

## CHAPITRE III

## FIBRATIONS LOCALEMENT PETITES.

-----

3.1.- Définition.- Etant donné une fibration  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  on dit qu'elle est localement petite si et seulement si, pour tout  $I \in |\mathcal{B}|$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $E(I)$  il existe un objet  $\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{k} I$  de  $\mathcal{B}/I$  vérifiant la propriété :

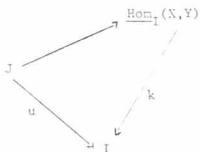
$$\forall u \in |\mathcal{B}/I| \quad \mathcal{B}/I(u, k) = E(J) (u^*X, u^*Y) \quad (u : J \rightarrow I)$$

(bijection compatible avec les changements de base).

Remarque.-

1) Une telle définition suppose l'existence d'un choix des images inverses  $u^*X, u^*Y$ , c'est-à-dire d'un clivage pour la fibration  $E$ .

2) Si  $E$  est une fibration scindée, pour tout  $(X, Y)$  il existe un foncteur  $\mathcal{B}/I^{\text{OP}} \rightarrow \text{Ens}$  qui à  $u$  associe  $E(J) (u^*X, u^*Y)$ .  $E$  est localement petite ssi pour tout  $I, X, Y$ , le foncteur précédent est représentable.



3) Dans le cas usuel,  $\mathcal{B} = \text{Ens}$ , cette définition coïncide avec la notion habituelle de catégorie localement petite :

$$\forall X = (X_i)_{i \in I} \quad \forall Y = (Y_i)_{i \in I} \quad \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(X_i, Y_i) \longrightarrow I$$

3.2.- Flèche générique.- Utilisant la flèche identique

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) & = & \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \\ & \searrow k & \swarrow k \\ & I & \end{array}$$

la définition 3.1. nous montre l'existence d'un morphisme  $g : k^*X \rightarrow k^*Y$ , la flèche générique au-dessus de  $I$ , de  $X$  dans  $Y$ .

Ce morphisme a la propriété universelle suivante : s'il existe  $u \in |B/I|$  ( $u : J \rightarrow I$ ) et un morphisme  $\bar{u}' : u^*X \rightarrow u^*Y$  de  $E(J)$  alors il existe une flèche unique  $u' : u \rightarrow k$  dans  $B/I$  tel que  $\bar{u}'$  soit image inverse de  $g$  par  $u'$ .

$$\begin{array}{ccc} & X & Y \\ & \downarrow & \downarrow \\ u^*X & \xrightarrow{\bar{u}'} & u^*Y \\ & & \downarrow g \\ & & k^*X \xrightarrow{\quad} k^*Y \\ & & \downarrow \\ & & I \\ & \swarrow u & \nwarrow k \\ J & \xrightarrow{\quad u' \quad} & \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \end{array}$$

Remarque.- Etant donné  $X, Y \in |E(I)|$ , un morphisme de  $X$  dans  $Y$  au-dessus de  $I$  est une section :  $I \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Y)$  de  $k : \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \longrightarrow I$ .

3.3.- Proposition.- Une fibration  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  est localement petite si et seulement si, pour tout  $I \in |\mathcal{B}|$ , la fibre  $E(I)$  est une catégorie relative à  $\mathcal{B}/I$ , et pour tout  $u : J \rightarrow I$ ,  $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$  commute aux Hom. (La multiplication dans  $\mathcal{B}/I$  est le produit cartésien).

Preuve :

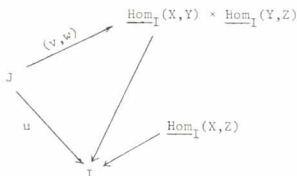
a) Etant donné  $X, Y, Z$  de  $|E(I)|$ , on définit un morphisme :

$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \times \underline{\text{Hom}}_I(Y, Z) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Z) .$$

On montre qu'à tout  $u : J \rightarrow I$  et toute flèche :

$$(v, w) : J \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \times \underline{\text{Hom}}_I(Y, Z) \quad \text{au-dessus de } I$$

correspond une flèche :  $J \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Z)$  au-dessus de  $I$ .



A  $v$  correspond une flèche :  $u^* X \xrightarrow{\bar{v}} u^* Y$  de  $E(J)$ .

à  $w$  , une flèche :  $u^* Y \xrightarrow{\bar{w}} u^* Z$  de  $E(J)$  .

A la composition  $\bar{w} \cdot \bar{v}$  correspond la flèche cherchée. On vérifie ensuite que pour  $\underline{\text{Hom}}_I$ ,  $E(I)$  a bien une structure de catégorie relative à  $\mathcal{B}/I$  ( $[2]$ ).

b) Etant donné  $u : J \rightarrow I$ , on montre que  $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$  commute aux Hom. En fait, notant de la même façon  $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$  et

$u^* : \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}/J$ , on établit que :

$$\underline{\text{hom}}_J(u^* X, u^* Y) \cong u^* \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) .$$

Pour tout  $\tau : I \rightarrow J$ ,

on forme  $B/J(\tau, \underline{\text{Hom}}_J(u^* X, u^* Y)) \cong E(\tau) (\tau^* u^* X, \tau^* u^* Y)$

qui est isomorphe à  $B/J(\tau, u^* \underline{\text{Hom}}_I(X, Y))$ .

c) La réciproque est immédiate.

3.4. - Proposition. - Si  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $E' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$  sont localement petites et  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  est cartésien :

a) pour tout  $I$ ,  $F_I$  est un foncteur relatif ( $[2]$ ) de catégories relatives à  $\mathcal{B}/I$  (i.e. il existe  $\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(FX, FY) \in F \downarrow \mathcal{B}/I$  rendant commutatifs les diagrammes habituels).

b)  $F$  est  $\mathcal{B}$ -fidèle (resp. plein) si et seulement si pour tout  $I$ , pour tout  $X$ , et tout  $Y$ , la flèche précédente est un mono (resp. un épimorphisme scindé).

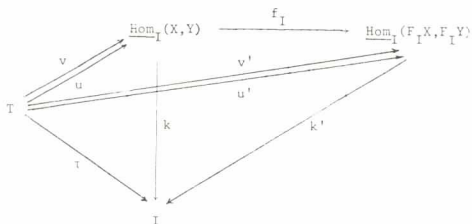
Si  $E$  est localement petite, et  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  est une  $\mathcal{B}$ -équivalence,  $E'$  est localement petite.

Preuve :

a) Soit  $X, Y \in |E(I)|$ .

A tout  $\tau : I \rightarrow I$  et tout  $u : \tau \rightarrow k$  dans  $\mathcal{B}/I$  correspond  $\bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y$  donc  $F_I \bar{u} : F_I \tau^* X \rightarrow F_I \tau^* Y \cong \tau^* F_I X \rightarrow \tau^* F_I Y \cong \tau^* F_I Y$ . On pose  $\bar{u}' = F_I \bar{u}$ , d'où  $u' : \tau \rightarrow k'$  (diagramme ci-après) et,  
 $f_I : \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(F_I X, F_I Y)$  au-dessus de  $I$ .

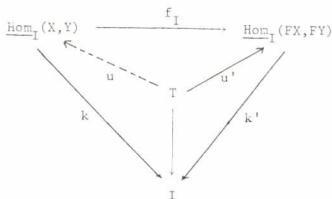
b) 1)



Soient  $u, v : T \rightarrow k$  pour que  $f_I v = f_I u$ , donc  $v' = u'$ , il faut et il suffit que  $F_I \bar{u} = F_I \bar{v}$ .

Finalement, pour tout  $T$ ,  $F_T$  est fidèle si et seulement si, pour tout  $I$ , tout  $X, Y \in |E(I)|$ ,  $f_I$  est un mono.

2)



Pour que  $f_I$  soit un épimorphisme scindé il faut et il suffit que :

$$\forall v : T \rightarrow I \quad \forall u' : T \rightarrow k' \quad \exists u : T \rightarrow k \quad f_I u = u'.$$

A  $u$  et  $u'$  correspondent  $\bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y$ ,

$$\bar{u}' : \tau^* F_I X = F_I \tau^* X \rightarrow \tau^* F_I Y = F_I \tau^* Y.$$

La condition précédente équivaut à

$$\forall \tau \forall \bar{u}' : F_T \tau^* X \rightarrow F_T \tau^* Y \sqsupseteq \bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y \quad F_T \bar{u} = \bar{u}' .$$

D'où le résultat.

3) La dernière partie est une conséquence triviale de la définition et du résultat ci-dessus.

Remarque. - Le lemme de Yoneda et cette proposition permettent de ramener l'étude des fibrations localement petites au cas de fibrations scindées.

3.5.- Proposition. - Si  $C : B(C) \rightarrow B$  est petite,  $C$  est localement petite.

Preuve : En fait (remarque précédente) la propriété est vraie pour  $C$  essentiellement petite (2.4.).

Soient  $X$  et  $Y$  deux objets au-dessus de  $I$ , c'est-à-dire deux flèches  $I \xrightarrow{\frac{X}{Y}} C_0$ .

On construit  $\text{Hom}_I(X, Y)$  par le produit fibré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_I(X, Y) & \longrightarrow & C_1 \\ \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow (d_0, d_1) \\ I & \xrightarrow{(X, Y)} & C_0 \times C_0 \end{array}$$

3.6.- Proposition. -

La fibration  $B : \mathcal{F}C B \rightarrow B$  est localement petite si et seulement si, dans  $B$ , les foncteurs  $u^* : B/I \rightarrow B/J$  (pour tout  $u : J \rightarrow I$ ) ont des adjoints à droite. (On dit aussi que  $B$  a des  $u^*$ ).

Preuve :

a) Si  $\mathcal{B}$  a des  $\pi_u$ ,  $\underline{\text{Hom}}_I(x, y)$  ( $x : X \rightarrow I$   $y : Y \rightarrow I$ ) est donné par :

$$\pi_x \circ x^* y \in |\mathcal{B}/I|$$

b) Si  $\mathcal{B} : \text{Fl } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  est localement petite, on voit immédiatement que, pour tout  $I$ ,  $\mathcal{B}/I$  est cartésienne fermée. On sait que cette propriété est équivalente à l'existence de  $\pi_u$  pour tout  $u$ , dans  $\mathcal{B}$  à lim finies.

3.7. - Proposition. - Soit  $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$  et  $\mathcal{B}$  vérifiant l'hypothèse précédente ( $\mathcal{B}$  a des  $\pi_u$ ), alors  $\mathcal{B}^{\text{C}^{\text{OP}}} : (\underline{C}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$  est localement petite.

Preuve : On sait que moyennant l'existence de  $\pi_u$ , il existe des foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & \\ \hat{C} & \xleftarrow{c^*} & \mathcal{B} \\ & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & \\ & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & c_* \end{array} \quad \text{avec} \quad \text{lim}_{\underline{C}} \dashv c^* \dashv \text{lim}_{\underline{C}} = c_* .$$

On en déduit, pour tout  $I$ , deux foncteurs adjoints

$$\hat{C}/c^* I \xrightleftharpoons[c_* I]{c^* I} \mathcal{B}/I \quad \text{avec} \quad c^* I \dashv c_* I .$$

$(c^*_I(X \rightarrow I) = (c^* X \rightarrow c^* I)$ ,  $c_{*I}(\varnothing \rightarrow c^* I) = \text{image inverse par } \pi_I : I \rightarrow c_* c^* I$  de  $c_* \varnothing \rightarrow c_* c^* I$ ).

Par ailleurs, les mêmes hypothèses suffisent à assurer que, pour tout  $I$ ,  $\hat{C}/c^* I$  est cartésienne fermée.

Alors, si  $\psi, \varphi \in |\hat{C}/c^* I|$ , on a :

$$\underline{\text{Hom}}_I(\psi, \varphi) = c_{*I}(\psi^\varnothing)$$

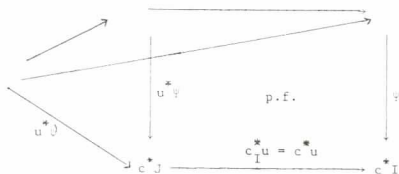
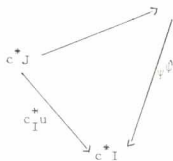
(avec  $\psi^\varnothing$  exponentielle dans  $\hat{C}/c^* I$ ).

En effet, observant que dans la fibration :

$$(\widehat{C}, c^*) \longrightarrow B$$

l'image inverse par  $u : J \rightarrow I$  est le produit fibré, dans  $\widehat{C}$ , par  $c^*u : c^*J \rightarrow c^*I$ , on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}/I(u, c_{*I}(\psi^{\downarrow})) &= (\text{adjonction}) \widehat{C}/c^*I(c_{*I}u, \psi^{\downarrow}) \\ &= (\text{adjonction cartésienne dans } \widehat{C}/c^*I) \widehat{C}/c^*I(c_{*I}u \times \psi, \psi) \\ &= \widehat{C}/c^*J(u^*\psi, u^*\psi) . \end{aligned}$$





3.8. - Construction de la sous-catégorie [interne] pleine engendrée par un objet de  $D(I)$ .

On généralise à une fibration localement petite  $D$  une construction donnée par Bénabou dans le cadre des catégories internes à un topos.

Soit  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  une fibration et  $S \in |D(I)|$ ; on construit la "petite fibration" engendrée par  $S$  (représentant la sous-catégorie pleine de  $D$  ayant pour objets - dans le cas où  $\mathcal{B} = \mathbf{Ens}$  - les  $(S_i)_{i \in I}$ ).

Il s'agit donc de construire  $\underline{\sum} \in |\mathbf{Cat} \mathcal{B}|$ .

On prend  $\sum_0$  (objet des objets) =  $I$

$$\sum_1 \text{ (objet des flèches) } = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \quad (3.1)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les deux projections  $I \times I \rightarrow I$

$$0 = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \xrightarrow{k} I \times I \xrightarrow[\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}]{S} I$$

$p_1 k$  et  $p_2 k$  sont respectivement les flèches source et but. La flèche identité  $\epsilon : I \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) = 0$  s'obtient de la façon suivante :

soit  $\Delta : I \rightarrow I \times I$  la diagonale ; on a, dans  $D(I)$  la flèche identique :

$$1_S : S \longrightarrow S = \Delta^* p_1^* S \longrightarrow \Delta^* p_2^* S$$

d'où (3.1) l'existence de  $\epsilon$  rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \\ & \nearrow \epsilon & \downarrow \\ I & & \\ & \searrow \Delta & \\ & & I \times I \end{array}$$

Considérons la  $\mathcal{B}$ -fibration  $\underline{\Sigma}$  associée à  $\underline{\Sigma}$ .

Pour  $T \in |\mathcal{B}|$  la catégorie  $\underline{\Sigma}(T)$

- a pour objets les morphismes  $\tau : T \rightarrow I$  dans  $\mathcal{B}$

$$|\underline{\Sigma}(T)| = \mathcal{B}(T, I).$$

- a pour flèches de  $\tau_1$  dans  $\tau_2$  ( $(\tau_1, \tau_2) : T \rightarrow I \times I$ ) les flèches de  $T$  dans  $O$  rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & O = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \\ \downarrow (\tau_1, \tau_2) & & \downarrow k \\ I \times I & \xrightarrow{\quad} & I \times I \end{array}$$

Il en résulte (3.1) :

$$\underline{\Sigma}(T) (\tau_1, \tau_2) = D(T) (\tau_1^* S, \tau_2^* S).$$

On a donc mis en évidence un foncteur  $U_T$  plein et fidèle :

$$U_T : \underline{\Sigma}(T) \longrightarrow D(T) \text{ défini par :}$$

$$U_T(\tau) = \tau^* S$$

Les foncteurs  $U_T$  commutent évidemment aux changements de base ( $f : T' \rightarrow T$   $U_T, f^* \tau = f^* U_{T'} \tau = f^* \tau^* S$ ).

On note  $U \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$  le foncteur cartésien  $\mathcal{B}$ -plein et fidèle engendré par les  $U_T$ .

$U$  peut être représenté (2.5.2.) comme un couple  $(U_0, \bar{\tau}_1)$ .

$$\text{On a } U_0 = U_1(1_I) = S.$$

3.9.- Proposition.- Pour que  $D$  soit localement petite il faut et il suffit que pour toute petite fibration  $C$  et tout couple de foncteurs cartésiens  $G, G' \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ ,  $(G, G')$  soit petite. (Bénabou)

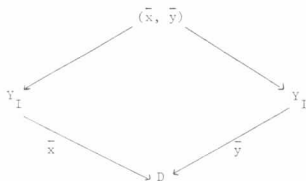
Preuve : a) Soit  $I \in |\mathbb{B}|$  et  $Y_I : \mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{B}$ .

Soient  $x, y \in |D(I)|$ . D'après le lemme de Yoneda (2.2) il leur correspond  $\bar{x}, \bar{y} \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, D)|$ .

On forme la "comma category"  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Dire qu'il s'agit d'une petite fibration c'est, en particulier, dire qu'il existe un objet de  $\mathbb{B}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y})_0$  qui "représente" ses objets, c'est-à-dire les flèches  $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ .

On vérifie que  $(\bar{x}, \bar{y})_0$  a bien les propriétés de  $\underline{\text{Hom}}_I(x, y)$ .



b) Soit  $D$  une fibration localement petite.

- Objet des "objets de  $(G, G')$ .- On doit construire un objet de  $\mathbb{B}$  qui, dans le cas où  $\mathbb{B} = \text{Ens}$ , "représente" les morphismes  $u : Gx \rightarrow G'x$  ( $x \in |\underline{\mathcal{C}}|$ )  $G$  et  $G'$  sont donnés par les diagrammes (2.5.2.)

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & G_0 \\
 \theta_0 & \searrow & \\
 G'_1 & \xrightarrow{\lambda'_1} & G'_0 \\
 \theta'_0 & \searrow & \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{Hom}_{C_0}(G_0, G'_0) \\
 \downarrow \\
 C_0
 \end{array}$$

Pour  $\mathcal{B} = \text{Ens}$ , la fibre de  $G_0$  (resp.  $G'_0$ ) au-dessus de  $x \in C_0$  est  $Gx$  (resp.  $G'x$ ).

$D$  étant localement petite, on considère  $\text{Hom}_{C_0}(G_0, G'_0)$  et on vérifie qu'il est bien l'objet des "objets" cherché.

- Objet des "flèches" de  $(G, G')$ . - On doit construire un objet qui représente pour  $\mathcal{B} = \text{Ens}$  les flèches  $\alpha : x \rightarrow x'$  telles que le carré ci-dessous soit commutatif (flèches de  $u$  dans  $u'$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 Gx & \xrightarrow{\quad} & Gx' \\
 \downarrow u & & \downarrow u' \\
 G'x & \xrightarrow{G'\alpha} & G'x'
 \end{array}$$

Soient  $C_0 \times C_0 \xrightarrow[p_2]{p_1} C_0$  les deux projections.

On remarque que  $\text{Hom}_{C_0 \times C_0}(p_1^* G_0, p_2^* G_0)$  "représente" les flèches  $Gx \rightarrow Gx'$  et que  $\bar{\lambda}_1 : d_0^* G_0 \rightarrow d_1^* G_0$  peut être considéré comme une flèche  $(d_0, d_1)^*(p_1^* G_0) \rightarrow (d_0, d_1)^*(p_2^* G_0)$ . Il lui correspond donc une flèche  $\hat{\lambda}_1$  (qui pour  $\mathcal{B} = \text{Ens}$ , envoie  $\alpha \in C_1$  sur  $G\alpha$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{\hat{\lambda}_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G_0) \\
 \downarrow (d_0, d_1) & & \swarrow \\
 & & C_0 \times C_0
 \end{array}$$

On forme alors le produit (sur  $C_0 \times C_0$ )

$$\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G_0) \times p_2^* \underline{\text{Hom}}_{C_0} (G_0, G'_0)$$

Il existe (3.3) une flèche de ce produit dans  $\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G'_0)$  d'où une flèche (sur  $C_0 \times C_0$ ) de  $C_1$  dans  $\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G'_0)$  qui "représente" les flèches :

$$\alpha \rightsquigarrow u' \cdot G\alpha .$$

Il suffit de construire de la même façon la flèche qui "représente"

$$\alpha \rightsquigarrow G'a.u$$

puis de prendre le noyau pour construire un objet dont on vérifie qu'il est l'objet des "flèches" cherché.

## CHAPITRE IV

FIBRATION SUR  $\text{Cat } \mathbf{B}$  ASSOCIÉE A UNE  $\mathbf{B}$ -FIBRATION .

-----

4.1.- Proposition.- Soit  $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{B}$  une fibration. Il existe une fibration  $\bar{D} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathbf{B}$  telle que :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbf{B}| \quad \bar{D}(\underline{C}) \quad (\text{fibre au-dessus de } \underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbf{B}}(\underline{C}, D) .$$

Preuve :  $\text{Cat } \mathbf{B}$  a des lim finies quand  $\mathbf{B}$  en a.

Le foncteur de changement de bases :  $\bar{D}^* : \bar{D}(\underline{C}) \rightarrow \bar{D}(\underline{C}')$  est donné par :  $\bar{D}^* = ( ) \circ \vartheta = \text{Cart}_{\mathbf{B}}(\vartheta, D)$  (2.6.1).

Le composé de deux morphismes cartésiens est évidemment cartésien.

4.2.- Proposition.- Si  $F : D \rightarrow D'$  est un foncteur cartésien au-dessus de  $\mathbf{B}$ , on peut lui associer :  $\bar{F} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$  cartésien au-dessus de  $\text{Cat } \mathbf{B}$  et vérifiant :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbf{B}| \quad \bar{F}_{\underline{C}} \quad (\text{restriction à la fibre au-dessus de } \underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbf{B}}(\underline{C}, F) = F \circ ( ) \quad (2.6.3).$$

Preuve : Si  $\vartheta : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$ , on montre que  $\bar{F}$  commute au changement de bases :  $( ) \circ \vartheta = \bar{D}^*$ , soit :

$$\bar{F}_{\underline{C}} \cdot \bar{D}^* = \bar{D}'^* \cdot \bar{F}_{\underline{C}'}$$

Avec les notations de 2.6, les deux membres s'écrivent :

$$\bar{F}_{\underline{C}} \cdot \bar{D}^* = F \circ (( ) \circ \vartheta)$$

$$\bar{D}'^* \cdot \bar{F}_{\underline{C}'} = (F \circ ( )) \circ \vartheta$$

ils sont égaux (composition de foncteurs  $\mathbf{B}$ -cartésiens).

4.3. - Remarques. -

1) 2.6.2. donne la construction du foncteur changement de bases  $\vartheta^*$  et 2.6.4. la construction du foncteur cartésien (sur  $\text{Cat } \mathbb{B}$ )  $\bar{F}$ , associé à  $F : D \rightarrow D'$ .

2) On notera désormais  $\underline{C}^*$  le foncteur de changement de bases dans  $\bar{D}$  correspondant à la flèche unique  $\underline{C} \rightarrow 1$  de  $\text{Cat } \mathbb{B}$ .

$$\underline{C}^* : \bar{D}(1) = \mathbb{D} \rightarrow \bar{D}(\underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D) .$$

(pour  $d \in |\mathbb{D}|$   $\underline{C}^* d$  est le "foncteur" constant égal à  $d$ ).

Avec cette notation, le foncteur  $c^* : \mathbb{B} \rightarrow \hat{C}$  s'écrirait  $\underline{C}^{\text{op}*}$ .

3) Le foncteur cartésien "foncteur" constant :  $D \rightarrow D^C$  est noté  $\underline{C}^*$  (non souligné).

On a :  $\underline{C}_I^* = \underline{C}^*$  et, pour  $I \in |\mathbb{B}|$

$$\underline{C}_I^* : D(I) = D_I(I_I) \rightarrow D^C(I) = D_I^{i^* C}(I_I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^* C, D_I) \quad (2.7.3.3.)$$

donné par :  $\underline{C}_I^* = (i^* \underline{C})^*$

4.4. - Théorème. - Si  $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$  est  $\mathbb{B}$  localement petite,  $\bar{D} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathbb{B}$  est  $\text{Cat } \mathbb{B}$ -localement petite c'est-à-dire que :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}| \quad \forall \underline{G} \in |\bar{D}(\underline{C})| \quad \forall \underline{G}' \in |\bar{D}(\underline{C})| \quad \exists \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') \in |\text{Cat } \mathbb{B}/\underline{C}|$$

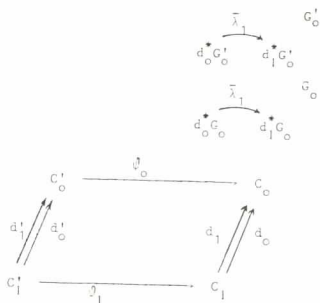
vérifiant :

$$\forall \vartheta : \underline{C}' \rightarrow \underline{C} \quad \bar{D}(\underline{C}') (\vartheta^* G, \vartheta^* G') = \text{Cat } \mathbb{B}/\underline{C} (\vartheta, \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G'))$$

Preuve : Soient  $G$  et  $G' \in |\bar{D}(\underline{C})|$ ,  $\vartheta : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$

$$G = (G_o, \bar{\lambda}_1 : d_o^* G_o \rightarrow d_1^* G_o)$$

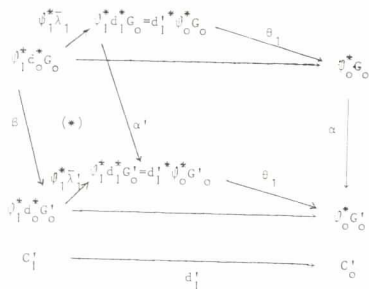
$$G' = (G'_o, \bar{\lambda}'_1 : d_o^* G'_o \rightarrow d_1^* G'_o)$$



Soit d'autre part, dans  $\bar{D}(C')$  une flèche :  $\vartheta^* G \rightarrow \vartheta^* G'$ , c'est-à-dire (remarques précédentes) :

1) une flèche au-dessus de  $l_{C'_0} : \vartheta^*_0 G_0 \xrightarrow{\alpha} \vartheta^*_0 G'_0$ .

2) une flèche au-dessus de  $l_{C'_1} : \vartheta^*_1 d^*_0 G_0 \xrightarrow{\beta} \vartheta^*_1 d^*_0 G'_0$  rendant le grand carré ci-dessous commutatif.



Il en résulte que (\*) l'est aussi

et :

$$\alpha' \cdot \vartheta^*_1(\bar{\lambda}_1) = \vartheta^*_1(\bar{\lambda}'_1) \beta$$



1) L'existence de la flèche  $\alpha$  est équivalente par hypothèse à celle d'une flèche  $C'_0 \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{C_0}(G_0, G'_0)$  telle que le triangle soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 C'_0 & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(G_0, G'_0) = H_0 \\
 \downarrow \psi_0 & & \swarrow h_0 \\
 & & C_0
 \end{array}$$

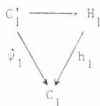
2) A la flèche  $F_1^*(\bar{\lambda}'_1) \cdot \beta$  correspond le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_0^*G'_0) & & \\
 & \nearrow & & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, \bar{\lambda}'_1)} & \\
 C'_1 & & & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_1^*G'_0) \\
 & \searrow \psi_1 & \downarrow h'_1 & & \swarrow h' \\
 & & C_1 & & 
 \end{array}$$

A la flèche  $\alpha' \cdot \beta_1^*(\bar{\lambda}'_1)$  correspond le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_1^*G_0, d_1^*G'_0) & & \\
 & \nearrow & & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_{C_1}(\bar{\lambda}'_1, d_1^*G'_0)} & \\
 C'_1 & & & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_1^*G'_0) \\
 & \searrow \psi_1 & \downarrow h''_1 & & \swarrow h' \\
 & & C_1 & & 
 \end{array}$$

Le fait que le carré (\*) soit commutatif montre que les deux flèches  $C'_1 \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_1^*G_0, d_1^*G'_0)$  qu'on vient de construire sont égales. Finalement, on en déduit dans  $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}_1$  une flèche



où  $h_1$  est dans  $\mathbb{B}/C_1$  le produit fibré

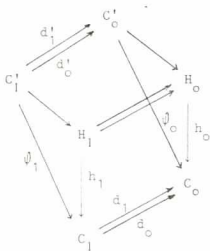
$$\begin{array}{ccc}
 h_1 & \longrightarrow & h'_1 \\
 \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \text{Hom}_{C_1}(d_o^*G_o, \bar{\lambda}'_1) \\
 h''_1 & \longrightarrow & h'
 \end{array}$$

$\text{Hom}_{C_1}(\bar{\lambda}_1, d_1^*(G'_o))$

A la projection  $h_1 \rightarrow h'_1$  correspond une flèche au-dessus de  $l_{C_1}$   
 $H_1 \longrightarrow \text{Hom}_{C_1}(d_o^*G_o, d_o^*G'_o) = d_o^*H_o$  (3.3) soit une flèche  $H_1 \rightarrow H_o$  au-dessus  
 de  $d_o$ .

A la projection  $h_1 \rightarrow h''_1$  correspond une flèche au-dessus de  $l_{C_1}$   
 $H_1 \longrightarrow \text{Hom}_{C_1}(d_1^*G_o, d_1^*G'_o) = d_1^*H_o$  soit une flèche  $H_1 \rightarrow H_o$  au-dessus  
 de  $d_1$ .

On vérifie alors que ces deux flèches déterminent bien une catégorie  $\underline{H}$  au-dessus de  $\underline{C}$



De plus les flèches  $C'_0 \rightarrow H_0$  et  $C'_1 \rightarrow H_1$  construites plus haut déterminent bien un morphisme de  $\text{Cat } \mathbb{B}/C$ . On a ainsi défini, sur les objets le bifoncteur cherché.

Cas particulier - Si  $C' = \underline{C}^* d$  ( $d \in |\mathbb{D}|$ ).

(On a alors  $G'_0 = C^*_0 d$ ,  $d^*_1 G'_0 = d^*_0 G'_0 = C^*_1 d$ )

$$\begin{array}{ccc} C^*_1(d) & \xrightarrow[\vartheta_0]{\vartheta_1} & C^*_0(d) \\ C_1 & \xrightarrow[d_0]{d_1} & C_0 \end{array}$$

Le carré fibré qui définit  $H_1$  est alors

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_1 G_0, C^*_1 d) = d^*_1 H_0 & \\ & \nearrow \sim & \\ H_1 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_0 G_0, C^*_1 d) \\ & \searrow & \nearrow \sim \\ & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_0 G_0, C^*_1 d) = d^*_0 H_0 & \end{array}$$

La flèche  $H_1 \rightarrow H_0$  au-dessus de  $d_1$  construite plus haut est simplement la projection

$$\begin{array}{ccc} H_1 = d^*_1 H_0 & \xrightarrow{\vartheta_1} & H_0 \\ \downarrow & \text{pf} & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

La catégorie  $\underline{H}$  au-dessus de  $\underline{C}$  est donc de la forme :

$$\begin{array}{ccc} H_1 = d_1^* H_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_0} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{array} & H_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & C_0 \end{array}$$

Elle définit donc un objet de  $\hat{C} = B^{C^{OP}}(1) = \text{Cart}_B(C^{OP}, B)$ .

#### 4.5.- Interprétation de la construction 4.4.-

Etant donné  $G, G' \in |\text{Cart}_B(C, D)|$ , ( $D$  localement petite) il s'agit de construire une catégorie interne à  $B$ , au-dessus de  $\underline{C}$

$$h : \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') \rightarrow \underline{C}$$

telle que pour tout foncteur interne  $\psi : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$  les transformations  $B$ -naturelles  $(G) \circ \psi + (G') \circ \psi$  soient en correspondance biunivoque avec les foncteurs de  $\underline{C}'$  dans  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G')$  au-dessus de  $\underline{C}$ . On est donc amené à introduire la "comma category"  $(G, G')$ , (2.10). Se donner une transformation  $B$ -naturelle  $(G) \circ \psi \rightarrow (G') \circ \psi$  revient à se donner un foncteur cartésien  $L : G' \rightarrow (G, G')$  tel que  $\psi = P.L = Q.L$ , (figure ci-dessous), c'est-à-dire qui se factorise par  $\text{Ker}(P, Q)$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & C' & & \\ & \swarrow & \downarrow L & \searrow & \\ & (G, G') & & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ C & & D & & C \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{P} \\ \xrightarrow{Q} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{P} \\ \xrightarrow{Q} \end{array} C$$

$\text{Ker}(P, Q) \rightarrow (G, G') \xrightarrow{\begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix}} C$

On a donc  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') = \text{Ker}(P, Q)$ .

## CHAPITRE V

## COMPLETUE.

-----

5.1.- Proposition.- (rappel [6]) - Etant donné deux fibrations  $E : E \rightarrow B$  et  $E' : E' \rightarrow B$  et deux foncteurs cartésiens  $E \xleftarrow[L]{R} E'$  au-dessus de  $B$  munis de deux  $B$ -transformations naturelles :

$$\varepsilon : LR \longrightarrow l_E \quad \eta : l_{E'} \longrightarrow RL$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\varepsilon$  et  $\eta$  définissent une adjonction  $L \dashv R$ ,  
 b) pour tout  $I \in |B|$ ,  $\varepsilon_I$  et  $\eta_I$  définissent l'adjonction  $L_I \dashv R_I$ .

Dans ces conditions on dit que  $L$  est  $B$ -adjoint à gauche de  $R$ .

5.2.- Proposition.- (rappel [6]) - Si  $R : E \rightarrow E'$  est un foncteur cartésien au-dessus de  $B$ , pour que  $R$  admette un  $B$ -adjoint à gauche il faut et il suffit que, pour tout  $I \in |B|$ ,  $R_I$  ait un adjoint à gauche  $L_I$ , les  $L_I$  étant compatibles avec les changements de bases.

5.3.- Limites finies.-

Soit  $E : E \rightarrow B$ ; on construit une fibration qui pour  $B = \text{Ens}$  correspond à la catégorie  $E \times E = E^2$  ( $2$  : catégorie discrète à deux objets).

A  $E$ , correspond un pseudo-foncteur  $\mathfrak{B}E : B^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$  qu'on compose avec le foncteur  $\text{Cat} \xrightarrow{(\ )^2} \text{Cat}$ .

On note  $E^{(2)} : E^{(2)} \rightarrow B$  la fibration correspondant au pseudo-foncteur  $(\ )^2 \cdot \mathfrak{B}E$ .

On a, pour tout  $I$   $E^{(2)}(I) = (E(I))^2$ .

Il existe un foncteur cartésien  $\Delta : E \rightarrow E^{(2)}$  au-dessus de  $\mathbb{B}$ . ( $\Delta_I$  est la diagonale  $E(I) \rightarrow (E(I))^2$ ).

Définition.-  $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  a des sommes finies (resp. produits finis) si et seulement si  $\Delta : E \rightarrow E^{(2)}$  a un  $\mathbb{B}$ -adjoint à gauche (resp. à droite).

Remarque.- D'après 5.1, la définition équivaut à : chaque fibre a des sommes finies (resp. produits finis) qui commutent aux changements de base.

#### 5.4.- Fibrations à $\mathbb{B}$ -sommes.

Etant donné une fibration  $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ , on veut généraliser à  $\mathbb{B}$  la construction suivante relative à  $\text{Ens}$ .

A toute famille de familles d'objets de  $\mathbb{C}$ ,  $\left( (X_i)_{i \in I_k} \right)_{k \in K}$  on associe  $\left( \coprod_{i \in I_k} X_i \right)_{k \in K}$ . Remplaçant  $\text{Ens}$  par  $\mathbb{B}$ , à toute flèche  $f : I \rightarrow K$  de  $\mathbb{B}$  et tout objet  $X$  au-dessus de  $I$ , on doit associer un objet au-dessus de  $K$ , "représentant la somme".

On exige donc que le foncteur de changement de base  $f^*$  ait un adjoint à gauche  $\sum_f$ .

Il faut par ailleurs que ces "sommes" commutent aux changements de base.

Définition.-  $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  est à  $\mathbb{B}$ -sommes si et seulement si les foncteurs  $f^*$  de changements de bases ont des adjoints à gauche  $\sum_f$ , vérifiant la condition de Chevalley :

si le carré ci-contre est cartésien dans  $\mathbb{B}$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{f} & J \\
 \downarrow k & & \downarrow h \\
 & p.f. & \\
 L & \xrightarrow{g} & K
 \end{array}$$

la flèche canonique :

$$\sum_f \cdot k^* \longrightarrow h^* \cdot \sum_g$$

est un isomorphisme,  $(\sum_f k^* \cong h^* \sum_g : E(L) \longrightarrow E(J))$ .

#### 5.5.- Fibration à B-produits.

On définit dualement une fibration à B-produits en exigeant

- que les foncteurs de changements de bases  $f^*$  aient des adjoints à droite  $\pi_f$ ,
- que ces foncteurs vérifient une condition duale de celle de Chevalley (condition de co-Chevalley) :

dans les mêmes conditions que précédemment, la flèche canonique :

$$g^* \pi_h \rightarrow \pi_k f^* \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque. - Soit  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $E^{\text{op}}$  sa duale (2.8.1). On vérifie que  $E$  est à B-produits si et seulement si  $E^{\text{op}}$  est à B-sommes.

#### 5.5.1.- Exemples.

1)  $B : \mathcal{F}\ell \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  est à B-sommes (1.3) ; la condition de Chevalley est trivialement vérifiée.

2) Si  $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ ,  $B^{\text{C op}} : (\hat{C}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$  est à B-sommes.

Si  $f : I \rightarrow J$ ,  $f^* : \hat{C}/c^*J \rightarrow \hat{C}/c^*I$  est le produit fibré dans  $\hat{C}$  par  $c^*f$  (2.8.3.), il existe donc un adjoint à gauche  $\sum_f \dashv f^*$  donné par la composition par  $c^*f$ .

La vérification de la condition de Chevalley se fait comme dans le cas précédent (les images inverses sont obtenues par des produits fibrés, les  $\sum_f$  par composition).

3)  $B : \mathcal{F}l \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  est à  $\mathcal{B}$ -produits si et seulement si  $\mathcal{B}$  a des  $\pi_u$  (3.6).

(La condition de co-Chevalley s'obtient à partir de la condition de Chevalley par adjonction).

4) Avec la même hypothèse  $B^{C^{OP}} : (\hat{C}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$  est à  $\mathcal{B}$ -produits.

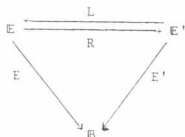
(L'existence des  $\pi_u$  dans  $\mathcal{B}$  suffit à assurer celle d'adjoint à droite pour  $u^* : \hat{C}/c^*J \rightarrow \hat{C}/c^*I$ . La condition de co-Chevalley s'obtient comme en 3).

5.6.- Proposition.- Etant donné un couple de  $\mathcal{B}$ -adjoints  $L \dashv R$ ,  $E \xrightarrow[L]{L} E'$ ,  $E : E \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $E' : E' \rightarrow \mathcal{B}$ , si  $E'$  a des  $\mathcal{B}$ -sommes (resp.  $E$  a des  $\mathcal{B}$ -produits)  $L$  y commute (resp.  $R$ ) (1.4).

Preuve : On doit montrer que si  $f : I \rightarrow J$  dans  $\mathcal{B}$ , la flèche canonique  $\sum_f \cdot L_I \rightarrow L_J \sum_f$  est un isomorphisme et que  $L_J$  commute aux flèches de coadjonction  $\varepsilon : \sum_f f^* \rightarrow \text{Id}$ .

Montrons que pour  $Y' \in |E'(I)|$ ,

$$L_J \sum_f Y' = \sum_f L_I Y'$$





On a successivement, pour  $X \in |E(J)|$

$$\begin{aligned}
 E(J)(L_J \sum_f Y', X) &= (\mathbb{B}\text{-adjonction}) E'(J) (\sum_f Y', R_J X) \\
 &= (\sum_f \dashv f^*) E'(I) (Y', f^* R_J X) \\
 &\approx (R \text{ cartésien}) E'(I) (Y', R_I f^* X) \\
 &= (\mathbb{B}\text{-adjonction}) E(I) (L_I Y', f^* X) \\
 &= (\sum_f \dashv f^*) E(J) (\sum_f L_I Y', X) .
 \end{aligned}$$

La fin de la démonstration est triviale.

5.7. - Définition. - Soit  $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$  une fibration, on dit que  $D$  a des conoyaux (resp. des noyaux), si et seulement si, pour tout  $I$ ,  $D(I)$  a des conoyaux (resp. noyaux) et si ces conoyaux (resp. noyaux) sont compatibles avec les changements de base.

5.8. - Théorème. - Si  $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$  est à  $\mathbb{B}$ -sommes et a des conoyaux, pour tout foncteur interne  $\mathcal{D} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$  ( $\underline{C}, \underline{C}' \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ ),  $D^{\mathcal{D}} : D^{C'} \rightarrow D^C$  a un  $\mathbb{B}$ -adjoint à gauche.

On dit que  $D$  est  $\mathbb{B}$ -complète à droite.

Preuve : On doit montrer que, pour tout  $I$ ,  $D_I^{\mathcal{D}} = D_I^{i^* \mathcal{D}} \circ I_I$  (2.7.5. remarque 3) a un adjoint à gauche  $\lim_{\mathcal{D}}^{\rightarrow} I_I$ , et que ces foncteurs commutent aux changements de base. La remarque initiale montre qu'on peut se borner à considérer la restriction de  $D^{\mathcal{D}}$  à la fibre au-dessus de  $1$ .

La construction de l'adjoint à gauche de  $D_I^{\mathcal{D}} = ( ) \circ \mathcal{D}$  étant fastidieuse, on se bornera à établir l'existence de cet adjoint (dans le cas général) puis à le construire (et à montrer la commutation aux changements de bases) dans le cas (le seul qui intervient dans la suite) où

$$\mathcal{D} : \underline{C} \rightarrow 1$$

$$(D^{\psi} = C^*).$$

- 1) On montre qu'avec les hypothèses du théorème la catégorie  $D_1^C = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C,D) = \bar{D}(C)$  est algébrique sur  $D(C_0)$ . Nous aurons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{D}(C') & \xrightarrow{\psi^* = (\ ) \circ \psi = D_1^{\psi}} & \bar{D}(C) \\
 \left. \begin{array}{c} \downarrow U' \\ \uparrow F' \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sum_{d_0} \psi_0} & \left. \begin{array}{c} \downarrow U \\ \uparrow F \end{array} \right\} \\
 D(C'_0) & \xrightarrow{\psi_0^*} & D(C_0)
 \end{array}$$

où  $(F,U)$  et  $(F',U')$  sont triplables et  $\sum_{d_0} \psi_0 \rightarrow \psi_0^*$ .  $\bar{D}(C')$  a des conoyaux.

On sait qu'alors  $\psi^* = D_1^{\psi}$  a un adjoint à gauche noté  $\lim_{\psi} I$ . Plus généralement, pour tout  $I$ , il existe  $\lim_{\psi} I \rightarrow D_I^{\psi}$ .

a)  $\bar{D}(C)$  est une catégorie d'algèbres sur  $D(C_0)$ , le triple  $\sum_{d_1} d_0^*$  a pour foncteur sous-jacent  $\sum_{d_1} d_0^*$ .

Un objet de  $\bar{D}(C) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C,D)$  est la donnée de  $\delta_0 \in |D(C_0)|$  et  $\bar{\lambda}_1 : d_0^* \delta_0 \rightarrow d_1^* \delta_0$ ,  $\bar{\lambda}_1 \in \text{Fl } D(C_1)$ , vérifiant les conditions de (2.5.2.).

Dans les conditions de l'hypothèse c'est donc un couple :

$$(\delta_0, \sum_{d_1} d_0^* \delta_0 \xrightarrow{\bar{\lambda}_1} \delta_0), \bar{\lambda}_1 \text{ étant une flèche au-dessus de } 1_{C_0}.$$

On définit la flèche  $n : |D(C_0)| \rightarrow \sum_{d_1} d_0^*$  de la façon suivante.

Avec les notations de (2.5),  $d_0 \varepsilon = d_1 \varepsilon = 1_{C_0}$

$$C_0 \xrightarrow{\varepsilon} C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} C_0$$

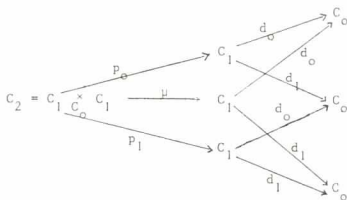
Donc,  $\delta_o = \varepsilon^* d_o^* \delta_o$ , on en tire une flèche

$$\sum_{\varepsilon} \delta_o \rightarrow d_o^* \delta_o, \text{ d'où } \sum_{d_1} \sum_{\varepsilon} \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

finalement  $\delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$  qui est la flèche  $\pi_{\delta_o}$  cherchée.

On construit la flèche  $\rho : \sum_{d_1} d_o^* \sum_{d_1} d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$ .

Les notations sont toujours celles de (2.5)



De  $d_o p_o = d_o \mu$ , on tire

$$p_o^* d_o^* \delta_o = \mu^* d_o^* \delta_o, \text{ d'où une flèche } \sum_{\mu} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow d_o^* \delta_o,$$

$$\text{et } \sum_{d_1} \sum_{\mu} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

Mais  $d_1 \mu = d_1 p_1$ . La flèche précédente est donc :  $\sum_{d_1} \sum_{p_1} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$ .

Appliquant enfin la condition de Chevalley :

$$\sum_{p_1} p_o^* = d_o^* \sum_{d_1},$$

on trouve la flèche

$$\rho_{\delta_o} : \sum_{d_1} d_o^* \sum_{d_1} d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

On vérifie que  $(\Gamma = \sum_{d_1} d_o^*, \eta, \rho)$  ainsi défini forme un triple dont les algèbres (diagrammes  $(*)$  et  $(**)$  de 2.5.2) sont les objets de  $\bar{D}(C)$ .

On a donc une paire d'adjoints triplable :

$$D^C(I) = \bar{D}(C) \begin{array}{c} \xleftarrow{F^\Gamma} \\ \xrightarrow{U^\Gamma} \end{array} D(C_o)$$

b) On en déduit, pour tout  $I$  (2.7.3.3) une paire d'adjoints triplable.

$$D^C(I) = D_I^{i^*} C(I_I) = \text{Cart}_B(I \times C, D) \begin{array}{c} \xleftarrow{F_I^\Gamma} \\ \xrightarrow{U_I^\Gamma} \end{array} D_I(i^* C_o) = D(I \times C_o) \\ = D_{C_o}^C(I)$$

(où on note  $D_{C_o}^C$  la fibration obtenue comme exponentielle à partir de  $\mathbb{B}(C_o) = \mathbb{B}/C_o \rightarrow \mathbb{B}$  et  $D$ ).

On a alors un  $\mathbb{B}$ -triple sur  $D_{C_o}^C$ .

Preuve : On montre que  $\sum_{d_1} d_o^*$  est compatible aux changements de bases, et que  $\eta$  et  $\rho$  sont des  $\mathbb{B}$ -transformations naturelles.

La compatibilité de  $\sum_{d_1} d_o^*$  aux changements de bases s'obtient à partir du diagramme ci-dessous en appliquant la condition de Chevalley

$$\begin{array}{ccc} D(C_I \times J) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sum_{d_1}} \\ \xrightarrow{d_o^*} \end{array} & D(C_o \times J) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ D(C_I \times I) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sum_{d_1}} \\ \xrightarrow{d_o^*} \end{array} & D(C_o \times I) \end{array}$$

$I \xrightarrow{f} J$

La fin de la preuve est triviale .

Il en résulte qu'il existe deux foncteurs cartésiens  $\mathcal{B}$ -adjoints (encore notés  $F^{\Gamma}$  et  $U^{\Gamma}$ ) dont les restrictions aux fibres au-dessus de  $I$  sont  $F_I^{\Gamma}$  et  $U_I^{\Gamma}$ .

c) On construit les conoyaux dans  $D^C(I) = \bar{D}(C)$  en utilisant le caractère universel des conoyaux dans les  $D(I)$ .

Soient  $\delta \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \gamma$  dans  $D^C(I)$

$F$  (resp.  $G$ ) est un couple  $(F_0, F_1)$   $F_0 : \delta_0 \rightarrow \gamma_0$ ,  $F_1 = d_0^* F_0$  (resp.  $(G_0, G_1 = d_0^* G_0)$ ), rendant commutatifs les carrés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & & K_1 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda_1''} K_0 \\ & \nearrow & \\ & \gamma_1 = d_0^* \gamma_0 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda_1'} \gamma_0 & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ G_1 = d_0^* G_0 \quad F_1 = d_0^* F_0 & & G_0 \quad F_0 \\ \delta_1 = d_0^* \delta_0 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda_1} \delta_0 & & \delta_0 \end{array}$$

$\lambda_1' G_1 = G_0 \lambda_1$   
 $\lambda_1' F_1 = F_0 \lambda_1$   
 $\theta_0 G_1 = G_0 \theta_0$   
 $\theta_0 F_1 = F_0 \theta_0$

$F_0, G_0$  au-dessus de  $1_{C_0}$   
 $F_1, G_1$  au-dessus de  $1_{C_1}$

$$C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} C_0$$

Les conoyaux étant universels,  $d_0^*(\text{Coker}_{D(C_0)}(F_0, G_0)) = \text{Coker}_{D(C_1)}(F_1, G_1)$

Comme  $\lambda_1' G_1 = G_0 \lambda_1$  et  $\lambda_1' F_1 = F_0 \lambda_1$ , il existe  $\lambda_1'' : K_1 \rightarrow K_0$  au-dessus de  $d_1$ .

On vérifie simplement que  $K_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_1''} \\ \xrightarrow{\theta_0} \end{array} K_0$  est un objet de  $\bar{D}(C)$  évidemment conoyau de  $F$  et  $G$ .

d) La fibration  $D^C$  a des conoyaux.

Il suffit de vérifier que les conoyaux des  $D^C(1) = D_I^{i^*} C(1_I)$  qu'on vient de construire sont compatibles aux changements de base, ce qui est évident d'après l'hypothèse.

- 2) Soit  $\psi : \underline{C} \rightarrow 1$ .

On montre que les  $\lim_{\psi, I}$  (notés ici  $\lim_{\underline{C}}^I$ ) définissent un foncteur cartésien  $\lim_{\underline{C}}$  qui sera ainsi  $\mathcal{B}$ -adjoint à gauche de  $D^{\psi}$  (noté ici  $C^*$ ).

On montre que les foncteurs  $\lim_{\underline{C}}^I$  commutent aux changements de base.

5.8.1.- Lemme.- Si  $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)| (= |D^C(1)|)$ ,  $\lim_{\underline{C}}^I F$  (noté  $\lim_{\underline{C}} F$ ) est dans  $D(1)$  un conoyau construit de la façon suivante.

$F$  est représenté par le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & F_0 \\ & \searrow_{\theta_0} & \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

$D$  étant à  $\mathcal{B}$ -sommes,  $\lambda_1$  et  $\theta_0$  correspondent dans  $D(C_0)$  :

$$\sum_{d_1} F_1 \longrightarrow F_0 \quad \text{et} \quad \sum_{d_0} F_1 \longrightarrow F_0 \quad \text{puis dans } D(1) :$$

$$\sum_{C_0} \sum_{d_1} F_1 = \sum_{C_0} \sum_{d_0} F_1 \xrightarrow[\theta_0]{\lambda_1} \sum_{C_0} F_0 .$$

$$\text{On a :} \quad \lim_{\underline{C}} F = \text{Coker}(\lambda_1, \theta_0) .$$

En effet, on a :  $D(1)(\lim_{\underline{C}} F, d) = D^C(1)(F, \underline{C}^* d)$ .

Or un morphisme de  $D^C(1)$ ,  $F \rightarrow \underline{C}^* d$  est un morphisme  $\alpha$  de  $D(C_0)$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & C_1^* d & \xrightarrow{\theta_1} C_0^* d \\
 & \nearrow^{d_0^* \alpha} & \nearrow^{\alpha} \\
 d_0^* F_0 = F_1 & \xrightarrow{\lambda_1} F_0 & \xrightarrow{\theta_0} C_0^* d \\
 & \xrightarrow{\theta_0} & \\
 & C_1 & \xrightarrow{d_1} C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

A la flèche  $F_1 \xrightarrow{\theta_0} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d$  correspond

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{d_0} F_1 & \xrightarrow{\alpha} F_0 & \xrightarrow{\alpha} C_0^* d \quad (D \text{ est une cofibration soit (adjonction } \square_{d_0} \rightarrow c_0^*)) : \\
 F_1 & \xrightarrow{d_0^* \alpha} d_0^* C_0^* d = C_1^* d .
 \end{array}$$

A la flèche  $F_1 \xrightarrow{\lambda_1} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d$  correspond

$$\sum_{d_1} F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d, \text{ soit : } F_1 \xrightarrow{d_0^* \alpha} d_0^* C_0^* d = d_1^* C_0^* d = C_1^* d .$$

Finalement ( $\tilde{\alpha} \alpha$  correspond  $\tilde{\alpha} : \sum_{C_0} F_0 \rightarrow d$ ), la commutativité du diagramme précédent équivaut à celle de :

$$\sum_{C_0} \sum_{d_1} F_1 \xrightarrow{\lambda_1} \sum_{C_0} \sum_{d_0} F_1 \xrightarrow{\theta_0} \sum_{C_0} F_0 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} d$$

D'où le résultat.

Conséquence. - Soit  $I \in |\mathbb{B}|$  ( $i : I \rightarrow 1$ ) et  $F \in |D^C(I)|$ .

On a :  $i^* F \in |D^C(I)|$  représenté par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 i^* F_1 & \xrightarrow{i^* \lambda_1} & i^* F_0 \\
 & \xrightarrow{i^* \theta_0} & \\
 I \times C_1 & \xrightarrow{I \times d_1} & I \times C_0 \\
 & \xrightarrow{I \times d_0} & \\
 & & \searrow \\
 & & I
 \end{array}$$

$\lim_{\underline{C}} (i^* F) \in |D(I)|$  est le conoyau dans  $D(I)$  de :

$$\sum_{I \times C_1} i^* F_1 \xrightarrow{i^* \lambda_1} \sum_{I \times C_0} i^* F_0$$

(où  $\sum_{I \times C_1}$  et  $\sum_{I \times C_0}$  correspondent aux flèches  $I \times C_1 \rightarrow I$  et  $I \times C_0 \rightarrow I$ ).

Fin de la preuve de 5.8. - Dans les conditions précédentes, on a :

$$\lim_{\underline{C}} (i^* F) = i^* (\lim_{\underline{C}} F)$$

(On utilise le fait que les  $D(I)$  ont des conoyaux universels et la condition de Chevalley appliquée au carré fibré ci-dessous).

$$\begin{array}{ccc} I \times C_1 & \xrightarrow{\text{Pr}_I} & C_1 \\ \text{Pr}_{C_1} \downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{\quad} & I \end{array}$$

Pour  $f : I \rightarrow J$  et  $F \in |D^{\underline{C}}(J)|$  on obtient alors aisément le résultat cherché :

$$\lim_{\underline{C}} f^* F = f^* (\lim_{\underline{C}} F) .$$

(Il suffit de remarquer que  $D^{\underline{C}}(J) = D^{\underline{C} \times J}(1)$  et que  $f$  définit un objet au-dessus de  $J$ .)

On a alors :  $\lim_{\underline{C}} f^* F = \lim_{\underline{C} \times J} f^* F$  et on est ramené au cas précédent).

Remarque. - Le théorème 5.8 montre en particulier, que si  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  a des  $\mathcal{B}$ -sommes et des conoyaux,  $\bar{D} : \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathcal{B}$  a des conoyaux et les foncteurs de changements de bases ont des adjoints à gauche.



Mais  $\bar{D}$  ne vérifie pas la condition de Chevalley et n'a donc pas de Cat  $\mathcal{B}$ -sommes.

5.8 bis - Théorème. - Si  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  est à  $\mathcal{B}$ -produits et a des noyaux, pour tout foncteur interne  $\mathcal{J} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ ,  $D^{\mathcal{J}} : D^{\underline{C}'} \rightarrow D^{\underline{C}}$  a un  $\mathcal{B}$ -adjoint à droite.

On dit que  $D$  est  $\mathcal{B}$ -complète à gauche.

5.9. - Corollaire. - Dans les conditions du théorème 4.8, le foncteur  $\lim_{\mathcal{J}} : D^{\underline{C}} \rightarrow D^{\underline{C}'}$  est cocartésien, (en particulier  $D^{\underline{C}}$  et  $D^{\underline{C}'}$  sont cofibrées).

Preuve :

a) On remarque d'abord que si  $D$  est  $\mathcal{B}$ -complète à droite  $D^{\underline{C}}$  et  $D^{\underline{C}'}$  sont cofibrées sur  $\mathcal{B}$ .

En effet, soit  $f : I \rightarrow J$  on définit  $\sum_f : D^{\underline{C}}(I) \rightarrow D^{\underline{C}}(J)$  comme suit :

$$D^{\underline{C}}(I) = \text{Cart}_{\mathcal{B}}(C \times I, D) = D^{C \times I}(1).$$

$$D^{\underline{C}}(J) = D^{C \times J}(1)$$

A  $f : I \rightarrow J$  correspond un morphisme  $\mathcal{J}_f : \underline{C} \times I \rightarrow \underline{C} \times J$  de Cat  $\mathcal{B}$ .

On pose  $\sum_f = \lim_{\mathcal{J}_f} 1$  (restriction de  $\lim_{\mathcal{J}_f}$  à la fibre au-dessus de 1).

On vérifie aisément que le foncteur de changement de base  $f^*$ , pour la fibration  $D^{\underline{C}}$ , se confond avec  $( ) \circ \mathcal{J}_f = D^{\mathcal{J}_f}$ . Il en résulte que  $\sum_f$  est une image directe et que  $D^{\underline{C}}$  est cofibrée.

b) On montre alors facilement que  $\lim_{\mathcal{J}}$  est cocartésien. Notant  $\lim_{\mathcal{J}_I}$  et  $\lim_{\mathcal{J}_J}$  les restrictions aux fibres  $D^{\underline{C}}(I)$  et  $D^{\underline{C}}(J)$ ,  $\gamma_I \in |D^{\underline{C}}(I)|$  et  $\delta_J^1 \in |D^{\underline{C}'}(J)|$ , on a successivement :

$$\begin{aligned}
(\lim_{\mathcal{J}} \sum_f \gamma_I, \delta_{\mathcal{J}}^!) &= (\sum_f \gamma_I, D_{\mathcal{J}}^{\beta}(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction)} \\
&= (\gamma_I, f^* D_{\mathcal{J}}^{\beta}(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction } \sum_f \dashv f^*) \\
&= (\gamma_I, D_I^{\beta} f^*(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && (D^{\beta} \text{ cartésien)} \\
&= (\lim_{\mathcal{I}} \gamma_I, f^*(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction)} \\
&= (\sum_f \lim_{\mathcal{I}} \gamma_I, \delta_{\mathcal{J}}^!) && \text{(adjonction } \sum_f \dashv f^*)
\end{aligned}$$

5.10.- Proposition.- Etant donné deux fibrations  $D, D'$ ,  $\mathcal{B}$ -complètes à droite,  $\mathcal{J} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$  un morphisme de  $\text{Cat } \mathcal{B}$ ,  $L : D \rightarrow D'$  un foncteur cartésien ayant un  $\mathcal{B}$ -adjoint à droite  $R$ ,  $L$  commute aux  $\mathcal{B}$ -limites inductives, c'est-à-dire :

- la flèche canonique :  $\lim_{\mathcal{J}} L^C \rightarrow L^C \lim_{\mathcal{J}}$  est un  $\mathcal{B}$ -isomorphisme,
- $L$  commute à la flèche  $\epsilon : \lim_{\mathcal{J}} D^{\mathcal{J}} \rightarrow \text{Id}$ .

$$\begin{array}{ccc}
D^{C'} & \xrightarrow{D^{\mathcal{J}}} & D^C \\
\uparrow & \xrightarrow{\lim_{\mathcal{J}}} & \uparrow \\
L^{C'} & \xrightarrow{R^{C'}} & L^C \\
\downarrow & \xrightarrow{D'^{\mathcal{J}}} & \downarrow \\
D^{C'} & \xrightarrow{\lim_{\mathcal{J}}} & D^C
\end{array}$$

Preuve : Il suffit de montrer que si  $L \dashv R$  est une  $\mathcal{B}$ -adjonction, pour tout  $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ ,  $L^C \dashv R^C$  est une  $\mathcal{B}$ -adjonction. On a, en effet  $R^C D^{\mathcal{J}} = D^{\mathcal{J}} R^{C'}$  (2.6 et 2.7.5).

On sait que pour toute fibration  $X : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$

$$\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, L) \dashv \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, R), (\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, D) \xrightarrow{\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, L)} \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, D')) .$$

Il suffit de faire  $X = C \times I : \mathbb{B}(\underline{C} \times I) \rightarrow \mathbb{B}$  pour en déduire :

$$L_I^C \rightarrow R_I^C$$

On applique alors 5.2 pour conclure.

5.10.- Exemples.- D'après 5.5, si  $\mathbb{B}$  a des conoyaux universels,  $B : \mathcal{F}\ell B \rightarrow \mathbb{B}$  est  $\mathbb{B}$ -complète à droite.

Le théorème 5.8 permet d'en déduire que

$$B^{C^{OP}} : (\underline{C}, c^*) \rightarrow \mathbb{B}$$

a des conoyaux universels. Comme cette fibration a des  $\mathbb{B}$ -sommes (5.5) elle est  $\mathbb{B}$ -complète à droite.

5.11.- Proposition.- Etant donné deux fibrations  $D, D'$ ,  $\mathbb{B}$ -complètes à gauche,  $\psi : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$  un morphisme de  $\text{Cat } \mathbb{B}$ ,  $R$  un foncteur cartésien ( $R : D \rightarrow D'$ ) ayant un  $\mathbb{B}$ -adjoint à gauche,  $R$  commute aux  $\mathbb{B}$ -limites projectives

Notation.- Nous adopterons dans la suite les notations utilisées dans ce chapitre. Si  $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ ,  $D$  une fibration sur  $\mathbb{B}$ ,  $\bar{D}$  la fibration sur  $\text{Cat } \mathbb{B}$  correspondante,  $C^* : D \rightarrow D^C$  le foncteur cartésien "foncteur constant" et  $\underline{C}^* : D(1) \rightarrow D^C(1) = \bar{D}(\underline{C})$  sa restriction à la fibre au-dessus de 1, (4.3), on notera  $\underline{\lim}_C$  (resp.  $\underline{\lim}$ ) le  $\mathbb{B}$ -adjoint à gauche (resp. à droite) éventuel de  $C^*$  et  $\underline{\lim}_C$  (resp.  $\underline{\lim}$ ) sa restriction à la fibre au-dessus de 1 :  $\underline{\lim}_C = \underline{\lim}_C|_1$ ,  $\underline{\lim} = \underline{\lim}|_1$ .

De même, si  $\psi : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$  nous noterons  $\underline{\lim}_\psi$  (resp.  $\underline{\lim}_\psi$ ) l'adjoint à gauche (resp. à droite) de  $\psi^* = (\ ) \circ \psi : \bar{D}(\underline{C}') \rightarrow \bar{D}(\underline{C})$