

CHAPITRE VI

THEOREME DE KAN

Etant donné une petite catégorie \mathbb{C} , $Y : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ le foncteur de Yoneda, \mathbb{D} une catégorie localement petite ($\forall X \forall Y \text{ Hom}_{\mathbb{D}}(X, Y) \in |\text{Ens}|$) et complète à droite, on sait qu'il existe une équivalence entre la catégorie des foncteurs de \mathbb{C} dans \mathbb{D} et la catégorie des foncteurs $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{D}$ qui commutent aux limites inductives. De plus, ces derniers foncteurs ont un adjoint à droite. On sait que le foncteur de $\hat{\mathbb{C}}$ dans \mathbb{D} correspondant à $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ est son extension de Kan par Y (théorème de Kan).

On veut traduire ce résultat dans notre \mathbb{B} -contexte. Pour cela :

1) étant donné C une petite \mathbb{B} -fibration, D une fibration \mathbb{B} -complète à droite et $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ nous construirons $L_g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}^{C^{\text{op}}}, D)|$ extension de Kan par le foncteur de Yoneda de g .

2) nous établirons que si D est localement petite, L_g a un \mathbb{B} -adjoint à droite.

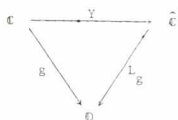
3) nous établirons une \mathbb{B} -équivalence analogue à l'équivalence citée plus haut.

6.1.- \mathbb{B} -Extension de Kan de $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ par le foncteur de Yoneda.

Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$, on sait que si g est un foncteur de \mathbb{C} (petite catégorie) dans \mathbb{D} , complète à droite l'extension de Kan (à gauche) de g par $Y : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est un foncteur $L_g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{D}$ défini par :

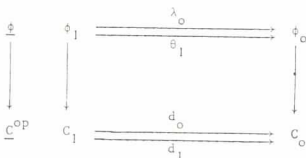
$$\forall \phi \in |\hat{\mathbb{C}}| \quad L_g(\phi) = \lim_{(Y, \phi)} g \circ P$$

où (Y, ψ) est la "catégorie comma" et $P : (Y, \psi) \rightarrow \mathbb{C}$ la foncteur de projection. (Y, ψ) est appelée catégorie de représentation de ψ



6.1.1.- Catégorie de représentation de $\psi \in |\hat{\mathbb{C}}|$ (B quelconque).

On sait (2.5.2.) qu'un préfaisceau ψ peut se représenter par le diagramme ci-dessous



où $\underline{\mathbb{C}}$ est une catégorie dans \mathbb{B} (de flèche source θ_1 , de flèche but λ_0), au-dessus de $\underline{\mathbb{C}}^{op}$.

On note $P : \underline{\mathbb{C}}^{op} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ le foncteur interne obtenu à partir du diagramme précédent en dualisant $\underline{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbb{C}}^{op}$.

Pour $B = \text{Ens}$ un objet de $\underline{\mathbb{C}}^{op}$ au-dessus de $c \in C_0$ est un $x \in \psi(c)$, c'est-à-dire une transformation naturelle encore notée $x : Yc = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, c) \rightarrow \psi$, (un objet de (Y, ψ)).

Une flèche de $\underline{\mathbb{C}}^{op}$ de $x(\in \psi(c))$ dans $x'(\in \psi(c'))$ est une flèche $f : c \rightarrow c'$ telle que $\psi(f)x' = x$, c'est-à-dire rendant le diagramme

ci-dessous commutatif. Il s'agit donc d'une flèche de (Y, ψ) .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, c) = Yc & & \\
 \downarrow & \searrow x & \\
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, f) = Yf & & \psi \\
 \downarrow & \nearrow x' & \\
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, c') = Yc' & &
 \end{array}$$

Finalement $\underline{C}^{\text{OP}}$ est la catégorie de représentation de ψ et $P : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ est le foncteur de projection précédent.

On en déduit la définition suivante (B quelconque).

6.1.2.- Définition.

Soit $g \in |\text{Cart}_B(C, D)|$, C étant une petite fibration. On appelle B -extension de Kan par Yoneda de g , le foncteur cartésien $L_g \in |\text{Cart}_B(B^{\text{COP}}, D)|$ défini de la façon suivante :

- sa fibre au-dessus de 1 , $L_g 1$ est telle que pour $\psi \in |\hat{C}| (= B^{\text{COP}}(1))$

$$L_g 1(\psi) = \varinjlim_{\underline{C}^{\text{OP}}} (g) \circ P$$

où $\underline{C}^{\text{OP}}$ est la catégorie de représentation, $P : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ le foncteur interne définis ci-dessus, $(g) \circ P \in |\text{Cart}_B(\psi^{\text{OP}}, D)|$ le foncteur cartésien obtenu par composition (2.6.1.) et (§ 5), $\varinjlim_{\underline{C}^{\text{OP}}} : \text{Cart}_B(\psi^{\text{OP}}, D) \rightarrow D(1)$ le foncteur défini en (§ 5).

- sa fibre au-dessus de I est définie en utilisant (2.7.3.) et (2.7.5.) remarques).

$$\text{Soit } \psi_I \in |\hat{C}/c^* I| (= B^{\text{COP}}(I) = B_1^{(i^* C)^{\text{OP}}}(1_I)) \quad (2.8.)$$

$(B_I : F\tilde{L} B/I \rightarrow \mathbb{B}/I$ obtenue à partir de B par produit fibré par Y_I est la fibration But sur \mathbb{B}/I).

$\tilde{\vartheta}_I$ est déterminé par $P_I : \phi_I^{OP} \rightarrow i^*C$ (foncteur \mathbb{B}/I -cartésien). A g correspond i^*g par produit fibré par Y_I (2.7.5. remarque).

On a alors

$$L_g I(\tilde{\vartheta}_I) = \lim_{\phi_I^{OP}} (i^*g) \circ P_I .$$

(Tous les foncteurs cartésiens et fibrations intervenant ici, sont sur \mathbb{B}/I ; il est clair que si \mathbb{D} a des \mathbb{B} - \lim , D_I a des \mathbb{B}/I - \lim).

On a ainsi défini :

$$L_g I : B^{C^{OP}}(I) = \hat{C}/c^* I \rightarrow D(I).$$

Remarque. - g est un objet de $\bar{D}(C)$ (4.1.) et $(g) \circ P = P^*(g)$, (où P^* est le changement de bases associé à P dans la fibration \bar{D}).

De même $i^*g \in |\bar{D}_I(i^*C)|$ et $(i^*g) \circ P_I = P_I^*(i^*g)$.

$$\begin{array}{ccc} P_I^*(i^*C) & \longrightarrow & i^*C \\ & & \underline{C} \\ \phi_I^{OP} & \xrightarrow{P_I} & i^*C \\ & & \underline{C} \end{array}$$

6.1.3.- Proposition. - Les $L_g I$ engendrent un foncteur cartésien

$$L_g : B^{C^{OP}} \rightarrow D.$$

On vérifie qu'ils commutent aux changements de bases.

Nous utiliserons le caractère cartésien des foncteurs \lim_C (5.8.).

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g \in |\overline{D}(C)|$.

On vérifie que pour tout $\psi_J \in |\widehat{C}/c^*J|$ (ψ_J défini par $\underline{\xi}_J^{\text{op}} \xrightarrow{p_J} j^*C$) on a

$$f^*(L_g J(\psi_J)) = L_g I(\widehat{C}/c^*f(\psi_J)).$$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C}/c^*J & \xrightarrow{L_g J} & D(J) \\ \downarrow \widehat{C}/c^*f = f^* & & \downarrow f^* \\ \widehat{C}/c^*I & \xrightarrow{L_g I} & D(I) \end{array}$$

On considère le diagramme ci-dessous, dans $\text{Cat } \mathcal{B}$, commutatif, où les deux carrés sont des produits fibrés.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\xi}_I^{\text{op}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\xi}_J^{\text{op}} & & \\ \downarrow p_I & \text{p.f.} & \downarrow p_J & & \underline{G} \\ I \times \underline{C} & \xrightarrow{f \times \underline{C}} & J \times \underline{C} & \xrightarrow{p_J} & \underline{C} \\ \downarrow i^* \underline{C} & \text{p.f.} & \downarrow j^* \underline{C} & & \\ I & \xrightarrow{f} & J & & \end{array}$$

Avec les notations de ce diagramme :

$$j^*g = p_J^*g, \quad i^*g = p_I^*g.$$

On forme : $L_g J(\psi_J) = \lim_{\underline{\xi}_J^{\text{op}}} (p_J^* p_J^* g) \quad (g \in |D(J)|)$

$\lim_{\substack{\phi_J \\ \phi_J^{op}} : D_J^{\phi_J^{op}} \rightarrow D$ commute aux changements de bases

$$\begin{aligned} f^*(L_g J(\phi_J)) &= f^* \lim_{\substack{\phi_J \\ \phi_J^{op}}} (P_J^* P_J^* g) = \lim_{\substack{\phi_J \\ \phi_J^{op}}} f^*(P_I^*(f \times \mathcal{C})^* P_J^* g) \\ &= \lim_{\substack{\phi_I \\ \phi_I^{op}}} P_I^* P_I^* g. \end{aligned}$$

Finalement $f^*(L_g J(\phi_J)) = (L_g I(f^* \psi_J))$.

Conclusion.-

On a donc construit, pour $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ l'extension de Kan, $L_g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}^{C^{op}}, D)|$, D étant une \mathbb{B} -fibration \mathbb{B} -complète à droite.

6.1.4.- Autre formulation dans le cas où $D = \mathbb{B}$.

Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$, on considère g foncteur de \mathcal{C} dans Ens (\mathcal{C} petite catégorie) comme un distributeur ($[3]$) $g : \mathcal{C} \Rightarrow 1$. On sait que si \circ désigne la composition des distributeurs, $g \circ ()$ est un foncteur de $\text{Dist}(1, \mathcal{C}) = \widehat{\mathcal{C}}$ dans $\text{Dist}(1, 1) = \text{Ens}$ qui représente l'extension de Kan de g par le foncteur de Yoneda.

\mathbb{B} est une catégorie à lim finies et à conoyaux universels. On peut introduire la bicatégorie $\text{Dist}_{\mathbb{B}}$ des distributeurs internes à \mathbb{B} ($[3]$) (la composition des \mathbb{B} -distributeurs est notée $\circ_{\mathbb{B}}$).

Soit $g \in \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, \mathbb{B})$ ($C \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$).

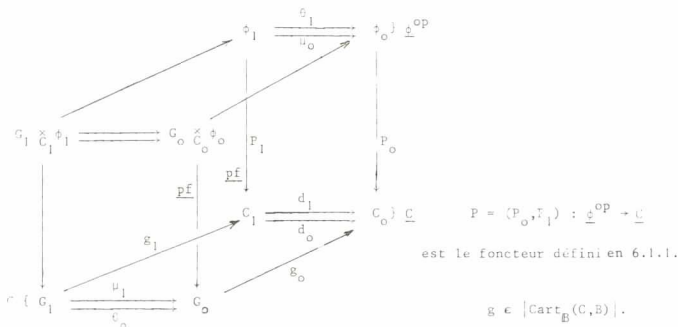
g est un "préfaisceau interne" de \underline{C} dans \mathbb{B} (2.5.) et peut être considéré comme un \mathbb{B} -distributeur : $\underline{C} \Rightarrow 1$, $g \circ_{\mathbb{B}} (-)$ est alors un foncteur de $\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, \underline{C}) = \widehat{\underline{C}}$ dans $\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, 1) = \mathbb{B}$

$$g \circ_{\mathbb{B}} (-) : \widehat{\underline{C}} \rightarrow \mathbb{B}.$$

Lemme. - Si $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B)| (= |\text{Dist}_{\mathbb{B}}(\underline{C}, 1)|)$ et $\psi \in |\hat{C}| (= |\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, \underline{C})|)$, on a :

$$g \circ_{\mathbb{B}} \psi = L. I(\psi).$$

On montre que $g \circ_{\mathbb{B}} \psi = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \underline{\psi}^{\text{op}}}} (g) \circ P$



Preuve : En effet, si $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B)|$ est déterminé par le couple (g_0, λ_1) et $\psi \in |\hat{C}|$ par le couple (P_0, μ_0) on sait que :

$$g \circ_{\mathbb{B}} \psi = \text{Coker}(G_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \psi_0 \xrightarrow[G_0 \times_{C_0} \mu_0]{\lambda_1 \times_{C_0} \psi_0} G_0 \times_{C_0} \psi_0).$$

On remarque que les deux flèches ci-dessus sont les flèches source et but de la catégorie $\underline{G} \times_{\underline{C}} \varphi^{\text{op}}$ (produit fibré dans $\text{Cat } \mathbb{B}$). Le carré supérieur du diagramme ci-dessus définit (2.6.2.)

$$(g) \circ P \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\varphi^{\text{op}}, B)|.$$

Le conoyau précédent est alors

$$\lim_{\substack{\text{op} \\ \downarrow}} (g) \circ P \quad (5.8.1.)$$

6.2.- Théorème.- Si D , \mathcal{B} -complète à droite, est de plus, localement petite, L_g a un \mathcal{B} -adjoint à droite.

On doit utiliser le dual de la proposition 5.2. Il faut donc remplacer fibration par cofibration, cartésien par cocartésien.

D'après 5.10., \mathcal{B} étant \mathcal{B} -complète à droite, \mathcal{B}^{COP} est cofibrée. Il en est évidemment de même pour D .

6.2.1.- Lemme.- L_g est cocartésien.

Soit $\psi_I \in |\widehat{C}/c^*I|$ auquel est associé $P_I : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C} \times I$ (6.1.3.) et $g \in |\overline{D}(C)|$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{C}^{\text{OP}} & & & & \underline{C} \\
 \downarrow P_I & & & & \\
 \underline{C} \times I & \xrightarrow{\underline{C} \times f} & \underline{C} \times J & \xrightarrow{P_J} & \underline{C} \\
 \downarrow P_C & & \downarrow P_I & \searrow P_I & \\
 I & \xrightarrow{f} & J & &
 \end{array}$$

On doit montrer que : $\sum_f (L_g I(\psi_I)) = L_g J(\sum_f \psi_I)$.

On a successivement :

$$\sum_f (L_g I(\psi_I)) = \sum_f \lim_{\substack{\text{op} \\ \downarrow}} (P_I^* P_I^* g).$$

Mais, notant $\psi = P_C \cdot P_I : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow I$ dans $\text{Cat } \mathcal{B}$

$$\text{on a : } \varinjlim_{\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} = \varinjlim_{\Psi} 1$$

$$\left(\varinjlim_{\Psi} : \bar{D}(\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}) \rightarrow \bar{D}(I) = D(I) \text{ et } \varinjlim_{\Psi} : D^{\phi_I^{\text{op}}} \rightarrow D_I \text{ (5.11.)} \right)$$

$$\varinjlim_f = \varinjlim_f 1$$

($\varinjlim_f : D(I) \rightarrow D(J)$, $f : I \rightarrow J$ considéré comme morphisme de $\text{Cat } \mathcal{B}$).

$$\text{Finalement : } \varinjlim_f \varinjlim_{\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} = \varinjlim_{f.\Psi} 1$$

soit en introduisant $\varinjlim_f : \widehat{C}/c^*I \rightarrow \widehat{C}/c^*J$ (composition par c^*f) et

$$\text{notant } \varinjlim_{\varinjlim_f \underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} : \bar{D}(\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}) \rightarrow \bar{D}(J) \text{ le foncteur associé à } \varinjlim_f \psi_I :$$

$$\varinjlim_f \varinjlim_{\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} = \varinjlim_{\varinjlim_f \underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} .$$

$$\text{D'où : } \varinjlim_f \varinjlim_{\underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} (P_I^* P_I^* g) = \varinjlim_{\varinjlim_f \underline{\mathcal{C}}_I^{\text{op}}} (P_I^* P_I^* g)$$

$$\text{et : } \varinjlim_f L_g I(\psi_I) = L_g J(\varinjlim_f \psi_I) .$$

Preuve du théorème.-

a) On montre que pour tout I , $L_g I$ a un adjoint à droite $R_g I$.
D'après (2.7.3.) et (6.1.2.) on peut se borner à la restriction $L_g I$ aux fibres au-dessus de 1 .

Soit $\psi \in |\widehat{C}|$ (ψ s'écrit $P : \underline{\mathcal{C}}^{\text{op}} \rightarrow \underline{C}$ dans $\text{Cat } \mathcal{B}$),
 $\delta \in |D(I)|$ et $g \in |\bar{D}(\underline{C})|$.

On a :

$$D(1)(L_g 1(\psi), \delta) = D(1)(\varinjlim_{\underline{C}^{OP}} P^*(g), \delta) = D(1)(\varinjlim_{\underline{C}} \varinjlim_{\underline{P}} P^*(g), \delta)$$

$$P^*(g) \xrightarrow{f^*(C)} g \quad (\text{où } \varinjlim_{\underline{P}} : \bar{D}(\underline{C}^{OP}) \rightarrow \bar{D}(\underline{C})) \quad (5.11.)$$

$$\underline{C}^{OP} \xrightarrow{P} \underline{C}$$

$$= (\text{adjonction } \varinjlim_{\underline{C}} \dashv \underline{C}^*) \bar{D}(\underline{C})(\varinjlim_{\underline{P}} P^*g, \underline{C}^*(\delta))$$

$$= (\text{adjonction } \varinjlim_{\underline{P}} \dashv \underline{P}^*) \bar{D}(\underline{C}^{OP})(\underline{P}^*g, \underline{P}^*\underline{C}^*(\delta)).$$

Le cas particulier du théorème 4.4. montre qu'il existe

$$\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta)) \in |\text{Cat } \mathcal{B}/\underline{C}|$$

qui est un objet de \hat{C} et qui vérifie :

$$D(1)(L_g 1(\psi), \delta) = \hat{C}(\psi, \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta))).$$

L_g a donc un adjoint à droite R_g défini sur les objets par

$$R_g(\delta) = \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta)).$$

b) Il faut montrer que les R_g commutent aux changements de bases.

$$\text{On a (2.7.3.) } R_g I = \underline{\text{Hom}}_{\underline{I}}(i_g^*, \underline{C}^*(\delta)).$$

Montrons que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} D_J & \xrightarrow{f^*} & D_I & f : I \rightarrow J \\ \downarrow R_g J & & \downarrow R_g I & \\ \hat{C}/c^* J & \xrightarrow{\hat{f}^* = \hat{C}/c^* f} & \hat{C}/c^* I & \end{array}$$

$$R_1.f^* = \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (i^* g, \underline{C}^* f^* ())$$

$$f^* . R_1.J = f^* . \underline{\text{Hom}}_{j^* \underline{C}} (j^* g, \underline{C}^* ()) .$$

D'après 3.3. :

$$\begin{aligned} f^* \underline{\text{Hom}}_{j^* \underline{C}} (j^* g, \underline{C}^* ()) &= \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (f^* j^* g, f^* \underline{C}^* ()) \\ &= \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (i^* g, f^* \underline{C}^* ()) . \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \underline{C}^* f^* = f^* \underline{C}^* : D_J = \bar{D}(J) \rightarrow \bar{D}(I \times C) = \bar{D}_I(i^* C) \quad (2.7.3 \text{ et } \S 4).$$

D'où le résultat.

Remarque. - D'après 5.10., le foncteur cartésien $L_g : B^{C^{op}} \rightarrow D$ commute aux B -limites inductives.

6.3.- Théorème. (Première forme du théorème de Kan).

Soit B une catégorie à $\underline{\lim}$ finies et à conoyaux universels.
 D une fibration de base B , B -complète à droite et B -localement petite. Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } B|$.

Il y a une équivalence de catégories entre $\text{Cart}_B(C, D) = \bar{D}(\underline{C})$ et la sous-catégorie pleine de $\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)$ dont les objets sont les foncteurs cartésiens qui commutent aux B -limites inductives. Ces foncteurs ont des B -adjoints à droite.

On montre l'équivalence sur les objets.

Soit $g \in |\bar{D}(\underline{C})|$; d'après 6.1. et 6.2., on peut construire $L_g \in |\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)|$ qui a un B -adjoint à droite donc commute aux B -limites inductives.

Inversement, si $F \in |\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)|$, on introduit (2.9.) le

foncteur de Yoneda $Y \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B^{C^{OP}})|$ et le composé
 $\text{Fo}(Y) \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)| = |\overline{D}(\underline{C})|$.

Il suffit donc, pour établir le théorème de montrer que :

1) Si F commute aux \mathbb{B} -limites inductives

$$L_{\text{Fo}(Y)} \cong F \quad (\mathbb{B}\text{-isomorphisme}).$$

2) $L_{\text{go}(Y)} = g$ (\mathbb{B} -isomorphisme).

1) Si F commute aux \mathbb{B} -limites inductives $L_{\text{Fo}(Y)} = F$.

a) Si ϕ est un distributeur interne à \mathbb{B} de \underline{A} dans \underline{C} (on notera $\phi : \underline{A} \Rightarrow \underline{C}(\mathbb{B})$), on sait que ϕ est un bifoncteur interne $\underline{A} \times \underline{C}^{OP} \rightarrow \mathbb{B}$ et peut donc s'écrire dans $\text{Cat } \mathbb{B}$.

$$\phi \longrightarrow \underline{A} \times \underline{C}^{OP}$$

On lui associe de façon évidente un diagramme de $\text{Cat } \mathbb{B}$

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 & \xRightarrow{\quad} & \phi_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}^{OP} \times A_1 & \xRightarrow[\underline{C}^{OP} \times d_0]{\underline{C}^{OP} \times d_1} & \underline{C}^{OP} \times A_0 \end{array}$$

$$\text{où } \underline{A} = A_1 \xRightarrow[d_0]{d_1} A_0.$$

Ce diagramme définit un préfaisceau interne, dans \hat{C} , (\hat{C} a des $\underline{\lim}$ finies) de $c^*(A)$ dans \hat{C} , (où c^* (2.8.2.) étant exact à gauche est prolongé en un foncteur : $\text{Cat } \mathbb{B} \rightarrow \text{Cat } \hat{C}$).

Ce dernier préfaisceau peut être considéré comme un distributeur interne à \hat{C} , $\bar{\phi} : c^*(A) \Rightarrow 1(\hat{C})$. (D'après 5.10., \hat{C} a outre des $\underline{\lim}$ finies, des conoyaux universels, on peut donc parler de la bicatégorie $\text{Dist}(\hat{C})$).

Le foncteur de Yoneda n'est autre que $\bar{Y}_C : c^* C \Rightarrow 1(\hat{C})$ où $\bar{Y}_C : \underline{C} \Rightarrow \underline{C}$ (B) est le distributeur identique (remarque 2.9.).

Lemme. - Si $\phi : \underline{A} \Rightarrow \underline{C}$ (B), $\bar{\phi}$ est le composé dans $\text{Dist}(\hat{C})$

$$c^* \underline{A} \xrightarrow{c^* \phi} c^* \underline{C} \xrightarrow{Y} 1, \text{ noté } Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \phi.$$

(c^* associe à un distributeur dans B, un distributeur dans \hat{C}).

La vérification ne présente pas de difficultés mais est fastidieuse. On est amené à construire des produits fibrés dans \hat{C} , donc des produits fibrés dans Cat B au-dessus de $\underline{C}^{\text{OP}}$ (un objet de \hat{C} est de la forme $\underline{y} + \underline{C}^{\text{OP}}$) puis un conoyau dans \hat{C} ; pour cela on applique la construction faite en (5.8.1.) et on se ramène aux conoyaux dans B.

En particulier, si $\psi \in |\hat{C}|$ ($\psi : 1 \Rightarrow \underline{C}$ (B))

$$Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi = \bar{\psi}.$$

Mais $\bar{\psi} : c^* 1 = 1 \Rightarrow 1(\hat{C})$ est l'objet $\psi \in |\hat{C}|$.

On a donc :

$$\underline{Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi} = \psi.$$

b) Pour $\psi \in |\hat{C}|$ et $F \in |\text{Cart}_B(B^{\text{COP}}, D)|$ commutant aux B-limites inductives :

$$F_1(\psi) = F_1(Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi) = L_{\text{Fo}(Y)}^1(\psi).$$

Preuve :

Soit ψ ($P : \underline{c}^{\text{OP}} + \underline{C}$ dans Cat B) un objet de \hat{C} .

On note dans $\text{Cat } \hat{C}$, $Y : \underline{c}^{\text{OP}} + c^* \underline{C}$ le foncteur de Yoneda ($Y \in |\text{Cart}_B(C, B^{\text{COP}})| (= B^{\text{COP}}(\underline{C}))$ (2.9.) et (4.1.)).

Le composé $Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi$ se construit comme en 6.1.4. en remplaçant \mathcal{B} par \hat{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{H} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\Gamma} \\
 \zeta \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow Y \\
 c^* \underset{\hat{\phi}}{\text{OP}} & \xrightarrow{c^* P} & c^* \underline{C} \\
 \hat{\phi}^{\text{OP}} \xrightarrow{P} & & \underline{C}
 \end{array}$$

$$\text{On a : } Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} \zeta \text{ avec } \zeta = P^* Y$$

($\zeta \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}, B^{\text{COP}})| (= B^{\text{COP}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}))$ (2.5.2.), $\hat{\phi}^{\text{OP}} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ et

$$\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} : B^{\text{COP}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}) \longrightarrow B^{\text{COP}}(1) = \hat{C}, \quad (\S 4).$$

Finalement :

$$F_1(\psi) = F_1(Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi) = F_1(\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} P^* Y).$$

F commutant aux \mathcal{B} -limites inductives

$$F_1(\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} P^* Y) = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} F_1^{\hat{\phi}^{\text{OP}}}(P^* Y) \quad (5.10.) = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}}(F \circ (P^* Y))$$

(où $F \circ (P^* Y)$ est le composé de $P^* Y \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}, B^{\text{COP}})|$ et $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(B^{\text{COP}}, D)|$ (2.6.3.)).

Ainsi, (4.2.) :

$$F_1 \left(\lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* Y \right) = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} \bar{F}(P^* Y).$$

\bar{F} étant cartésien au-dessus de $\text{Cat } \mathcal{B}$ de $\overline{B^{\mathcal{C} \text{ op}}}$ dans \bar{D}

$$\bar{F}(P^* Y) = P^* [\bar{F}(Y)].$$

Soit :

$$F_1(\emptyset) = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* [\bar{F}(Y)] = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* [F_0(Y)] = L_{F_0(Y)}(\emptyset).$$

On a ainsi montré - sur les objets -

$$F_1 = L_{F_0(Y)}.$$

c) Pour tout $I \in |\mathcal{B}|$, on montre que :

$$F_I = L_{F_0(Y)} I.$$

Etant donné $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{C} \text{ op}}, D)|$ le produit fibré par

$Y_I : \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}$ donne un foncteur cartésien (noté $i^* F$)

$i^* F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}/I}(B_I^{\mathcal{C} \text{ op}}, D_I)| = |\text{Cart}_{\mathcal{B}/I}(B_I^{(i^* \mathcal{C}) \text{ op}}, D_I)|$, dont la restriction à la fibre au-dessus de 1_I est la restriction à la fibre au-dessus de I de F , (2.7.5., remarque 3) :

$$i^* F|_{1_I} = F_I.$$

Par ailleurs (6.1.2.) montre que pour $g \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)|$

$$L_{\mathcal{B}} I = L_{i^* g} I.$$

L_{i^*g} est la \mathbb{B}/I -extension de Kan par Yoneda de :

$$i^*g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, D_I)|.$$

Ainsi :

$$L_{\text{Fo}(Y)}^I = L_{i^*[\text{Fo}(Y)]}^I.$$

Mais $i^*[\text{Fo}(Y)] = F_I \circ (i^*Y)$ (où i^*F est le foncteur \mathbb{B}/I -cartésien défini ci-dessus, et où i^*Y est le \mathbb{B}/I -foncteur de Yoneda :

$$i^*Y \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, B_I^{C^{OP}})| = |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, B_I^{(i^*C)^{OP}})|.$$

Finalement $L_{\text{Fo}(Y)}^I = L_{i^*F \circ i^*Y}^I$.

Si $F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(B_I^{C^{OP}}, D)|$ commute aux \mathbb{B} -limites inductives, les définitions de $i^*F, B_I^{C^{OP}}, D_I$ montrent que $i^*F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(B_I^{C^{OP}}, D_I)|$ commute aux \mathbb{B}/I limites inductives.

Il suffit alors d'appliquer (b) aux fibrations sur \mathbb{B}/I pour avoir le résultat.

2) Il existe un \mathbb{B} -isomorphisme $L_g \circ (Y) = g$.

Définition. - $C \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ a un objet final x , ssi pour tout $I \in |\mathbb{B}|$, $C(I)$ a un objet final x_I , et si ces objets commutent aux changements de base.

$$\text{Pour } f : I \rightarrow J, f^*x_J = x_I.$$

On note $x = x_1$. On a alors $x_I = i^*x$ ($i = I + 1$).

Proposition. - Soit $g \in |\overline{D}(C)| = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$. Si \underline{C} a un objet final x , $\varinjlim_{\underline{C}} g = g_1(x)$.

Preuve : Si $d \in |D|$ un morphisme $\varinjlim_{\underline{C}} g \rightarrow d$ dans D correspond à un morphisme $g \rightarrow \underline{C}^* d$ de $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$.

C'est-à-dire pour tout $I \in |\mathbb{B}|$ à un morphisme

$$g_I \rightarrow C(I)^* i^* d$$

dans $\text{Fonct}(C(I), D_I)$.

En particulier, on considère le morphisme

$$g_I \rightarrow C(I)^* d$$

auquel correspond :

$$\varinjlim_{C(I)} g_I \rightarrow d$$

c'est-à-dire puisque x est objet final de $C(I)$

$$g_I(x) \rightarrow d.$$

Inversement.

Partant de $g_I(x) \rightarrow d$, on en déduit une famille de morphismes, stable par changements de bases :

$$\forall I \quad g_I(x_I) \rightarrow i^* d$$

(g est cartésien et $x_I = i^* x$).

x_I étant final dans $C(I)$

$$g_I(x_I) = \varinjlim_{C(I)} g_I$$

D'où la famille de morphismes

$$g_I \rightarrow C(I) \overset{*}{i} \overset{*}{d}$$

$$\text{et } g \rightarrow \underline{C} \overset{*}{d}$$

$$\text{soit } \varinjlim_{\underline{C}} g \rightarrow d.$$

Lemme. - Soit $x \in |C(I)|$ ($x : I \rightarrow C_0$).

On construit, à l'aide du foncteur de Yoneda (2.9.) $Y_1(x)$.

$$\text{On a : } Y_1(x) \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C^{\text{OP}}, \mathbb{B})| (= |\mathbb{B}^{C^{\text{OP}}}(I)|)$$

$Y_1(x)$ peut s'écrire $\underline{\phi}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ dans $\text{Cat } \mathbb{B}$, ($\underline{\phi}^{\text{OP}}$ catégorie de représentation de $Y_1(x)$). $\underline{\phi}^{\text{OP}}$ a un objet final.

Preuve : $P : \underline{\phi}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ est donné par le diagramme suivant, (détermination de Y_0 , (2.9.)) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow[\mu]{P_1} & C_1 \\
 & \nearrow \phi_1^{\text{OP}} & \downarrow (p_0, d_1, p_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 & & \phi_0^{\text{OP}} & & \\
 & \downarrow P_1 & & & \downarrow P_0 \\
 & & C_1 \times C_0 & \xrightarrow[\downarrow p_0]{d_1 \times C_0, d_0 \times C_0} & C_0 \times C_0 \\
 & \nearrow (C_1, x) & \downarrow d_1 & & \nearrow (C_0, x) \\
 C_1 & & C_0 & &
 \end{array}$$

On vérifie immédiatement que le couple

$$I \xrightarrow{x} C_0 \quad I \xrightarrow{\varepsilon x} C_1 \quad (\text{où } \varepsilon : C_0 \rightarrow C_1 \text{ est la}$$

flèche unité) se factorise par ϕ_0^{OP} .

On note x' cet objet de $\phi_0^{\text{OP}}(I)$. On a $F(x') = x$.
La construction ci-dessus montre qu'il s'agit d'un objet final.

Fin de la preuve de 2).

. On montre que pour $x : I \rightarrow C_0$

$$L_g I(Y(x)) = g_1(x).$$

$$\text{On a : } L_g I(Y(x)) = \lim_{\phi^{\text{OP}}} P^* g.$$

Mais x' est final dans ϕ^{OP} , donc :

$$L_g I(Y(x)) = \lim_{\phi^{\text{OP}}} P^* g = (P^* g)_1(x') = [(g) \circ P](x') = g(x)$$

. Pour $x \in |C(I)|$ ($x : I \rightarrow C_0$), x s'écrit
 $i_1 \rightarrow i^* C_0$, ($x \in |i^* C(I_1)|$).

On tire de l'étude précédente $L_g I(Y_1(x)) = g_1(x)$.

On a établi (sur les objets) l'isomorphisme

$$L_g \circ (Y) = g$$

pour lequel seule l'hypothèse, D \mathcal{B} -complète à droite est nécessaire.

6.4.- Théorème. (Forme définitive du théorème de Kan.)

Sous les hypothèses de 6.3., il y a une \mathcal{B} -équivalence entre D^C
et une \mathcal{B} -fibration λ munie d'un foncteur cartésien \mathcal{B} -plein

et fidèle : $K \rightarrow D^{(B^C)^{OP}}$; les objets de la fibre K_I sont les foncteurs cartésiens, objets de $D^{(B^C)^{OP}}(I)$ qui commutent aux \mathbb{B} -limites inductives.

Il suffit de faire la démonstration sur les fibres au-dessus de I . En utilisant 2.7.3., on se ramène au théorème 6.3.

$$D^C(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C \times I, D) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, D_I)$$

$$D^{B^C^{OP}}(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(B^{C^{OP}} \times I, D) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(B_I^{(i^*C)^{OP}}, D_I)$$

Ainsi la démonstration se ramène à celle de 6.3. en remplaçant \mathbb{B} par \mathbb{B}/I , C par i^*C , D par D_I . Ces données vérifient évidemment les hypothèses requises. D'où le résultat.

Application. - Si $D = B$, le théorème 6.3. s'applique à condition que B soit \mathbb{B} -complète à droite (c'est-à-dire ait des conoyaux universels - l'existence des \mathbb{B} -sommes est évidente) et soit \mathbb{B} -localement petite, c'est-à-dire (3.6.) ait des Π .

En particulier, si \mathbb{B} est un topos le théorème s'applique. On note E ce topos.

Théorème de Diaconescu [5].

Soit $\underline{A} \in |\text{Cat } E|$ et F un topos sur E ($F \xrightarrow{p} E$ est un morphisme géométrique $p^* \rightarrow p_*$), il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des morphismes géométriques de F sur \hat{A} ($= \text{Cart}_E(A^{OP}, F)$) au-dessus de E et la sous-catégorie pleine de $\bar{F}(p^*A)$ (5.1.) ($= \text{Cart}_E(p^*A, F)$) formée des préfaisceaux internes que Diaconescu nomme plats.

Un morphisme géométrique de F dans \hat{A} au-dessus de E est un morphisme géométrique ($f^* \rightarrow f_*$) qui rend le triangle ci-après commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F} & \xleftarrow{f^*} & \widehat{A} \\
 & \searrow p_* & \nearrow p^* \\
 & & \mathbb{E}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 f_* \\
 a^* = (\underline{A}^{OP})^* \\
 \lim_{\underline{A}^{OP}}
 \end{array}$$

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier de (6.3.), en effet :

1) Il existe un produit fibré de morphismes géométriques :

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathbb{F}}((p^* \underline{A})^{OP}) & \xrightarrow{\quad} & \widehat{A} = \overline{E}(\underline{A}^{OP}) \\
 \downarrow b = ((p^* \underline{A})^{OP})^*, \lim_{(p^* \underline{A})^{OP}} & & \downarrow a = (a^*, \lim_{\underline{A}^{OP}}) \\
 \mathbb{F} & \xrightarrow{p = (p^*, p_*)} & \mathbb{E}
 \end{array}$$

Ainsi l'étude des morphismes géométriques au-dessus de \mathbb{E} de \mathbb{F} dans A se ramène à l'étude des morphismes géométriques $q : \mathbb{F} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}(p^* \underline{A}^{OP})$ tels que $bq = \text{Id}$ (i.e. $b_* q_* = 1_{\mathbb{F}}$ ou $q^* b^* = 1_{\mathbb{F}}$).

Changeant de notation, on est amené à examiner les foncteurs $r^* : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{E}$, ayant un adjoint à droite, exacts à gauche et tels que :

$$r^* a^* = 1_{\mathbb{E}}.$$

2) Un tel foncteur r^* permet de définir un foncteur cartésien sur \mathbb{E} , $\rho : E^{\underline{A}^{OP}} \rightarrow E$.

On a : $\rho_I : \widehat{A}/a^* I \rightarrow \mathbb{E}/I = E(I)$ donné par :

$$\rho_I(\vartheta + a^* I) = r^*(\vartheta + a^* I) = r^* \vartheta + I.$$

La commutation des ρ_I aux changements de bases, vient de ce que r^* est exact à gauche.

(Bien entendu les conditions sur r^* ne sont nullement nécessaires pour qu'un foncteur puisse s'étendre à un foncteur cartésien sur E . Pour $E = \text{Ens}$, tout foncteur $\hat{A} \rightarrow \text{Ens}$ s'étend à un foncteur cartésien mais n'est pas nécessairement exact à gauche).

Ainsi l'étude des morphismes géométriques envisagés par Diaconescu se ramène à celle de certains foncteurs cartésiens : $E^{A \text{ op}} \rightarrow E$ qui ont un adjoint à droite (en fait un E -adjoint à droite).

Le théorème 6.3. montre qu'il existe une équivalence de catégories entre ces foncteurs et une sous-catégorie pleine de $\bar{E}(A) = \text{Cart}_E(A, E)$. Les objets de cette sous-catégorie sont les préfaisceaux internes dont l'extension de Kan par Y , L_g , est exacte à gauche et telle que $L_g \cdot a^* = 1_E$.

CHAPITRE VII

THÉOREMES DE REPRESENTABILITE ET DU FONCTEUR ADJOINT.

7.1.- Objet initial dans une catégorie fibrée.-

Un objet initial (ou initial strict) est un cas particulier de \lim , d'où la définition.

7.1.1.- Définition.- Une fibration D a un objet initial si et seulement si chaque fibre $D(I)$ a un objet initial et si ces objets (et les flèches canoniques) commutent aux changements de base.

Soit $f : I \rightarrow J$, v_J (resp. v_I) l'objet initial dans $D(J)$ (resp. $D(I)$)

$$v_I = f^* v_J$$

La donnée de l'objet initial v dans $D(I)$ détermine donc la famille des v_I

$$v_I = i^* v.$$

7.1.2.- Définition.- Une fibration D a des produits si et seulement si chaque fibre $D(I)$ a des produits qui commutent aux changements de bases, (5)

7.1.3.- Théorème.- Pour que D , \mathcal{B} -complète à gauche, ayant des produits, et \mathcal{B} -localement petite ait un objet initial il faut et il suffit qu'il existe $I \in |\mathcal{B}|$, $S \in |D(I)|$ tels que :

$$\forall T \in |\mathcal{B}| \quad \forall X \in |D(T)| \quad \exists \tau : T \rightarrow I \quad \exists u_\tau : \tau^* S \rightarrow X \quad (\text{au-dessus de } 1_T).$$

Remarque.- D étant \mathbb{B} -complète à gauche la condition de l'"ensemble solution" équivaut à :

$$\exists I \in |\mathbb{B}| \quad \exists S \in |D(I)| \quad \forall X \in |D(I)| \quad \exists \sigma : I \rightarrow I \quad \exists \sigma^* S \rightarrow X$$

(au-dessus de I).

En effet. Pour tout $T (t : T \rightarrow I)$ et $X \in |D(T)|$, on forme $\pi_t X$. Il existe $\sigma : I \rightarrow I$ et $\sigma^* S \rightarrow \pi_t X$, soit $t^* \sigma^* S \rightarrow X$ au-dessus de T . On prend alors $\tau = \sigma t$ et on a la condition du théorème.

7.1.3.- Preuve du théorème.- Il est clair que si D a un objet initial la condition de l'"ensemble solution" est vérifiée. Si $v \in |D(I)|$ "est" cet objet (en fait il détermine les v_I) la condition plus haut est trivialement vérifiée pour $I = 1$ et $S = v$.

Pour établir la réciproque

- On construit la "petite fibration" engendrée par $S \in |D(I)|$ (3.7).
- On établit une condition suffisante pour que le sommet d'un cône sur D (voir définition plus loin) soit objet initial.
- A l'aide d'une \mathbb{B} -limite projective on construit un cône dont le sommet a la propriété précédente.

7.1.3.1.- Cône sur une \mathbb{B} -fibration.

Définition.- Soit D une fibration et $d \in |D(I)|$; on note $\Gamma_D \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, D)|$ le foncteur cartésien identique et $\Gamma_d \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, D)|$ le foncteur cartésien constant égal à d (i.e. pour $I \in |\mathbb{B}|$ $\Gamma_d I : D(I) \rightarrow D(I)$ envoie tout objet de $D(I)$ sur $t^* d = d_I$). On appelle cône sur D , de sommet d , toute transformation \mathbb{B} -naturelle $\Gamma_d \rightarrow \text{Id}_D$.

On note $\lambda : d \rightarrow D$ un tel cône.

La définition équivaut à, pour tout $T \in |\mathbb{B}|$, d_T est sommet d'un cône (sens usuel) de base $\Gamma_{D(T)}$

$$\lambda_T : d_T \rightarrow D(T)$$

et les λ commutent aux changements de bases.

Notation.- Pour $A \in |D(1)|$ on note $\lambda(A)$ la flèche $d \rightarrow A$ du cône.

7.1.3.2.- Lemme.- Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$; dans les conditions de la définition précédente, $d_{\underline{C}} = \underline{C}^* d$ est sommet d'un cône sur $D^{\underline{C}}$.

Preuve : On vérifie que, pour tout T , $d_{CT} = (t^* C)^* d_T$ est sommet d'un cône sur $D^{\underline{C}}(T) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/T}(t^* C, D_T)$ (2.7.3).

On peut alors ramener la démonstration au cas où $T = 1$.

Pour montrer que $d_{\underline{C}} = C^* d(\epsilon | \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D))$ est sommet d'un cône sur $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$, il faut déterminer une famille $(\lambda_J)_{J \in |\mathbb{B}|}$ de cônes (au sens usuel).

λ_J a pour sommet le foncteur $C(J) \rightarrow D(J)$ constamment égal à $j^* d = d_j \cdot (\lambda_J)$ est un cône sur $\text{Fonct}(C(J), D(J))$.

Mais l'hypothèse montre trivialement l'existence des cônes λ_J .

La commutation aux changements de bases est évidente.

7.1.3.3.- Lemme [12].- Si d est sommet d'un cône sur D et si il existe $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ et $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ tel que $d = \varinjlim U$ et tel que dans le cône de sommet $d_{\underline{C}}$ construit en 7.1.3.2, $\lambda(U) = \epsilon \frac{C}{\underline{C}}$ (flèche de coadjonction $C^* \varinjlim U \rightarrow U$) alors d est initial dans D .

Preuve :

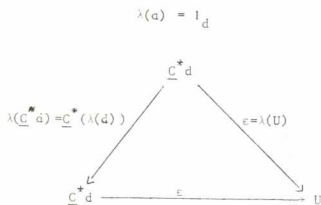
a) On montre que d est initial dans $D(1)$. La construction précédente montre que

$$\lambda(\underline{C}^* d) : \underline{C}^* d \longrightarrow \underline{C}^* d \quad (\text{dans le cône de sommet } \underline{C}^* d)$$

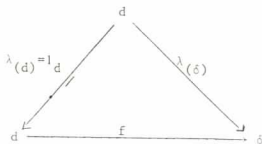
est tel que $\lambda(\underline{C}^*d) = \underline{C}^*(\lambda(d))$

où $\lambda(d) : d \rightarrow d$ (dans le cône donné).

La commutativité du carré ci-dessous (propriété du cône), le fait que ε est une flèche de coadjonction, montrent que :



Si $\delta \in |D(I)|$ et $f : d \rightarrow \delta$, le diagramme commutatif ci-dessous montre que $\lambda(\delta) = f$.



d est donc initial dans $D(I)$.

b) Pour tout T ($t : T \rightarrow I$) $d_T = t^*d$ est initial dans $D(T)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lambda_T(d_T) &= \lambda_T(t^*d) = t^*(\lambda(d)) \quad (\text{définition d'un cône}) \\ &= t^*(1_d) = 1_{d_T} . \end{aligned}$$

La deuxième partie de la démonstration s'applique alors sans changement.

7.1.3.4.- Fin de la preuve du théorème 7.1.3.-

On considère $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$ construit en (3.7). D étant \mathbb{B} -complète à gauche, il existe

$$v = \varprojlim_{\underline{\Sigma}} U \quad (v \in |D(1)|)$$

On montre que v est sommet d'un cône vérifiant les hypothèses de 7.1.3.3.

- $\forall T \quad v_T$ est sommet d'un cône sur $D(T)$.

On utilise l'hypothèse de "l'ensemble solution" par exemple sous sa première forme.

Soit $T \in |\mathbb{B}|$ $t : T \rightarrow 1$ $X, X' \in |D(T)|$ et $f : X \rightarrow X' \in \text{Fl} D(T)$.

Il existe $\tau, \tau' : T \rightarrow I$ $u_{\tau} : \tau^* S \rightarrow X$ et $u_{\tau'} : \tau'^* S \rightarrow X'$.

$v = \varprojlim_{\underline{\Sigma}} U$, il existe donc une \mathbb{B} -transformation naturelle

$$\epsilon : \varprojlim_{\underline{\Sigma}} v \longrightarrow U \quad (\epsilon \in \text{Fl}(\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)))$$

On en déduit l'existence d'une transformation naturelle

$$\epsilon_T : \varprojlim_{\underline{\Sigma}(T)} v_T \longrightarrow U_T$$

(où $\varprojlim_{\underline{\Sigma}(T)} v_T$ est le foncteur $\varprojlim_{\underline{\Sigma}(T)} D(T)$ constamment égal à $v_T = t^* v$).

Pour X (resp. X') $\lambda_T(X) : v_T \longrightarrow X$ est donné par :

$$\lambda_T(X) = u_{\tau} \cdot \epsilon_T(\tau)$$

(en effet $\epsilon_T(\tau) : v_T \rightarrow U_T(\tau) = \tau^* S$).

$$\lambda_T(X') = u_{\tau'} \cdot \epsilon_T(\tau') .$$

7.1.3.4.- Fin de la preuve du théorème 7.1.3.-

On considère $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$ construit en (3.7). D étant \mathbb{B} -complète à gauche, il existe

$$v = \varinjlim_{\Sigma} U \quad (v \in |D(1)|)$$

On montre que v est sommet d'un cône vérifiant les hypothèses de 7.1.3.3.

- $\forall T \quad v_T$ est sommet d'un cône sur $D(T)$.

On utilise l'hypothèse de "l'ensemble solution" par exemple sous sa première forme.

Soit $T \in |\mathbb{B}|$ $t : T \rightarrow I \ X, X' \in |D(T)|$ et $f : X \rightarrow X' \in \text{Fl } D(T)$. Il existe $\tau, \tau' : T \rightarrow I$ $u_{\tau} : \tau^* S \rightarrow X$ et $u_{\tau'} : \tau'^* S \rightarrow X'$.

$v = \varinjlim_{\Sigma} U$, il existe donc une \mathbb{B} -transformation naturelle

$$\varepsilon : \varinjlim_{\Sigma}^* v \longrightarrow U \quad (\varepsilon \in \text{Fl}(\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)))$$

On en déduit l'existence d'une transformation naturelle

$$\varepsilon_T : \varinjlim_{\Sigma(T)}^* v_T \longrightarrow U_T$$

(où $\varinjlim_{\Sigma(T)}^* v_T$ est le foncteur $\varinjlim_{\Sigma(T)} \rightarrow D(T)$ constamment égal à $v_T = t^* v$).

Pour X (resp. X') $\lambda_T(X) : v_T \longrightarrow X$ est donné par :

$$\lambda_T(X) = u_{\tau} \cdot \varepsilon_T(\tau)$$

(en effet $\varepsilon_T(\tau) : v_T \rightarrow U_T(\tau) = \tau^* S$).

$$\lambda_T(X') = u_{\tau'} \cdot \varepsilon_T(\tau')$$

On montre qu'on a ainsi défini un cône sur $D(T)$, de sommet v_T .

Il faut montrer :

$$f \cdot \lambda_T(X) = \lambda_T(X').$$

On construit dans $D(T)$ le produit fibré ci-dessous, (D a des noyaux et des produits) :

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{p'} & \tau'^* S \\
 \downarrow p & & \downarrow u_{\tau'} \\
 \tau^* S & \xrightarrow{u_\tau} X \xrightarrow{f} & X'
 \end{array}$$

La condition de l'ensemble solution montre l'existence de

$\tau'' : T \rightarrow I$ et $u_{\tau''} : \tau''^* S \rightarrow Z$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tau''^* S & \xleftarrow{\epsilon_T(\tau'')} & v_T \\
 & & \swarrow u_{\tau''} & & \swarrow \epsilon_T(\tau) \\
 Z & & & & \tau'^* S \\
 \downarrow p & & \downarrow p' & & \downarrow \epsilon_T(\tau') \\
 \tau^* S & & & & \tau'^* S \\
 \downarrow u_\tau & & & & \downarrow u_{\tau'} \\
 X & \xrightarrow{f} & & & X'
 \end{array}$$

$$\text{On a : } p \cdot u_{\tau} \in D(T)(\tau^* S, \tau^* S) = (3.8) \int(T) (\tau'', \tau)$$

$$p' \cdot u_{\tau} \in D(T)(\tau^* S, \tau^* S) = \int(T) (\tau'', \tau')$$

ε_T étant une transformation naturelle, on a :

$$(p \cdot u_{\tau}) \cdot \varepsilon_T(\tau'') = \varepsilon_T(\tau)$$

$$(p' \cdot u_{\tau}) \cdot \varepsilon_T(\tau'') = \varepsilon_T(\tau')$$

De la commutativité du produit fibré

$$u_{\tau} \cdot p' = f \cdot u_{\tau} p$$

on déduit alors la condition cherchée :

$$f \cdot \lambda_T(X) = \lambda_T(X')$$

- La commutation des λ aux changements de bases se déduit immédiatement de celle des ε_T (ε est une transformation \mathcal{B} -naturelle).

v est donc le sommet d'un cône sur D .

- Reprenant la construction faite en 7.1.3.2. on introduit le cône associé de sommet $\sum_{\mathcal{L}}^* v = \sum_{\mathcal{L}}^* \varprojlim_{\mathcal{L}} U$.
On a alors $\lambda(U) = \varepsilon : \sum_{\mathcal{L}}^* \varprojlim_{\mathcal{L}} U \rightarrow \bar{U}$ (si $\tau : T \rightarrow I$ il suffit de prendre $u_{\tau} = \varprojlim_{\tau^* S}^* : \tau^* S \rightarrow \tau^* S$ comme flèche donnée par la condition de l'ensemble solution, et de remarquer que $U_{\tau}(\tau) = \tau^* S$).

Les hypothèses du lemme 7.1.3.3. sont alors vérifiées et v est initial dans D .

7.2.- Théorème de représentabilité.

Soit $K : D \rightarrow \mathcal{B}$ un \mathcal{B} -foncteur cartésien, D étant une fibration localement petite.

7.2.1.- Définition.- K est dit représentable si et seulement si il existe $A \in |D(I)|$ et une B -équivalence

$$K = \underline{\text{Hom}}(A, -)$$

(où $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ désigne le B -foncteur cartésien tel que :

$$(\underline{\text{Hom}}(A, -))_I = \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -) \quad (3.1) \quad)$$

7.2.2.- Lemme.- K est représentable si et seulement si la catégorie $(*, K)$ (2.10.3) a un objet initial.

Preuve :

a) On montre que pour tout I , $((*)_I, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -))$ a un objet initial, et que ces objets commutent aux changements de bases.

Un objet de $((*)_I, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -))$ (2.10.3) est la donnée d'un couple (δ_I, α_I) avec $\delta_I \in |D(I)|$, $\alpha_I : 1_I \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, \delta_I)$, $\alpha_I \in \text{Fl } \mathbb{B}/I$.

Une telle donnée équivaut à celle de δ_I et d'un morphisme γ_I de $D(I)$

$$\gamma_I : i^*A \rightarrow \delta_I.$$

L'objet initial cherché est donc le couple $(i^*A, 1_{i^*A} : i^*A \rightarrow i^*A)$.
La commutation aux changements de bases est évidente.

b) On montre que si $(*, K)$ a un objet initial, $(a : 1 \rightarrow KA)$ initial dans $(*, K)$ (1) , pour tout I ($i : I \rightarrow 1$), tout $X_I \in |D(I)|$

$$K_I X_I = \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, X_I)$$

Soit $\tau : T \rightarrow I$, $\tau \in |\mathbb{B}/I|$, $(t : T \rightarrow 1)$

$$\mathbb{B}/I(\tau, K_I X_I) = \mathbb{B}/T(1_T, \tau^* K_I X_I) = \mathbb{B}/T(1_T, K_I \tau^* X_I)$$

Mais (7.1.1), $t^*a : I_T \rightarrow K_T t^*A$ est initial dans $((*)_T, K_T)$
d'où :

$$B/I(1_T, K_T t^*X_I) = D(I)(t^*A, t^*X_I) = B/I(\tau, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, X_I))$$

7.2.5.- Définition.- Si $A \in |D(I)|$, on note
 $\underline{\text{Hom}}_C(A, -) \in |\text{Cart}_B(D^C, B^C)|$ le foncteur cartésien défini de la façon suivante.

- sa restriction à la fibre au-dessus de 1 est définie comme en
4.2 à partir de $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ de 7.2.1.

$$\text{On a, pour } \gamma \in |D^C(I)| = \bar{D}(C)$$

$$\underline{(\underline{\text{Hom}}_C(A, -))}_I(\gamma) = \underline{\text{Hom}}(A, -) \circ (\gamma) \quad (2.6.3)$$

$$\text{- pour } I \in |B| \text{ et } \gamma_I \in |D^C(I)| = |\text{Cart}_{B/I}(i^*C, D_I)| \quad (2.7.3)$$

On pose :

$$\underline{(\underline{\text{Hom}}_C(A, -))}_I(\gamma_I) = \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -) \circ (\gamma_I) \quad (2.6.3)$$

où $\underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -) \in |\text{Cart}_{B/I}(D_I, B/I)|$.

7.2.4.- Proposition.- Le foncteur cartésien $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ (7.2.1)
commute aux B-limites projectives.

Preuve :

a) La définition précédente et (2.6.4) montrent que si
 $\gamma \in D^C(I) = \bar{D}(C)$ $\underline{(\underline{\text{Hom}}_C(A, -))}_I(\gamma)$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_{C_1}(C_1^*A, \gamma_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(C_0^*A, \gamma_0) \\
 \downarrow & \xrightarrow{\alpha_0} & \downarrow \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

où γ est défini par :

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & \gamma_0 \\
 & \xrightarrow{\theta_0} & \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

et où α_0 (et α_1) se déduisent de θ_0 (et λ_1), par les procédés du (§ 3).

b) Soit $T \in |\mathbf{B}|$ ($t : T \rightarrow 1$). On a :

$$B^C(1)(\underline{C}^*T, \underline{\text{Hom}}_C(A, \gamma)) = D^C(T)(\underline{C}^*t^*A, t^*\gamma)$$

La propriété se montre aisément en remarquant que la commutativité du diagramme (1) ci-dessous est équivalente à celle du diagramme (2) .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(C_1^*A, \gamma_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(C_0^*A, \gamma_0) \\
 & \nearrow r_1 & \downarrow & \xrightarrow{\alpha_0} & \downarrow \\
 C_1 \times T & \xrightarrow{d_1 \times T} & C_0 \times T & \xrightarrow{r_0} & \\
 & \searrow & \downarrow & & \\
 & & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & & \xrightarrow{d_0} & &
 \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 C_1^* t^* A & \xrightarrow{\bar{r}_1} & t^* \gamma_1 \\
 \parallel & & \parallel \\
 C_0^* t^* A & \xrightarrow{\bar{r}_0} & t^* \gamma_0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 t^* \theta_0 \\
 t^* \lambda_1
 \end{array}
 \quad (2)$$

où \bar{r}_0 (resp. \bar{r}_1) se déduit de l'existence de r_0 (resp. r_1) par (3.1).

c) On montre que :

$$\underline{\underline{\text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)}} = \underline{\underline{\varprojlim_{\underline{C}} (\text{Hom}_C(A, \gamma))}} .$$

On forme pour tout $T \in |\mathbf{B}|$

$$\mathbf{B}(T, \text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)) = D_T(t^* A, t^* \varprojlim_{\underline{C}} \gamma) \quad (3.1)$$

Mais $\varprojlim_{\underline{C}}$ est un foncteur cartésien

$$t^* \varprojlim_{\underline{C}} \gamma = \varprojlim_{\underline{C}} t^* \gamma ;$$

$$\text{d'où : } \mathbf{B}(T, \text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)) = D(\mathbf{T})(t^* A, \varprojlim_{\underline{C}} t^* \gamma) = D^C(\mathbf{T})(C^* t^* A, t^* \gamma)$$

(adjonction $C^* \dashv \varprojlim_{\underline{C}}$)

$$= \mathbf{B}^C(1)(\underline{C}^* T, \text{Hom}_C(A, \gamma)) \quad (b)$$

$$= \mathbf{B}(T, \varprojlim_{\underline{C}} \text{Hom}_C(A, \gamma))$$

7.2.5.- Théorème.- (théorème de représentabilité) \mathcal{B} est \mathcal{B} -localement petite (3.6).

Soit D une fibration \mathcal{B} -localement petite, \mathcal{B} -complète à gauche et ayant des produits, $K : D \rightarrow \mathcal{B}$ est représentable si et seulement si il commute aux \mathcal{B} -limites projectives et si il existe $I \in |\mathcal{B}|$, $S \in |D(I)|$ et $s_I : I \rightarrow K_I S$ ($s_I \in \text{Fl } \mathcal{B}/I$) tels que pour tout $X \in |D(I)|$ et $\varepsilon : I \rightarrow KX$, il existe $\sigma : I \rightarrow I$ et $u_\sigma : \sigma^* S \rightarrow X$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\quad} & KX \\
 \sigma^* s_I \searrow & & \nearrow Ku_\sigma \\
 & \sigma^* K_I S = K\sigma^* S &
 \end{array}$$

Preuve : La deuxième partie de la condition exprime simplement que la fibration $(*,K)$ vérifie l'hypothèse de "l'ensemble solution" (remarque (7.1.3)).

a) Pour $K = \underline{\text{Hom}}(A, -)$, on sait (7.2.2) que $(*,K)$ a un objet initial, donc (7.1.2) vérifie la condition de "l'ensemble solution". De plus (7.2.4), $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ commute aux \mathcal{B} -limites projectives.

b) On applique le théorème de l'objet initial (7.1.3) à la fibration $(*,K)$, puis le lemme (7.2.2).

- $(*,K)$ a des produits (chaque fibre a des produits ([12]) et ces produits commutent aux changements de bases (trivial)).

- $(*,K)$ est \mathcal{B} -complète à gauche.

Il suffit de construire le \mathcal{B} -adjoint à droite \lim_C du foncteur cartésien :

$$C^* : (*, K) \rightarrow (*, K)^C \quad (2.10.3)$$

On construit la restriction de \varinjlim_C à la fibre au-dessus de 1. Il suffit d'appliquer ensuite les procédés de (2.7.3) pour obtenir \varinjlim_C sur les autres fibres.

Par (2.10.3 a) un objet de $(*, K)^C(1)$ est un couple (δ, α)

$$\delta \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$$

$$\alpha : C^*(1) \rightarrow K^C(\delta)$$

On pose $\varinjlim_C(\delta, \alpha) = (\varinjlim_C \delta, \bar{\alpha})$ (D a des \mathbb{B} - \varinjlim), où :

$$\bar{\alpha} : 1 \rightarrow \varinjlim_C K^C(\delta) = K(\varinjlim_C \delta)$$

correspond à α par l'adjonction $C^* \dashv \varinjlim_C (C^* : B \rightarrow B^C)$ et où K commute aux \mathbb{B} -limites projectives.

On vérifie immédiatement qu'on a ainsi construit un foncteur et que $\varinjlim_C(\delta, \alpha)$ a la propriété universelle désirée.

- $(*, K)$ est \mathbb{B} -localement petite.

Soient (X, ξ) et (Y, η) deux objets de $(*, K)_I$.

($\xi : 1_I \rightarrow K_I X$ et $\eta : 1_I \rightarrow K_I Y$). On construit $\text{Hom}_I(X, Y)$.

The diagram illustrates the construction of $\text{Hom}_I(X, Y)$ from objects (X, ξ) and (Y, η) in $(*, K)_I$. It features several nodes and arrows:

- Top node: J
- Left node: $j^* K_I X = K_J j^* X$
- Right node: $j^* K_I Y = K_J j^* Y$
- Bottom node: J
- Bottom-right node: I
- Far right node: $\text{Hom}_I(X, Y)$

Arrows and their labels:

- $J \rightarrow j^* K_I X$ labeled $j^* \xi$
- $J \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $j^* \eta$
- $J \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $(*)$
- $j^* K_I X \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $K_J f$
- $J \rightarrow I$ labeled j
- $I \rightarrow \text{Hom}_I(X, Y)$ labeled k
- $J \rightarrow \text{Hom}_I(X, Y)$ labeled \bar{f}

Une flèche $j^* \xi \rightarrow j^* \eta$ dans $(*, K)_j$ est une flèche $f : j^* X \rightarrow j^* Y$ tel que le triangle $(*)$ soit commutatif.

A f , correspond $\bar{f} : j \rightarrow k$.

On obtient donc $\underline{\text{Hom}}_I(\xi, \eta)$ en prenant le noyau des deux flèches ci-dessous dans \mathbb{B}/I .

1^{ère} flèche

$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{K} (K_I Y)^{K_I X} = \underline{\text{Hom}}_I(K_I X, K_I Y) \xrightarrow{\lambda} (K_I Y)^{K_I X} \times (K_I X)^{I_I} \xrightarrow{\mu} (K_I Y)^{I_I}$$

où K est le morphisme défini en (3.4.a), puisque \mathbb{B} est \mathbb{B} -localement petit (on note $\underline{\text{Hom}}$ dans \mathbb{B}/I par une exponentielle).

$\lambda : (K_I Y)^{K_I X} \rightarrow (K_I Y)^{K_I X} \times (K_I X)^{I_I}$ est donné par $\lambda = 1 \times \mu$ où μ est la flèche de composition (3.3.a).

2^{ème} flèche

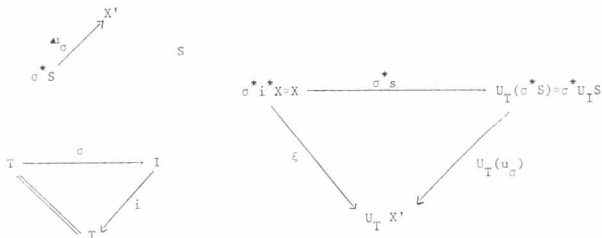
$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{\text{flèche canonique}} I_I \xrightarrow{\eta} (K_I Y)^{I_I}$$

La vérification que $\underline{\text{Hom}}_I(\xi, \eta)$ a les propriétés voulues est triviale.

7.3.- Théorème du foncteur adjoint.-

Soit $U : D' \rightarrow D$ un \mathbb{B} -foncteur cartésien, D et D' étant deux fibrations localement petites, D' étant de plus \mathbb{B} -complète à gauche et ayant des produits.

Théorème.- Dans les conditions précédentes, U admet un \mathbb{B} -adjoint à gauche (i.e. cartésien sur \mathbb{B}) si et seulement si, U commute aux \mathbb{B} -limites projectives et si de plus, pour tout $T \in |\mathbb{B}|$ tout $X \in |D(T)|$ il existe $i : I \rightarrow T$, $S \in |D'(I)|$ et $s : i^* X \rightarrow U_I S$ tels que pour tout $\xi : X \rightarrow U_T X'$, il existe $\sigma : I_T \rightarrow i$ ($\sigma \in \text{Fl } \mathbb{B}/T$) et $u_\sigma : \sigma^* S \rightarrow X'$ tel que le triangle de droite soit commutatif : $U_T(u_\sigma) \circ \sigma^* s = \xi$.



Preuve : La deuxième partie de la condition exprime simplement que la fibration (X, U_T) (de base \mathcal{B}/T) (construite comme en 2.7.3) vérifie l'hypothèse de "l'ensemble solution" de 7.1.3. (remarque).

a) Si U a un \mathcal{B} -adjoint à gauche, pour tout T , et tout X , (X, U_T) a un objet initial, donc (7.1.3) vérifie la condition de "l'ensemble solution".

Par ailleurs (5.11) U commute aux \mathcal{B} -limites projectives.

b) On montre que, dans les conditions du théorème (X, U_T) a un objet initial, c'est-à-dire vérifie les hypothèses de 7.1.3. Il suffit de montrer que (X, U_T) est \mathcal{B}/T localement petite, \mathcal{B}/T complète à gauche, et a des produits.

- (X, U_T) est \mathcal{B}/T -localement petite.

Soient (X', ξ) et (Y', η) deux objets de $(X, U_T)_T$ ($\tau : T' \rightarrow T$) ($\xi : \tau^* X \rightarrow U_T, X'$ et $\eta : \tau^* X \rightarrow U_T, Y'$ dans $D_{T'}$).

On construit $\underline{\text{Hom}}_\tau(\xi, \eta)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \rho^* \tau^* X & & \\
 \downarrow \rho^* \xi & \searrow \rho^* \eta & \\
 U_R, \rho^* X' = \rho^* U_T, X' & & U_R, \rho^* Y' = \rho^* U_T, Y' \\
 \nearrow U_R, f & & \\
 & \text{Hom}_T, (X', Y') & \\
 & \nearrow \bar{f} & \searrow k \\
 R' & \xrightarrow{\rho} & T' \xleftarrow{\tau} T
 \end{array}$$

Une flèche $\rho^* \xi(X', \xi) \rightarrow \rho^* (Y', \eta)$ dans $(X, U_T)_{\rho \tau}$ est une flèche $f : \rho^* X' \rightarrow \rho^* Y'$ telle que le triangle (*) commute.

A f correspond $\bar{f} : \rho + k$.

On obtient donc $\underline{\text{Hom}}_{\tau}(\xi, \eta)$ en prenant le noyau des deux flèches ci-dessous.

1^{ère} flèche

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_T, (X', Y') & \xrightarrow{U} & \underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y') \xrightarrow{\lambda} \underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y') \times \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, X') \\
 & & \searrow \mu \\
 & & \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, Y')
 \end{array}$$

où U est le morphisme défini en (3.4.a) (D et D' sont B -localement petites donc D_T et D'_T , B/T localement petites),

où $\lambda = 1_{\underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y')} \times \tau_{\xi}^{-1}$ (avec $\tau_{\xi}^{-1} : 1_T \rightarrow \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, X')$ qui correspond à $\xi : \tau^* X \rightarrow U_T, X'$) et où μ est la flèche de composition (3.3.a).

2^{ème} flèche

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{T}}(X', Y') \xrightarrow{\text{flèche canonique}} \mathbb{1}_{\mathbb{T}}, \xrightarrow{\tau_n} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{T}}(\tau^* X, U_{\mathbb{T}}, Y')$$

où τ_n correspond à $n : \tau^* X \rightarrow U_{\mathbb{T}}, Y'$.

- $(X, U_{\mathbb{T}})$ est B/T complète à gauche.

Remarque : U commutant aux B-lim, $U_{\mathbb{T}}$ commute aux B/T-lim.

En effet, soient $\Gamma \in |\text{Cat B/T}|$ et $\delta' \in |\text{Cart B/T}(\Gamma, D_{\mathbb{T}}^1)|$ représentés sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \delta'_1 & \xrightarrow{\quad} & \delta'_0 \\ \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} \\ C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \searrow \\ \mathbb{T} \end{array}$$

Dire que $U_{\mathbb{T}}$ commute à \varprojlim_{Γ} (avec $\varprojlim_{\Gamma} \delta' \in |D^1(\mathbb{T})|$, $\Gamma \in |\text{Cat B/T}|$, revient à dire que U commute à \varprojlim_{Γ} (où Γ est considéré comme un morphisme de Cat B, $\Gamma : \underline{C} \rightarrow \mathbb{T}$).

Pour construire le B-adjoint à droite \varprojlim_{Γ} de

$$\Gamma^* : (X, U_{\mathbb{T}}) \longrightarrow (X, U_{\mathbb{T}})^{\Gamma},$$

on construit sa restriction à la fibre au-dessus de 1.

Par (2.10.3.b) un objet de $(X, U_{\mathbb{T}})^{\Gamma}(1)$ est un couple (δ', γ)

$$\delta' \in |\text{Cart B/T}(\Gamma, D_{\mathbb{T}}^1)|$$

$$\gamma : \Gamma^*(X) \rightarrow U_{\mathbb{T}}^{\Gamma}(\delta') = U_{\mathbb{T}} \cdot (\delta')$$

flèche dans $D_{\mathbb{T}}^{\Gamma}(1)$.

On pose $\varinjlim(\delta', \gamma) = (\varinjlim \delta', \bar{\gamma})$ (D' a des \mathcal{B} - \varinjlim , donc D'_T a des \mathcal{B}/T - \varinjlim), où $\bar{\gamma} : X \rightarrow \varinjlim U_T^{\Gamma}(\delta') = U_T^{\Gamma} \varinjlim \delta'$ (remarque précédente) correspond à γ par l'adjonction $\Gamma^* \dashv \varinjlim$.

La vérification qu'on a bien ainsi construit une \mathcal{B}/T - \varinjlim est triviale.

- (X, U_T) a des produits (évident [12]).

c) L'étude faite en b permet de conclure que les \mathcal{B}/T fibrations (X, U_T) ont des objets initiaux. On sait qu'alors pour tout T il existe un foncteur F_T adjoint à gauche de U_T tel que, pour tout $X \in |D_T|$ $(F_T X, X \xrightarrow{\eta_X} U_T F_T X)$ soit initial dans $(X, U_T)_{I_T}$.

La définition 7.1.1 montre que pour $f : T' \rightarrow T$ l'objet initial de $(f^* X, U_{T'}) = (X, U_T)_f$ est $(f^* F_T X, f^* \eta_X)$.

On a donc en particulier, pour tout X ,

$$f^* F_T X = F_{T'} f^* X$$

et les F_T commutent aux changements de bases.

On a bien défini un \mathcal{B} -adjoint à gauche (cartésien) de U .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENABOU (Jean) - *Introduction to bicategories*,
Lectures Notes n° 47, Springer Verlag 1967.
- [2] BENABOU (Jean) - *Catégories multiplicatives*,
Institut de Mathématiques Pures et Appliquées,
Université Catholique de Louvain (n° 27) juillet 1971.
- [3] BENABOU (Jean) - *Distributeurs*,
Id. (n° 33) janvier 1972.
- [4] CELEYRETTE (Jean) - *Théorème de Kan et Catégories fibrées*,
(C.R.A.S.), à paraître.
- [5] DIACONESCU (Radu) - Thèse (multigraphiée).
- [6] GIRAUD (Jean) - *Cohomologie non abélienne*,
Springer Verlag 1971.
- [7] GIRAUD (Jean) - *Méthode de la descente*,
Bull. Soc. Math. de France, Mémoire 2 - 1964.
- [8] GRÖTHENDIECK (Alexander) - *Catégories fibrées et descente*,
Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S.,
Paris 1961.
- [9] KOCK (Anders) & WRAITH (Gavin) - *Elementary toposes*,
Aarhus Lecture notes n° 30 (septembre 1971).
- [10] LAWVERE (F.W.) - *Quantifiers and Sheaves*,
Actes Congrès International des Mathématiciens
Nice (1970).
- [11] LAWVERE (F.W.) - *Equality in hyperdoctrines and comprehension schema
as an adjoint functor*,
American Math. Society (1970).
- [12] MC LANE (Saunders) - *Categories for the working mathematicians*,
Graduate texts in Mathematics. Springer Verlag (1971).

.../...

[13] NEWELL & FISHER-PALMQUIST - *Triples on functor categories*,
Journal of algebra (25) (1973).

[14] Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. SGA 4 dirigé par
M. ARTIN, A. GRÖTHENDIECK, J.L. VERDIER (1963-64).