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence).

On parlera ainsi de $\mathbb{B}$-équivalence entre fibrations, de foncteur $\mathbb{B}$-plein et fidèle etc...

Terminologie.- On dit qu'une fibration

$$C : \mathbb{B}(\underline{C}) \longrightarrow \mathbb{B}$$

est petite. Une fibration $\mathbb{B}$-équivalente à une fibration petite est essentiellement petite.

2.5.- Soit $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$ et $E : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ une fibration qui, dans le contexte considéré "représente" une "catégorie".

On veut définir un "foncteur" δ de $\underline{C}$ dans E.

2.5.1.- A $\underline{C}$, on associe la fibration $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$, un "foncteur" cherché est alors un foncteur cartésien de C dans E.

2.5.2.- On définit alors la catégorie suivante

- Les objets sont les couples $(\delta_o, \bar{\lambda}_1)$ avec

$\delta_o \in |E(C_o)|$ et $\bar{\lambda}_1 : d_o^* \delta_o \longrightarrow d_1^* \delta_o (\bar{\lambda}_1 \in \mathrm{Fl}\ E(C_1))$

tels que les diagrammes (*) et (**) soient commutatifs.

$$
\begin{tikzcd}
 & d_1^*\delta_o \arrow[dr, "\theta_1"] & \\
d_o^*\delta_o \arrow[ur, "\bar{\lambda}_1"] \arrow[rr, shift left, "\lambda_1"] \arrow[rr, shift right, "\theta_o"'] & & \delta_o \\
C_1 \arrow[rr, shift left, "d_1"] \arrow[rr, shift right, "d_o"'] & & C_o
\end{tikzcd}
$$

Diagramme (*) sa commutativité donne $\underline{1_{\delta_o} = \lambda_1 \theta_\varepsilon}$.

$$
\begin{tikzcd}
\delta = \varepsilon^* d_o^* \delta_o \arrow[r, "\theta_\varepsilon"'] \arrow[rr, bend left] & d_o^*\delta_o \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\theta_o"'] & \delta_o \\
C_o \arrow[r, "\varepsilon"'] & C_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & C_o
\end{tikzcd}
$$

θ_ε est la flèche cartésienne $\varepsilon^* d_o^* \delta_o \to d_o^* \delta_o$ au-dessus de ε

ε, unité est telle que $d_1 \varepsilon = d_o \varepsilon = 1_{C_o}$).

Diagramme (**) sa commutativité donne $\underline{\lambda_1\theta_\mu = \lambda_1\mu_1}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & d_o^*\delta_o \arrow[dr, "\lambda_1"] & \\
\mu^* d_o^*\delta_o = p_o^* d_o^*\delta_o \arrow[ur, "\theta_\mu"] \arrow[dr, "\mu_1"'] & & \delta_o \\
 & d_o^*\delta_o \arrow[ur, "\lambda_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

θ_μ est la flèche cartésienne $\mu^* d_o^*\delta_o \to d_o^*\delta_o$ au-dessus de μ.

μ_1 est une flèche au-dessus de p_1 définie ci-dessous.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[dr, "d_1"] & C_o \\
C_2 = C_1 \times_{C_o} C_1 \arrow[ur, "p_o"] \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "p_1"'] & C_1 \arrow[ur, "d_o"] \arrow[dr, "d_1"] & C_o \\
 & C_1 \arrow[ur, "d_o"] \arrow[r, "d_1"'] & C_o
\end{tikzcd}
$$

(μ, flèche de composition est telle que :

$d_o\mu = d_o p_o$ et

$d_1\mu = d_1 p_1$).

μ_1 est obtenue de la façon suivante :

soit $p_o^*(\bar{\lambda}_1) : p_o^* d_o^*\delta_o \longrightarrow p_o^* d_1^*\delta_o$ au dessus de 1_{C_2},

d'où $(d_1 p_o = d_o p_1)$: $\mu_1 : p_o^* d_o^*\delta_o \longrightarrow d_o^*\delta_o$ au-dessus de p_1.

- Les morphismes sont définis par :

$$f : (\delta_o', \bar{\lambda}_1') \longrightarrow (\delta_o, \bar{\lambda}_1)$$

est un couple (f_o, f_1) $(f_o \in F\ell\, E(C_o),\ f_1 \in F\ell\, E(C_1))$ rendant commutatifs les deux carrés ci-après :

$$\begin{tikzcd}
d_o^* \delta'_o \arrow[r, shift left, "\lambda'_1"] \arrow[r, shift right, "\theta'_o"'] \arrow[d, "f_1"'] & \delta'_o \arrow[d, "f_o"] \\
d_o^* \delta_o \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\theta_o"'] & \delta_o \\
C_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & C_o
\end{tikzcd}$$

Remarque : Dans le cas où $E = B : F\ell\, \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la catégorie de 2.5.2 est la catégorie de préfaisceaux internes (covariants) de $\underline{C}$ dans $\mathbb{B}$ (1.2.).

2.5.3.- *Proposition*.- La catégorie définie en 2.5.2. est équivalente à $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E)$.

Preuve : On remarque que la donnée d'un foncteur ϕ d'une petite catégorie Γ dans une catégorie $\mathcal{X}$ revient à la donnée d'un foncteur $\psi : \Gamma_o \to X$ (Γ_o ensemble des objets de Γ, considéré comme catégorie discrète), et d'une transformation naturelle $\lambda : \psi\, d_o \to \psi\, d_1$ (où $\Gamma_1 \overset{d_1}{\underset{d_o}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ et Γ_1 est considéré comme une catégorie discrète, d_o, d_1 des foncteurs), vérifiant une condition de compatibilité pour la composition des flèches.

En effet :

a) Soit $\phi : \Gamma \to \mathcal{X}$.

Il existe un foncteur $u : \Gamma_o \to \Gamma$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma_o \arrow[dl, "i"'] \arrow[d, equal] \\
\Gamma_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & \Gamma_o
\end{tikzcd}$$

où i est l'application "identité".

On pose alors $\psi = \phi\, u \; : \Gamma_o \to \mathbb{X}$.

On définit $\lambda : \psi\, d_o \longrightarrow \psi\, d_1$ de la façon suivante :

pour tout $f : X \to Y$

$$\lambda_{(f)} = \phi(f) : \psi\, d_o(f) = \phi X \longrightarrow \psi\, d_1(f) = \phi Y .$$

b) <u>Inversement</u>.

Soient $\psi : \Gamma_o \to \mathbb{X}$ et $\lambda : \psi\, d_o \to \psi\, d_1$.

On définit $\phi : \Gamma \to \mathbb{X}$ sur les objets par $\phi X = \psi X$ et sur les flèches par $\phi(f) = \lambda_{(f)}$.

Se donner un foncteur cartésien ϕ de $B(\underline{C})$ dans $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$, revient, pour tout $I \in |\mathbb{B}|$ à se donner un foncteur ϕ_I de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,\underline{C})$ dans $E(I)$, vérifiant la propriété usuelle de conservation des morphismes cartésiens.

Ceci est équivalent à la donnée de

$$\psi_I : \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,C_o) \to E(I)$$

et de
$$\lambda_I : \psi_I.\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,d_o) \to \psi_I.\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I,d_1)$$

soit finalement à la donnée de

$$\psi \in |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}/C_o,\mathbb{E})|$$

et de la $\mathbb{B}$-transformation naturelle $\lambda : \psi.\mathbb{B}/d_o \to \psi.\mathbb{B}/d_1$.

Le lemme de Yoneda montre qu'au couple (ψ,λ) est associé biunivoquement un couple $(\delta_o,\bar{\lambda}_1)$ correspondant à la définition de 2.5.2.

2.5.4.- <u>*Corollaire*</u>.- Si $\underline{C}$, $\underline{C}' \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,C') \ (= \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}(\underline{C}),\mathbb{B}(\underline{C}'))) = \mathrm{Fonct}(\underline{C},\underline{C}') \qquad \text{(foncteurs internes)}.$$

Il suffit d'observer qu'un foncteur interne de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ correspond exactement à la définition 2.5.2. d'un "foncteur" de $\underline{C}$ dans la fibration $C' : B(\underline{C}') \to B$.

Ce corollaire justifie le recours aux foncteurs cartésiens et les notations adoptées.

2.6.- *Foncteurs de composition.*

2.6.1.- *Définition.*- Etant donné $\underline{C}, \underline{C}' \in |\mathrm{Cat}\ B|$ et $\psi : \underline{C} \to \underline{C}'$ un foncteur interne $E : E \to \mathbb{B}$ une fibration, le foncteur "composition par ψ" est donné par :

$$(\ \ ) \circ \psi = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\psi, E) : \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C', E) \to \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C, E)$$

(où ψ figurant dans $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\psi, E)$ désigne le foncteur cartésien $C \to C'$ associé au foncteur interne ψ par 2.5.4.).

2.6.2.- *Construction.*- Soit δ' $(= (\delta'_o, \bar{\lambda}'_1))$, $\delta' \in |\mathrm{Cart}_{B}(C', E)|$ (2.5.2.).

On construit $(\delta') \circ \psi$ de la façon suivante.

$$\begin{tikzcd}
 & d_1'^{*}\delta'_o \arrow[dr, "\theta_1"] & \\
d_o'^{*}\delta'_o \arrow[ur, "\bar{\lambda}'_1"] \arrow[rr, "\theta_o"'] & & \delta'_o
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C'_1 \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_o"'] & C'_o
\end{tikzcd}$$

A ψ correspondent ψ_o et ψ_1 rendant les carrés ci-dessous commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & C_o \arrow[d, "\psi_o"] & C_1 \arrow[l, "d_o"'] \arrow[d, "\psi_1"] \\
C'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & C'_o & C'_1 \arrow[l, "d'_o"]
\end{tikzcd}$$

On considère alors le couple :

$$(\psi_o^* (\delta'_o), \psi_1^*(\bar{\lambda}'_1))$$

On a : $\psi_o^*(\delta'_o) \in |E(C_o)|$ et $\psi_1^*(\bar{\lambda}'_1) \in F\ell\, E(C_1)$, avec

$\psi_1^*(\bar{\lambda}'_1) : d_o^* \psi_o^*(\delta'_o) \longrightarrow d_1^* \psi_o^*(\delta'_o)$ (car $\psi_1^* d_1'^* = d_1^* \psi_o^*$ et $\psi_1^* d_o'^* = d_o^* \psi_o^*$).

On vérifie aisément qu'on a ainsi construit un objet de la catégorie définie en 2.5.2. c'est-à-dire un foncteur cartésien de C dans E et que ce foncteur est égal à $(\delta')\ o\ \psi$.

2.6.3.- *Définition*.- Etant donné $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$ et $\Psi : E \to E'$ un foncteur cartésien entre deux fibrations sur $\mathbb{B}$, le foncteur "composition par Ψ" est donné par :

$$\Psi\ o\ (\ \ ) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,\Psi) : \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E) \longrightarrow \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E').$$

2.6.4.- *Construction*.-

Soit $\delta (= (\delta_o, \bar{\lambda}_1))$, $\delta \in |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E)|$.

On construit $\Psi\ o\ (\delta)$ de façon analogue à (1.2.)

$$
\begin{tikzcd}
& d_1^*\delta_0 \arrow[dr, "\theta_1"] & \\
d_0^*\delta_0 \arrow[ur, "\bar{\lambda}_1"] \arrow[rr, shift left, "\lambda_1"] \arrow[rr, shift right, "\theta_0"'] & & \delta_0 \\
C_1 \arrow[rr, shift left, "d_1"] \arrow[rr, shift right, "d_0"'] & & C_0
\end{tikzcd}
$$

On considère le couple : $(\Psi_{C_o}(\delta_o), \Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1))$.

On a : $\Psi_{C_o}(\delta_o) \in |E'(C_o)|$ et $\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) \in F\ell\, E(C_1)$ avec

$\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : \Psi_{C_1}(d_o^*\delta_o) \longrightarrow \Psi_{C_1}(d_1^*\delta_o)$, mais Ψ étant cartésien

$\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : d_o^*\Psi_{C_o}(\delta_o) \longrightarrow d_1^*\Psi_{C_o}(\delta_o)$.

La vérification qu'on a ainsi défini un foncteur cartésien de C dans E' et que ce foncteur est $\Psi \circ (\delta)$ est triviale.

Remarque.- Il est maintenant possible de composer par exemple des préfaisceaux ("foncteurs" de $\underline{C}$ dans $\mathbb{B}$) et certains foncteurs de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ (ceux qui se prolongent en des foncteurs cartésiens de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$).

2.7.- *Exponentielle de deux fibrations.*

2.7.1.- *Produit de deux fibrations*.- Soit $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$ et $C' : \mathbb{B}(\underline{C}') \to \mathbb{B}$ deux fibrations petites. La fibration correspondant au produit de catégories $\underline{C} \times \underline{C}'$, soit : $C \times C' : \mathbb{B}(\underline{C} \times \underline{C}') \to \mathbb{B}$ a pour fibre au-dessus de I

$$C \times C'(I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C} \times \underline{C}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C}') = C(I) \times C'(I).$$

Cette fibration est donc obtenue par le produit fibré ci-dessous, (dans Cat)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}(\underline{C}\times\underline{C}') \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "C\times C'"] & \\
\mathbb{B}(\underline{C}) \arrow[dr, "C"'] & & \mathbb{B}(\underline{C}') \arrow[dl, "C'"] \\
 & \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

Plus généralement, si $E : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ et $F : \mathbb{F} \to \mathbb{B}$ sont deux fibrations, le produit de ces deux fibrations est donné par le produit fibré dans Cat :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}\times_{\mathbb{B}}\mathbb{E}' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "E\times E'"] & \\
\mathbb{E} \arrow[dr, "E"'] & & \mathbb{E}' \arrow[dl, "E'"] \\
 & \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

2.7.2.- *<u>Définition</u> (exponentielle de deux fibrations), (Bénabou).*

Etant donné deux fibrations $E : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ et $E' : \mathbb{E}' \to \mathbb{B}$ on définit la fibration E'^{E} par :

$$\forall\, I \in |\mathbb{B}| \qquad E'^{E}(I) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E')$$

(où $Y_I : \mathbb{B}(I) \to \mathbb{B}$ est la fibration introduite en 2.2. et où $Y_I \times E$ est un produit de fibrations).

On a bien (lemme de Yoneda, 2.2.)

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E'^{E}) \simeq E'^{E}(I) \simeq \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E')$$

Pour $f : I \to J$ le changement de bases f^* est obtenu à partir du foncteur $Y_f : Y_I \to Y_J$ (pour $\tau : T \to I$, $Y_f(\tau) = f\tau$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}/I \arrow[rr, "Y_f"] \arrow[dr, "Y_I"'] & & \mathbb{B}/J \arrow[dl, "Y_J"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

$$f^* = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_f, E') : \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_J, E') \longrightarrow \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_I, E').$$

Remarque.- $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(E,E')$ est la fibre au-dessus de 1 de E'^E. En particulier, la catégorie définie en 2.5.2. des préfaisceaux internes covariants de C dans E ($C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$), équivalente à $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E)$, est la fibre au-dessus de 1 de E^C.

2.7.3.- *Localisation*.-

2.7.3.1.- *Définition*.- Soit $D : \mathbb{D} \to \mathbb{B}$ une fibration et $I \in |\mathbb{B}|$. On note D_I la fibration sur $\mathbb{B}/I$ obtenue à partir de D par le produit fibré (dans Cat) ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "D_I"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & \mathbb{D} \arrow[d, "D"] \\ \mathbb{B}(I)=\mathbb{B}/I \arrow[r, "Y_I"'] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

Pour $\tau : T \to I$ $D_I(\tau)$ (fibre de D_I au-dessus de τ) $= D(T)$. En particulier pour $1_I : I \xrightarrow{=} I$

$$D_I(1_I) = D(I) .$$

Pour $f : \tau' \to \tau$ dans $\mathbb{B}/I$, le changement de base f^* dans D_I se confond avec le changement de base f^* dans D.

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tau'"'] & & T \arrow[dl, "\tau"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

2.7.3.2.- *Exemple*.- Si $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$ est une petite fibration C_I est la fibration $\mathbb{B}/I(i^*\underline{C}) \to \mathbb{B}/I$, $(i : I \to 1)$.

Preuve :

$i^* : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/I$, a un adjoint à gauche $\sum_i$, est exact à gauche, et se prolonge en un foncteur de $\mathrm{Cat}\,\mathbb{B}$ dans $\mathrm{Cat}\,\mathbb{B}/I$.

De l'adjonction $\sum_I \dashv i^*$, on tire alors :

pour $\tau : T \to I$, $C(T) = \mathbb{B}(T,\underline{C}) = \mathbb{B}(\sum_I \tau,\underline{C}) = \mathbb{B}/I(\tau,i^*\underline{C}) = C_I(\tau)$.

2.7.3.3.- *Proposition*.- Etant donné deux fibrations E,E' sur $\mathbb{B}$

$$E'^{E}(I) = \mathrm{Cart}\mathbb{B}_{/I}(E_I,E'_I) = {E'_I}^{E_I}(1_I) \text{ (exponentielle}$$

entre fibrations sur $\mathbb{B}/I$).

Preuve :

E'_I étant obtenu par le produit fibré par Y_I, se donner un foncteur $F : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}/I \to \mathbb{E}'$ tel que : $E'.F = Y_I\, E_I$ revient à se donner un foncteur cartésien $E_I \to E'_I$.

Les changements de bases pour la $\mathbb{B}$-fibration : $E \times Y_I$ se ramènent à des changements de bases pour la $\mathbb{B}/I$-fibration E_I.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}' \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}/I \arrow[rr] \arrow[ddl, "E'_I"'] & & \mathbb{E}' \arrow[ddl, "E'"] \\
\mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}/I \arrow[ur] \arrow[urrr, "F"] \arrow[rr] \arrow[d, "E_I"'] \arrow[drr, "E\times Y_I"] & & \mathbb{E} \arrow[d, "E"] & \\
\mathbb{B}/I \arrow[rr, "Y_I"] & & \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

Cette proposition permet de ramener des démonstrations sur les fibrations aux démonstrations restreintes à la fibre au-dessus de 1.

Remarque.- Si $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$, $C \times Y_I = C \times I : \mathbb{B}(\underline{C} \times I) \to \mathbb{B}$ (2.7.1.). Si D est une $\mathbb{B}$-fibration, on a donc (2.7.3.2.)

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C \times I, D) = D^C(I) \simeq D_I^{(i^*C)}(1_I).$$

2.7.4.- *Proposition*.- (Propriété universelle de l'exponentielle). Etant donné trois fibrations D, E, E', on a :

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(D, E'^E) \simeq \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(D \times E, E')$$

($D \times E$ est le produit défini en 2.7.1.).

Preuve : L'équivalence se montre de façon classique en utilisant la proposition précédente.

Si $K \in |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(D, E'^E)|$, K est la donnée pour tout I de $K_I : D(I) \to E'^E(I)$ ($\simeq E_I'^{E_I}(1_I)$ (2.7.3.3.)),

(avec $E_I'^{E_I}(1_I) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}/I}(E_I, E'_I)$).

La donnée de K revient donc, pour tout I, et tout $d_I \in D(I)$ à la donnée de $K_I(d_I) : E_I \to E'_I$.

A K_I, on associe donc :

$$\overline{K_I} : (D \times E)(I) = D(I) \times E(I) \longrightarrow E'(I)$$

défini par : $\overline{K_I}(d_I, x_I) = K_I(d_I)(x_I) \qquad (x_I \in |E(I)| = |E_I(1_I)|).$

On vérifie que les $\overline{K_I}$ définissent $\bar{K} \in |Cart_B(D \times E, E')|$ et qu'on a bien l'équivalence annoncée.

2.7.5. - *Définition*.- Soient E, E', D, D' des fibrations sur $\mathbb{B}$, $\phi \in |Cart_{\mathbb{B}}(D,E)|$ et $\phi' \in |Cart_{\mathbb{B}}(E',D')|$.

a) E'^{ϕ} est le foncteur cartésien $E'^{E} \longrightarrow E'^{D}$ défini par :

$$\forall I \qquad E'^{\phi}_I = Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times \phi, E') : Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E') \longrightarrow Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times D, E).$$

b) ϕ'^{E} est le foncteur cartésien $E'^{E} \rightarrow D'^{E}$ défini par :

$$\forall I \qquad \phi'^{E}_I = Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, \phi') : Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E') \longrightarrow Cart_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, D').$$

Remarques.-

1) Le foncteur $(\ ) \circ \psi$ défini en 2.6.1. est la restriction à la fibre au-dessus de 1 de E^{ψ}

$$(\ ) \circ \psi = E^{\psi}_1 .$$

2) Le foncteur $\Psi \circ (\ )$ défini en 2.6.3. est la restriction à la fibre au-dessus de 1 de Ψ^C.

3) $\Psi \circ (\ ) = \Psi^C_1$.

Comme en 2.7.3., on peut, à tout $F \in |Cart_{\mathbb{B}}(D,D')|$ associer, pour $I \in |\mathbb{B}|$, $i^*F \in |Cart_{\mathbb{B}/I}(D_I, D'_I)|$.

(i^*F est obtenu à partir de F par produit fibré par Y_I, dans Cat).

On a alors : F_I (restriction de F à $D(I)$) $= i^*F_{1_I}$ (restriction de i^*F à $D_I(1_I)$).

Reprenant l'argument de la preuve de 2.7.3.3., on tire :

pour $\emptyset : C \to C'$ et $\Psi : E \to E'$

$$E_I^{\emptyset} = (\ )\ o(I \times \emptyset) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(I \times \emptyset, E) \simeq \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}/I}(\emptyset_I, E_I) = i^*\emptyset_{1_I}$$

(Pour $\emptyset : C \to C'$, $i^*\emptyset$ est le foncteur $\mathbb{B}/I$-cartésien :

$$i^*\emptyset : i^*C \longrightarrow i^*C'$$

associé (2.5.4.) aux images de $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ par le foncteur :

$$i^* : \mathrm{Cat}\ \mathbb{B} \longrightarrow \mathrm{Cat}\ \mathbb{B}/I).$$

De même

$$\Psi_I^C = \Psi \text{ o } (I \times -) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(I\times C, \Psi) \simeq \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, i^*\Psi) = i^*\Psi^{i^*C}_{\ 1_I}.$$

2.8.- *Catégorie de préfaisceaux.*

2.8.1.- *Fibration duale.*

Soit $D : \mathbb{D} \to \mathbb{B}$; il lui correspond un pseudo-foncteur $\partial D : \mathbb{B}^{op} \to \mathrm{Cat}$.

On forme le pseudo-foncteur : $\delta \text{ o } \partial D$, où $\delta : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ est le foncteur qui à toute catégorie associe sa duale. La fibration correspondant à $\delta \text{ o } \partial D$ sera notée D^{op}.

Pour $I \in |\mathbb{B}|$ $\quad D^{op}(I) = D(I)^{op}$.

Si $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$, on vérifie que :

$$C^{op} : \mathbb{B}(C^{op}) \to \mathbb{B}.$$

2.8.2.- Soit $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$, et $\hat{C}$ la catégorie des préfaisceaux contravariants (internes). On a : $\hat{C} \simeq \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C^{op}, B)$.

$\hat{C}$ est donc la fibre au-dessus de 1 de $B^{C^{op}}$.

Pour $I \in |\mathbb{B}|$, on a :

$$\mathbb{B}^{\underline{C}^{op}}(I) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{C}^{op} \times I, \mathbb{B}).$$

Un objet γ de cette catégorie est (2.5.2.) un couple $(\delta_o \in |\mathbb{B}/I \times C_o|, \lambda_o \in F\ell(\mathbb{B}/I \times C_1))$ vérifiant les conditions habituelles.

$$\begin{tikzcd}
\gamma_1 \arrow[r, shift left, "\lambda_o"] \arrow[r, shift right, "\theta_1"'] \arrow[d] & \gamma_o \arrow[d] \\
I \times C_1 \arrow[r, shift left, "I \times d_o"] \arrow[r, shift right, "I \times d_1"'] & I \times C_o
\end{tikzcd}$$

soit, sous forme abrégée :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\gamma} \arrow[d] \\
\underline{I \times C^{op}}
\end{tikzcd}$$

(où $\underline{\gamma}$ et $\underline{I \times C^{op}} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$).

Un tel diagramme peut encore s'écrire, en introduisant la projection $\underline{I \times C^{op}} \to \underline{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd}
\gamma \arrow[d] \arrow[ddl] & \\
\underline{I \times C^{op}} \arrow[dl] & \\
\underline{C}^{op} &
\end{tikzcd}$$

On sait qu'il existe un foncteur $c^* : \mathbb{B} \to \hat{C}$ exact à gauche qui à $I \in |\mathbb{B}|$ associe $I \times \underline{C}^{op} \to \underline{C}^{op}$ préfaisceau constant égal à I).

On voit alors que γ est un objet de $\hat{C}/c^*I$ (dans le cas où $\mathbb{B} = \mathbb{E}ns$, γ est une famille de préfaisceaux indexée par I).

On vérifie alors simplement que :

$$\hat{C}/c^*I \simeq \mathbb{B}^{C^{op}}(I) \quad \text{(équivalence de catégories).}$$

2.8.3.- On considère la "comma category" $(\hat{C},c^*)$ et la projection

$$P : (\hat{C},c^*) \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Le diagramme ci-dessous est un produit fibré dans Cat.

$$\begin{tikzcd}
 & (\hat{C},c^*) \arrow[dl] \arrow[dr, "P"] & \\
F\ell\,\hat{C} \arrow[dr, "\mathrm{But}"'] & & \mathbb{B} \arrow[dl, "c^*"] \\
 & \hat{C} &
\end{tikzcd}$$

$\hat{C}$ ayant des produits fibrés, But : $F\ell\,\hat{C} \to \hat{C}$ est fibrant.
$P : (\hat{C},c^*) \longrightarrow \mathbb{B}$ est donc une fibration.

Si $f : I \to J$ $(f \in F\ell\,\mathbb{B})$, le foncteur f^* est déterminé sur les objets par le produit fibré dans $\hat{C}$ ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\vartheta \times_{c^*J} c^*I \arrow[rr] \arrow[d, "f^*\xi"'] & \arrow[d, phantom, "\text{p.f.}"] & \vartheta \arrow[d, "\xi"] \\
c^*I \arrow[rr, "c^*f"'] & & c^*J
\end{tikzcd}$$

$$I \xrightarrow{\quad f \quad} J$$

2.8.4.- Il résulte de 2.8.2. et 2.8.3. que la fibration associée à $\hat{C}$, soit $B^{C^{op}}$ est $\mathbb{B}$-équivalente à $P : (\hat{C}, c^*) \to \mathbb{B}$.

2.9.- *Foncteur de Yoneda.*

Soit $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \to \mathbb{B}$ une petite fibration.

On se propose de définir dans le $\mathbb{B}$-contexte le foncteur de Yoneda, Y.

Dans le cas usuel, $(\mathbb{B} = \mathbb{E}ns)$, il s'agit d'un foncteur $\underline{C} \to \hat{C}$.

Dans le cas général, il s'agit donc d'un foncteur cartésien de C dans $B^{C^{op}}$: $Y \in |Cart_{\mathbb{B}}(C, B^{C^{op}})|$.

Y peut donc être construit de la façon suivante (2.5.2.)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma' & \overset{\lambda_1}{\underset{\theta_o}{\rightrightarrows}} & \Gamma \\
\downarrow{\scriptstyle Y_1} & & \downarrow{\scriptstyle Y_o} \\
c^*C_1 & \overset{c^*d_1}{\underset{c^*d_o}{\rightrightarrows}} & c^*C_o \\
 & & \\
C_1 & \overset{d_1}{\underset{d_o}{\rightrightarrows}} & C_o
\end{array}$$

où $Y_o : \Gamma \longrightarrow c^*C_o \in |B^{C^{op}}(C_o)|$ $(= \hat{C}/c^*C_o$ (2.8.2.)),

$Y_1 : \Gamma' \longrightarrow c^*C_1 \in |B^{C^{op}}(C_1)|$ $(= \hat{C}/c^*C_1)$ est de plus image inverse de Y_c par d_o :

$$Y_1 = d_o^*(Y_o),$$

c'est-à-dire (2.8.3.) que le carré inférieur du diagramme ci-dessus est un produit fibré dans $\hat{C}$.

Observant qu'un objet de $\hat{C}$ peut être représenté par une catégorie interne à $\mathbb{B}$, au-dessus de $\underline{C}^{op}$, la construction de Y prend la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Gamma'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd] & & \Gamma_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd] \\
\Gamma'_0 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & \arrow[r, phantom, "(4)"] & \Gamma_0 \arrow[dd] & \arrow[d, phantom, "(1)"] \\
 \arrow[r, phantom, "(3)"] & C_1\times C_1 \arrow[rr, shift left, "C_1\times d_1"] \arrow[rr, shift right, "C_1\times d_0"'] \arrow[dl, shift left, "d_0\times C_1"] \arrow[dl, shift right, "d_1\times C_1"'] & \arrow[u, phantom, "(2)"] & C_1\times C_0 \arrow[dl, shift left, "d_0\times C_0"] \arrow[dl, shift right, "d_1\times C_0"'] \\
C_0\times C_1 \arrow[rr, shift left, "C_0\times d_1"] \arrow[rr, shift right, "C_0\times d_0"'] & & C_0\times C_0 &
\end{tikzcd}$$

où la face (1) représente Y_o et la face (3) Y_1.

Détermination de Y_o (face (1)).

Soit $x : 1 \to C_o$. On a $Y_1(x) \in |Cart_B(C^{op},B)| = C(-,x)$.

Pour $y : 1 \to C_o$ $Y_1(x)(y) = C(y,x)$ est donné par :

$$\begin{tikzcd}
C(y,x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & C_1 \arrow[d, "(d_o, d_1)"] \\
1 \arrow[r, "(y,x)"'] & C_o\times C_o
\end{tikzcd} .$$

Par ailleurs $Y_1(x)$ est l'image inverse de Y_o par $1 \xrightarrow{x} C_o$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, "C(-,x)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & \Gamma \arrow[d, "Y_o"] \\
c^*1 \arrow[r, "c^*x"] & c^*C_o
\end{tikzcd} .$$

D'où Y_o :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
C_1 \times_{C_o} C_1 \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, "{(p_o, d_1 p_1)}"'] & C_1 \arrow[d, "{(d_o, d_1)}"] \\
C_1 \times C_o \arrow[r, shift left, "d_o \times C_o"] \arrow[r, shift right, "d_1 \times C_o"'] & C_o \times C_o
\end{tikzcd}$$

(μ est la flèche de composition).

<u>*Détermination de la face*</u> (2).- Cette face représente un objet de $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C \times C_o, B) = B^C(C_o)$.

On fait un raisonnement analogue. Soit $y : 1 \to C_o$.

L'image inverse de la face (2) par y est $C(y,-)$.

On en déduit la face cherchée :

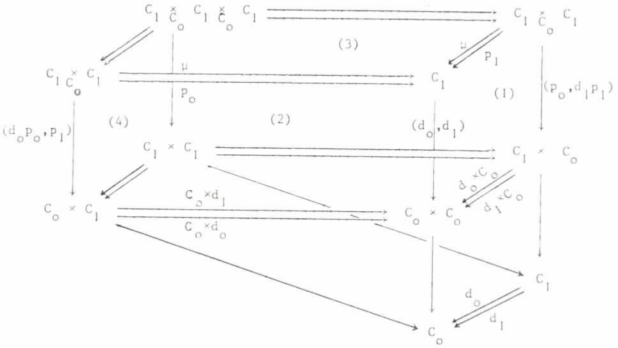
$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
C_1 \times_{C_o} C_1 \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "p_o"'] \arrow[d, "{(d_o p_o, p_1)}"'] & C_1 \arrow[d, "{(d_o, d_1)}"] \\
C_o \times C_1 \arrow[r, shift left, "C_o \times d_1"] \arrow[r, shift right, "C_o \times d_o"'] & C_o \times C_o
\end{tikzcd}$$

<u>*Remarque*</u>.- La détermination des diverses faces du diagramme nécessite l'utilisation des flèches $T \to C_o$, pour tout T $(t : T \to 1)$.

Mais une telle flèche revient à une flèche de $\mathbb{B}/T : 1_T \to t^* C_o$, donc au cas particulier envisagé plus haut.

La détermination des autres faces se ferait de la même façon à partir de flèches $1 \to C_1$.

Finalement la construction cherchée est la suivante :



Remarque.- On considère dans la bicatégorie des distributeurs internes à B, ([3]), le distributeur identique.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 \arrow[rr, shift left, "\mu"] \arrow[rr, shift right, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"'] & & C_1 \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_0"] & & C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 \arrow[ll, shift right, "\mu"'] \arrow[ll, shift left, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] \\
C_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & C_0 & & C_0 & C_1 \arrow[l, shift right, "d_0"'] \arrow[l, shift left, "d_1"]
\end{tikzcd}$$

(p_0 et p_1 sont les projections de $C_1 \underset{C_0}{\times} C_1$ sur C_1, μ la flèche de composition).

Un distributeur $\underline{C} \Longrightarrow \underline{C}$ peut être considéré (2.5.2.) comme un objet de $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C^{op} \times C, B)$; il lui correspond (2.7.4.) un objet de $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B^{C^{op}})$ qui dans le cas de $1_{\underline{C}} : \underline{C} \Longrightarrow \underline{C}$ est Y.

2.10.- *Catégories "comma" au-dessus de* $\mathbb{B}$.

2.10.1.- *Définition*.- Soit $\phi : E \to D$ et $\Psi : E' \to D$ deux foncteurs cartésiens au-dessus de $\mathbb{B}$. On note (ϕ,Ψ) la fibration définie de la façon suivante :

$$\forall\, I \in |\mathbb{B}| \quad (\phi,\Psi)(I) = (\phi_I,\Psi_I) \quad \text{(catégorie "comma")}$$

et si $f : I \to J$ le changement de base f^* est défini sur un objet $(A_J,A'_J,u_J : \phi_J A_J \to \Psi_J A'_J) \in |(\phi,\Psi)(J)|$ par

$$f^*(A_J,A'_J,u_J) = (f^*A_J,f^*A'_J,f^*u_J)$$

(où les trois derniers f^* sont les changements de base dans E,E' et D).

En effet : $f^*u_J : f^*\phi_J A_J = \phi_I f^*A_J \longrightarrow f^*\Psi_J A'_J = \Psi_I f^* A'_J$.

Les projections $P : (\phi,\Psi) \to E$ et $P' : (\phi,\Psi) \to E'$ sont des foncteurs cartésiens.

2.10.2.- *Proposition*.- Dans les conditions de (2.10.1.), si $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$

$$(\phi,\Psi)^C \to (\phi^C,\Psi^C) \quad (\mathbb{B}\text{-équivalence entre fibrations}).$$

Preuve : On a : $\phi^C : E^C \to D^C$ et $\Psi^C : E'^C \to D^C$ foncteurs cartésiens au-dessus de $\mathbb{B}$.

On montre l'équivalence sur la fibre au-dessus de 1 puis on utilise (2.7.3.).

Soit $\gamma \in |(\phi,\Psi)^C(1)| = |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,(\phi,\Psi))|$

$$\begin{tikzcd}
 & C(J) \arrow[ddl, "\lambda_J"'] \arrow[d, "\gamma_J"] \arrow[ddr, "\lambda'_J"] & \\
 & (\phi_J,\Psi_J) \arrow[dl, "P_J"'] \arrow[dr, "P'_J"] & \\
E_J \arrow[dr, "\phi_J"'] & & E'_J \arrow[dl, "\Psi_J"] \\
 & D_J &
\end{tikzcd}$$

La donnée de γ équivaut à celle d'une famille de foncteurs $\gamma_J : C(J) \to (\phi,\Psi)(J) = (\phi_J,\Psi_J)$ $(J \in |\mathbb{B}|)$ commutant aux changements de bases.

On sait que ceci équivaut à la donnée d'une famille

$$(\lambda_J,\lambda'_J,\delta_J)_{J \in |\mathbb{B}|}$$

où $\lambda_J : C(J) \to E_J$ et $\lambda'_J : C(J) \to E'_J$ sont des foncteurs et $\mu_J : \phi_J\lambda_J \to \Psi_J\lambda'_J$ une transformation naturelle. La commutation aux changements de bases se vérifie trivialement.

La donnée de γ équivaut donc à celle d'un triplet (λ,λ',μ) où $\lambda \in |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,E)| = |E^C(1)|$, $\lambda' \in |E'^C(1)|$ et $\mu : \phi_1^C(\lambda) \to \Psi_1^C(\lambda')$ est une transformation $\mathbb{B}$-naturelle, c'est-à-dire à la donnée d'un objet de $(\phi^C,\Psi^C)(1)$.

2.10.3.- *Applications.*

a) Soit $K : D \to B$ un $\mathbb{B}$-foncteur cartésien.
On note $Id : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la fibration identique et on introduit le foncteur cartésien $* : Id \to B$ défini par :

$\forall I \in |\mathbb{B}|$ $\quad (*)_I : I \to \mathbb{B}/I$ est tel que $(*)_I(I) = 1_I$ (objet final de $\mathbb{B}/I$).

On forme la catégorie "comma" $(*,K)$.

Un objet de $(*,K)(I)$ est la donnée de (δ_I,α_I) avec :

$$\delta_I \in |D(I)| \text{ et } \alpha_I : 1_I \longrightarrow K_I\delta_I \quad (\alpha \in F\ell\ \mathbb{B}/I).$$

Pour tout $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$, on a :

$$(*,K)^C \simeq (*^C,K^C) \quad (\mathbb{B}\text{-équivalence}).$$

Un objet de $(*,K)^C$, par exemple dans la fibre au-dessus de 1 est donc la donnée de

$$- \delta \in |D^C(1)| = |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,D)|$$

$$- \alpha : \underline{C}^*(1) \to K^C(\delta) = K \circ (\delta) \qquad (2.6.3.)$$

(flèche dans $B^C(1) = \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,B)$).

On voit, en effet, que :

$$(*)^C_1(1) = \underline{C}^*(1) \qquad \text{(préfaisceau constant égal à } 1).$$

b) Soit $U : D' \to D$ un $\mathbb{B}$-foncteur cartésien.
On forme la catégorie "comma" (X,U) $(X \in |D(1)|$.
Pour tout $\underline{C} \in |\mathrm{Cat}\ \mathbb{B}|$, on a :

$$(X,U)^C \simeq (\underline{C}^*(X),U^C) \quad (\mathbb{B}\text{ - équivalence}).$$

Un objet de $(X,U)^C(1)$ est donc la donnée de

$$- \delta' \in |D'^C(1)| = |\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C,D')|$$

$- \gamma : \underline{C}^*(X) \to U^C(\delta') = U \circ (\delta')$ flèche dans $D^C(1)$.

$(\underline{C}^*(X) \in |D^C(1)|$, "foncteur" constant égal à $X)$.