CABAY
LOUVAIN-LA-NEUVE
1982

FIBRATIONS GEOMETRIQUES ET THEOREME DE GIRAUD

J.L. MOENS

Rapport n° 12 — Août 1982
Séminaire de mathématique (nouvelle série)

INSTITUT DE MATHEMATIQUE PURE ET APPLIQUE
UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Bâtiment Sc. I, Chemin du Cyclotron 2, 1348 LOUVAIN-LA-NEUVE

FIBRATIONS GEOMETRIQUES ET THEOREME DE GIRAUD

J.L. MOENS.

1. Introduction et rappels.

Dans ce papier, nous allons donner des conditions caractérisant l'existence d'un morphisme géométrique entre deux catégories possédant des produits fibrés et utiliser ce résultat pour formuler une version interne du théorème de Giraud au-dessus d'un topos élémentaire. En particulier, ceci fournira une démonstration plus simple du théorème de Diaconescu [3].

Pour ce faire, nous utiliserons la théorie des catégories fibrées telle que l'a développée J. Bénabou [2]. Rappelons en ici quelques définitions fondamentales. Considérons une catégorie $\mathbb{B}$ possédant des limites à gauche finies.

Une fibration C sur $\mathbb{B}$ est à $\mathbb{B}$ - sommes si C est une bifibration vérifiant la condition de Beck-Chevaley. On écrira $X \rightarrowtail \coprod_u X$ pour désigner un morphisme cocartésien de source X au-dessus d'un morphisme u de $\mathbb{B}$. Les sommes sont universelles si les morphismes cocartésiens sont universels et disjointes si le morphisme canonique de X vers $X \times_{\coprod_u X} X$ est cocartésien pour tout morphisme u de la base $\mathbb{B}$ et tout objet X de la fibre de C au-dessus de la source de u.

Une fibration $C : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ est localement petite si pour tout I de $\mathbb{B}$ et tout couple d'objets X,Y de C(I), fibre en I de C, on peut trouver un morphisme $p : \mathrm{Hom}_I(X,Y) \to I$ et une flèche $\delta_{XY} : p^*X \to p^*Y$ qui soit universelle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : J \to I$ de $\mathbb{B}$ et tout $g : u^*X \to u^*Y$ il y a un unique $v : J \to \mathrm{Hom}_I(X,Y)$ pour lequel $u = pv$ et $v^*(\delta_{XY}) = g$. Si C est localement petite, on peut construire pour tous X et Y dans $C(I)$ et $C(J)$ respectivement, un objet $\mathrm{Hom}(X,Y) \to I \times J$ de $\mathbb{B}_{I\times J}$ en posant $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{I\times J}(p_I^*X, p_J^*Y)$ sachant que p_I et p_J sont les deux projections de source $I \times J$.

Si la fibration C possède un objet final, on dira que C est à sections globales si pour tout I de $\mathbb{B}$ et tout X de $C(I)$, l'objet $\mathrm{Hom}(1,X)$ de B/I existe.

Un objet G de $C(I)$ est un objet de générateurs ou une famille génératrice si pour tout J de $\mathbb{B}$ et tout couple (f,g) de flèches distrinctes de X vers Y dans $C(J)$, il existe un objet K de $\mathbb{B}$ muni de flèches $\partial_0 : K \to I$ et $\partial_1 : K \to J$ et une flèche $h : \partial_0^*G \to X$ au-dessus de ∂_1 telle que $fh \neq gh$. Ceci se schématise dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G & \partial_0^*G \arrow[l, squiggly] \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
I & K \arrow[l, "\partial_0"'] \arrow[r, "\partial_1"] & J &
\end{tikzcd}$$

où la notation $\partial_0^*G \rightsquigarrow G$ signale que ce morphisme est cartésien au-dessus de ∂_0.

Si $\mathbb{B}$ est une catégorie possédant des produits fibrés, le foncteur $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ donne lieu à une fibration que l'on note B, dont la fibre en X est $\mathbb{B}/_X$ et qui possède toujours un objet final, des sections globales et des $\mathbb{B}$-sommes disjointes et universelles. Si de plus $\mathbb{B}$ a un objet final 1, alors l'objet 1 de la fibre en 1 de B est générateur.

Si $F : \mathbb{B} \to \mathbb{E}$ est un foncteur entre catégories possédant des limites à gauche finies et si D est une catégorie fibrée sur $\mathbb{E}$, on peut lui associer une catégorie F^*D fibrée sur $\mathbb{B}$, dont la fibre en I est $D(FI)$. Par ailleurs à une fibration C sur $\mathbb{B}$, on peut associer

une catégorie $F_!C$ fibrée sur $\mathbb{E}$, dont la fibre en J de $\mathbb{E}$ est $\varinjlim_{(J,F)^{op}} \partial_0^*C$, ∂_0 étant le foncteur usuel de la catégorie comma $(J,F)^{op}$ vers $\mathbb{B}$.

En particulier, si $(U,F) : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ est un morphisme géométrique, c'est-à-dire que F est exact à gauche et adjoint à gauche de U, on lui associe canoniquement la fibration $F^*(E)$. On montre que sous ces conditions $F^*(E)$ et $U_!(B)$ sont équivalentes et que F^*E possède des limites à gauche finies, des $\mathbb{B}$-sommes disjointes et universelles et des sections globales. De plus, le couple (U,F) s'étend en un morphisme géométrique $(\overline{U},\overline{F})$ de $F^*(E)$ dans B. Au niveau I, on définit le couple $(\overline{U}_I,\overline{F}_I)$ en prenant pour $\overline{U}_I(X \xrightarrow{\alpha} f^*I)$ le produit fibré de $U\alpha$ le long de l'unité $\eta_I : I \to UFI$ de l'adjonction et pour $\overline{F}_I(u)$ le morphisme $F(u)$.

2. Lemmes techniques

Soit C une fibration sur $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies.

a. *Si* C a des $\mathbb{B}$-sommes disjointes et universelles,
Alors pour tout morphisme u de $\mathbb{B}$, le foncteur $\coprod_u$ respecte les produits fibrés.

b. *Si* C a des $\mathbb{B}$-sommes universelles,
Alors le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\coprod_u u^*X \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_u u^*f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\coprod_u u^*Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

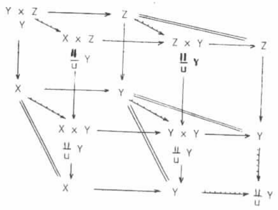
sachant que les morphismes horizontaux sont les counités de l'adjonction.

c. *Si* C a des 𝔹 sommes disjointes et universelles.
Alors les diagrammes du type
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \coprod_u X \arrow[d, "\coprod_u f"] \\ Y \arrow[r] & \coprod_u Y \end{tikzcd}$$
au-dessus de u sont des produits fibrés.

démonstration.

a. Il s'agit de montrer que $\coprod_u X \times_{\coprod_u Y} \coprod_u Z$ et $\coprod_u (X \times_Y Z)$ sont isomorphes. Pour cela, nous allons construire un morphisme cocartésien au-dessus de u de $X \times_Y Z$ dans $\coprod_u X \times_{\coprod_u Y} \coprod_u Z$. Cette construction se fait en deux étapes.

a.1 Comme les sommes sont disjointes, on sait que le morphisme canonique de Y vers $Y \times_{\coprod_u Y} Y$ au-dessus de la diagonale est cocartésien.



Le caractère universel des sommes assure le respect par produit fibré de la nature cocartésienne de ce morphisme par produit fibré. Dans le diagramme ci-dessus, chaque carré est un produit fibré. Ceci donne lieu à un morphisme cocartésien de $X \times_Y Z$ dans $X \times_{\coprod_u Y} Z$.

a.2 On montre aisément puisque les sommes sont universelles, qu'il y a un morphisme cocartésien de $X \times_{\coprod_u Y} Z$ vers $\coprod_u X \times_{\coprod_u Y} \coprod_u Z$, d'où vient la thèse.

b. Soit A le produit fibré de f et g.
Le produit fibré de A le long du morphisme cocartésien $u^*Y \to \coprod_u u^*Y$ donne un morphisme cocartésien au-dessus de u. Mais ce produit fibré n'est autre que u^*X lui-même car la composée $u^*Y \to \coprod_u u^*Y \to Y$ est cartésienne. Donc nous avons construit un morphisme cocartésien de u^*X vers A, et A est donc bien isomorphe à $\coprod_u u^*X$.

c. Puisque les sommes sont disjointes et universelles, des arguments similaires à ceux qui précèdent permettent d'assurer que la factorisation de X à travers $X \times_{\coprod_u Y} Y$ est cocartésienne. Par ailleurs, $X \times_{\coprod_u Y} Y$ peut s'obtenir par le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} X \times_{\coprod_u Y} Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \times_{\coprod_u Y} \coprod_u X \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_u X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \coprod_u Y \end{tikzcd}$$

ce qui assure par composition l'existence d'un morphisme cocartésien de X vers $Y \times_{\coprod_u Y} \coprod_u X$ au-dessus de l'identité; ce ne peut être qu'un isomorphisme. □

3. Les fibrations géométriques.

Une fibration C sur $\mathbb{B}$ est une *fibration géométrique* si elle possède des limites à gauche finies et s'il y a un morphisme géométrique $(U,F) : C \to \mathbb{B}$ tel que C soit équivalente comme fibration à $F_1^*(\mathbb{E})$ si $\mathbb{E}$ est la fibre en 1 de C.

Remarquons que la catégorie fibrée canoniquement associée à un morphisme géométrique est géométrique. En fait, on peut caractériser les fibrations géométriques et donc donner des conditions nécessaires et suffisantes en termes de fibration pour qu'il y ait un morphisme géométrique entre deux catégories. La caractérisation est donnée par le théorème suivant (*) :

THEOREME

Soit une fibration C à limites à gauche sur une catégorie $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies.

C est géométrique

ssi

C possède des $\mathbb{B}$-sommes disjointes universelles et des sections globales.

Démonstration.

La condition nécessaire est claire. En effet, par hypothèse, la fibration C est équivalente à $F^*\mathbb{E}$ où à $U_!\mathbb{B}$ pour un certain morphisme géométrique $(U,F) : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$. Or F^* respecte les sommes disjointes universelles et $U_!$ les sections globales (voir [2]). Pour la condition suffisante, nous allons supposer que C est scindée. Si elle ne l'est pas, on prend une fibration C' scindée équivalente à C; comme la notion de fibration géométrique est définie à équivalence près, le passage à C' ne pose pas de problème.

(*) Dans une version préliminaire de ce théorème, je n'avais mis en évidence que la condition suffisante. Je remercie J. Bénabou de m'avoir signalé que la condition nécessaire s'obtenait facilement comme conséquence de ses travaux [2,ch.8 et 9].

1. Construction d'un morphisme géométrique $(U,F) : C \to \mathbb{B}$.

a. A chaque niveau I de $\mathbb{B}$, il faut définir un couple de foncteurs adjoints (U_I, F_I). On pose $U_I(X) = \mathrm{Hom}(1,X)$ pour tout X dans C(I). Cela fournit bien un foncteur $U_I : C(I) \to \mathbb{B}_{/I}$. Quant à $F_I : \mathbb{B}_{/I} \to C(I)$, il se définit sur les objets par $F_I(u) = \coprod_u \varepsilon_J^* 1$ si $u : J \to I$ et $\varepsilon_J : J \to 1$ sont des morphismes de $\mathbb{B}$. Comme C est scindée, F_I devient un foncteur.

Les foncteurs U et F ainsi obtenus sont cartésiens. En effet, pour F c'est une conséquence de la condition de Beck-Chevaley et pour U, cela découle du fait que le carré suivant est un produit fibré.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(1,u^*X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(1,X) \arrow[d] \\
J \arrow[r, "u"] & I
\end{tikzcd}$$

b. F_I est adjoint à gauche de U_I, comme le montre la suite d'isomorphismes canoniques que voici :

$$\mathrm{Hom}_{C(J)}(\coprod_u \varepsilon_J^* 1, X) \simeq \mathrm{Hom}_{C(1)}(\varepsilon_J^* 1, u^*X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/_I}(u, \mathrm{Hom}(1,X)).$$

c. Enfin F_I est exact à gauche.

Le respect de l'objet final est évident.

Considérons un produit fibré dans $\mathbb{B}/_I$. Prouver que F_I respecte ce produit revient à démontrer que $\coprod_{ufg'} \varepsilon^*_{K \times_J L} 1$ est isomorphe à

$$\begin{tikzcd}
K \times_J L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & L \arrow[d, "g"] & \\
K \arrow[r, "f"'] & J \arrow[dr, "u"] & \\
 & & I
\end{tikzcd}$$

$\coprod_{uf} \varepsilon_K^* 1 \underset{\coprod_u \varepsilon_J^* 1}{\times} \coprod_{ug} \varepsilon_L^* 1$. Grâce au lemme 2.a et au fait que C a des sommes disjointes et universelles, il suffit de montrer que $\coprod_{fg} \varepsilon^*_{K \times_J L} 1$ est isomorphe à $\coprod_f \varepsilon_K^* 1 \underset{\varepsilon_J^* 1}{\times} \coprod_g \varepsilon_C^* 1$, ce qui découle immédiatement de l'universalité des sommes.

2. La fibration C est équivalente à F_1^*E.

Nous allons construire deux foncteurs $\alpha : C \to F_1^*E$ et $\beta : F_1^*E \to C$ et montrer qu'ils induisent une équivalence.

a. Construction de α.

A un objet X de C(I), α_I associe l'unique morphisme de $\coprod_{\varepsilon_I} X$ dans $\coprod_{\varepsilon_I} \varepsilon_I^*1 = F_I(1)$ rendant le carré de gauche suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \coprod_{\varepsilon_I} X \arrow[d] \\ \varepsilon_I^* 1 \arrow[r, dotted] & \coprod_{\varepsilon_I} \varepsilon_I^*1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_{\varepsilon_I} \coprod_u u^*X \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{\varepsilon_I} X \arrow[d] \\ \coprod_{\varepsilon_I} \coprod_u u^* \varepsilon_I^*1 \arrow[r] & \coprod_{\varepsilon_I} \varepsilon_I^*1 \end{tikzcd}$$

Ceci donne lieu à un foncteur cartésien, car on se convainc facilement que le carré ci-dessus à droite est un produit fibré grâce aux deux premiers lemmes techniques.

b. Construction de β.

On pose $\beta_I(X \xrightarrow{f} \coprod_{\varepsilon_I} \varepsilon_I^*1) = X \underset{\coprod_{\varepsilon_I} \varepsilon_J^*1}{\times} \varepsilon_I^*1$. Comme les sommes sont universelles, il y a un morphisme cocartésien de $\beta_I f$ vers X au-dessus de ε_I; β respecte bien les morphismes cartésiens car les images réciproques s'obtiennent elles aussi par produit fibré.

c. α et β induisent une équivalence.

Il est clair que $\alpha\beta$ est isomorphe à l'identité et le troisième lemme technique implique que $\beta\alpha$ l'est aussi. □

Remarques :

1. Si la catégorie de base $\mathbb{B}$ est seulement à produit fibré, on a

encore le résultat suivant : soit C une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies. C possède des sommes disjointes universelles et des sections globales

ssi

il y a un foncteur cartésien géométrique (U,F) : C → B.

2. Le foncteur cartésien géométrique (U,F) est unique à isomorphisme près, comme le montre la suite d'isomorphismes suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/_I}(u, U_I(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/_J}(1, u^*U_I(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/_J}(1, U_J(u^*X))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{C(J)}(F_J 1, u^*X) \simeq \mathrm{Hom}_{C(I)}(\coprod_u 1_J, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/_I}(u, \mathrm{Hom}(1,X))$$

où $u : J \to I$ est un morphisme de $\mathbb{B}/_I$, X un objet de C(I) et 1_J est l'objet final de la fibre en J de C. Remarquons que l'unicité du couple (U,F) dépend essentiellement du caractère cartésien de U et de l'exactitude à gauche de F.

4. Les objets comme limite à droite des générateurs.

Considérons une catégorie fibrée C sur $\mathbb{B}$ localement petite et possédant une famille génératrice G indexée par C. Notons $\underline{G} = (C_o, \mathrm{Hom}(GG), d_o, d_1, m, i)$ la sous-catégorie pleine engendrée par les générateurs telle qu'elle est décrite dans [2]. On sait par ailleurs qu'on peut lui associer une petite catégorie fibrée que l'on note encore $\underline{G}$ dont la fibre en I est $\mathrm{Hom}(I,\underline{G})$.
Soient X un objet de C(I) et $\underline{X}$ la sous-catégorie pleine interne à $\mathbb{B}$ qu'il engendre. Notons P et Q les plongements respectifs de $\underline{G}$ et $\underline{X}$ considérés comme fibrations dans C. Etant donné que C est localement petite par hypothèse, on sait que la catégorie comma (P,Q) est petite (voir [2],4.6.3). Elle est donc représentée, par une catégorie interne à $\mathbb{B}$ notée R_X et appelée *catégorie de représentation de X*. On voit facilement que Hom(GX) et $\mathrm{Hom}(GG) \underset{C_o}{\times} \mathrm{Hom}(G,X)$ sont les objets des objets et des flèches, ∂_o et ∂_1 sont respectivement la seconde projection et la composition. De plus,

R_x est muni canoniquement d'un foncteur 'source' noté σ_x vers $\underline{G}$. Nous allons voir que sous certaines conditions vérifiées par la catégorie fibrée C, X est isomorphe à $\varinjlim_{R_x} P \circ \sigma_x$.

Rappelons que $P \circ \sigma_x$ est représenté dans C par le diagramme ci-dessous où $(p;q) : \mathrm{Hom}(G,X) \to C_0 \times I$ est le morphisme structural, $\pi_1 : \mathrm{Hom}(GG) \times_{C_0} \mathrm{Hom}(GX) \to \mathrm{Hom}(GG)$ est la première projection et $\delta : d_0^*G \to d_1^*G$ est la famille générique des flèches de G dans G :

$$\begin{tikzcd} & \partial_0^* p^* G \arrow[dl, "\pi_1^*\delta"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\ \partial_1^* p^* G \arrow[rr, squiggly, "\beta"'] & & p^*G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(CG) \times_{C_0} \mathrm{Hom}(GX) \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \mathrm{Hom}(G,X) \arrow[r, "q"'] & I \end{tikzcd}$$

On appelle famille de cônes inductifs indexée par I et de base $P \circ \sigma_x$ un morphisme $g : p^*G \to Y$ au-dessus de q tel que $g \circ \alpha = g \circ \beta \circ \pi_1^*\delta$.

LEMME.

Si $g : p^*G \to Y$ est une famille de cônes inductifs indexée par I de base $P \circ \sigma_x$

Alors le contour extérieur du diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} p^*G \times_X p^*G \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[d, "pr_1"] & p^*G \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "g"] & \\ p^*G \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "g"'] & X & \\ & & X \end{tikzcd}$$

sachant que f est le morphisme canonique induit par la famille générique de flèches de p^*G dans q^*X.

La démonstration de ce lemme étant assez technique, bien que simple, nous renvoyons le lecteur à [5].

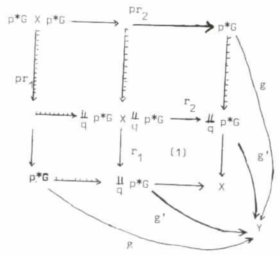
THEOREME

Si C'est une fibration sur $\mathbb{B}$ localement petite, à limites à gauche finies, à $\mathbb{B}$-sommes universelles, telle que dans chaque fibre les relations d'équivalence sont effectives et les épimorphismes sont des coégalisateurs,

Alors pour tout X de C(I), $X \simeq \varinjlim_{R_x} P \circ \sigma_x$.

Démonstration.

Il s'agit de prouver que toute famille de cônes inductifs $g : p^*G \to Y$ indexée par I et de base $P \circ \sigma_x$ donne lieu à une unique factorisation $k : X \to Y$ telle que $g = k \circ f$.



Par le lemme qui précède, nous savons que g coégalise pr_1 et pr_2. De plus, g se factorise à travers $\coprod_q p^*G$ par g'. Mais alors $g'r_1 = g'r_2$ car $g'r_1$ et $g'r_2$ coïncident précédé du morphisme cocartésien de $p^*G \times_X p^*G$ vers $\coprod_q p^*G \times_X \coprod_q p^*G$ dont l'existence est assurée par le caractère universel des sommes. Comme (1) est une somme amalgamée puisque $\coprod_q p^*G \times_X \coprod_q p^*G$ est une relation d'équivalence effective et $\coprod_q p^*G \to X$ est un épimorphisme. D'où il y a un unique $k : X \to Y$; c'est le morphisme attendu. □

5. Limites à droite filtrantes.

Soit C une fibration localement petite sur $\mathbb{B}$ et à limites à gauche finies. Une *famille génératrice* G est dite *filtrante* (resp. *cofiltrante*) si la sous-catégorie pleine $\underline{G}$ qu'elle engendre est filtrante (resp. cofiltrante). Une famille génératrice G indexée par C_o *contient l'objet final* (resp. *initial*) s'il y a un morphisme $f : 1 \to C_o$ tel que $f^*G \simeq 1$ (resp. $f^*G \simeq 0$).
Il est facile de voir que si G contient l'objet final (resp. initial), la catégorie interne $\underline{G}$ possède un objet final (resp. initial).

Proposition

Supposons que $\mathbb{B}$ possède des sommes finies disjointes et universelles.

a. *Si* C est une fibration sur $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies, à sommes finies et localement petite

Alors toute famille génératrice peut se prolonger en une famille génératrice filtrante.

b. *Si* C est une fibration sur $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies, $\mathbb{B}$-sommes et localement petite

Alors toute famille génératrice peut se prolonger en une famille génératrice cofiltrante.

Démonstration. Soit G indexée par C_o une famille génératrice.

a. On pose $G' = G \amalg 1$ indexé par $C_o \amalg 1$. Il est facile de voir que G' contient l'objet final d'où G' est filtrante.

b. On pose $G' = \coprod_\varepsilon G$ sachant que $\varepsilon : C_o \to C_o \amalg 1$ est l'injection canonique. Comme G' contient l'objet initial, G' est cofiltrante. □

THEOREME.

Si C est une fibration sur $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies, à sommes disjointes universelles, localement petite et exacte au sens de Barr [1],

Alors les limites à droite filtrantes (resp. faiblement filtrantes) commutent aux limites à gauche finies (resp. aux produits fibrés).

Démonstration

Soit $\underline{D}$ une catégorie filtrante (resp. faiblement filtrante) interne à $\mathbb{B}$. Il s'agit de prouver que le foncteur $\varinjlim_{\underline{D}} : C^{\underline{D}} \to C$ est exact à gauche (resp. respecte les produits fibrés).
Or vu les hypothèses satisfaites par C, on sait que C est géométrique; appelons $\Phi = (\Phi_*, \Phi^*)$ le foncteur géométrique de $C(1)$ vers $\mathbb{B}$ qui lui est associée. Pour chaque objet I de $\mathbb{B}$, on vérifie facilement que $C^{\underline{D}}(I)$ est équivalente à $C(I)^{\Phi^*\underline{D} \times \Phi^*I}$. Donc le foncteur $\varinjlim_{\underline{D}}$ regardé au niveau I est le foncteur

$$\varinjlim_{\Phi^*\underline{D} \times \Phi^*I} : C(I)^{\Phi^*\underline{D} \times \Phi^*I} \longrightarrow C(I).$$

Comme Φ^* est l'image réciproque d'un morphisme géométrique, $\Phi^*\underline{D} \times \Phi^*I$ est encore filtrante (resp. faiblement filtrante). Mais par hypothèse $C(I)$ est exacte. Dans ces conditions, Diaconescu [3] a démontré que le foncteur $\varinjlim_{\Phi^*\underline{D} \times \Phi^*I}$ est exact à gauche (resp. respecte les produits fibrés). La thèse est donc établie. □

6. Caractérisation des topos de Grothendieck.

Dans la suite, nous supposerons que la catégorie $\mathbb{E}$ est un topos. On dit qu'une catégorie $\mathbb{F}$ est un $\mathbb{E}$-topos de Grothendieck s'il y a une catégorie $\underline{C}$ interne à $\mathbb{E}$ est une topologie j dans le topos $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$ telles que $\mathbb{F}$ soit équivalente à $\mathbb{E}_j^{\underline{C}^{op}}$.

Proposition

Si $\mathbb{F}$ apparaît comme la fibre en 1 d'une fibration $\mathrm{Fam}\ \mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$

à limites à gauche finies, localement petite, à $\mathbb{E}$-sommes universelles, possédant une famille génératrice et des fibres où les relations d'équivalence sont effectives, où les épimorphismes sont des coégalisateurs et où les paires réflexives ont des coégalisateurs universels.

Alors il y a une catégorie $\underline{C}$ interne à $\mathbb{E}$ telle que Fam $\mathbb{F}$ se plonge pleinement fidèlement dans la fibration des préfaisceaux sur $\underline{C}$ et ce plongement admet un adjoint à gauche.

Démonstration.

Soit G indexée par C_o la famille génératrice. On prend pour catégorie $\underline{C}$ la catégorie $\underline{G}$ engendrée par la famille G. Rappelons que comme le topos $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$ est un topos au-dessus de $\mathbb{E}$, il lui est associé une fibration sur $\mathbb{E}$: c'est la catégorie fibrée construite à partir du morphisme géométrique canonique $f = (\lim_{\to \underline{C}^{op}}, C^*)$ de $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$ vers $\mathbb{E}$ que nous noterons Fam $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$, puisqu'elle représente la fibration des familles de préfaisceaux. La fibre en I de cette fibration est $\mathbb{E}^{C^*I^{op}}$.

a. Construction du plongement T : Fam $\mathbb{F} \to$ Fam $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$

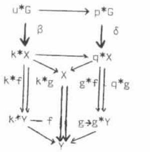
Soit X un objet de Fam $\mathbb{F}(I)$; on pose $TX = R_X$, catégorie de représentation de X qui est une op-fibration discrète sur $C^*(I) = \underline{C} \times I$, catégorie interne à $\mathbb{E}_{/I}$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de la fibre en I de Fam $\mathbb{F}$, le morphisme $q^*f \circ \delta : p^*G \to q^*Y$ donne lieu à un morphisme $Tf : \mathrm{Hom}(GX) \to \mathrm{Hom}(GY)$ au-dessus de $C_o \times I$ qui fait de T un foncteur de la fibre en I de Fam $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op} \times I}$. Rappelons que $(p,q) : \mathrm{Hom}(GX) \to C_o \times I$ est le morphisme décrivant canoniquement $\mathrm{Hom}(GX)$ comme objet de $\mathbb{E}/_{C_o \times I}$ et δ est la famille générique de flèches de G vers X.

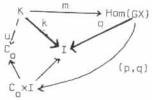
Comme le carré
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(G,u^*X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G,X) \arrow[d, "(p,q)"] \\ C_o \times J \arrow[r, "C_o \times u"] & C_o \times I \end{tikzcd}$$
est un produit fibré, nous obtenons un foncteur cartésien T de Fam $\mathbb{F}$ dans Fam $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$.

Remarquons enfin que TG est isomorphe à la famille génératrice des préfaisceaux représentables; T respecte donc les familles génératrices.

b. T est fidèle.

Soient deux morphismes $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ différents dans la fibre en I de Fam $\mathbb{F}$. Nous allons voir que Tf et Tg sont eux aussi différents.





En utilisant le caractère générateur de G, nous trouvons une flèche $(u,k) : K \to C_o \times I$ et un morphisme β de u^*G vers k^*X qui sépare k^*f et k^*g. Ce morphisme β est lui-même classifié par un morphisme $m : K \to \mathrm{Hom}(GX)$. Comme $qm = k$, le fait que $k^*f \circ \beta \neq k^*g \circ \beta$ entraîne que $q^*f \circ \delta \neq q^*g \circ \delta$ car $m^*\delta = \beta$; ces dernières induisent donc des morphismes Tf et Tg différents.

c. T est plein.

Soit $\alpha : \mathrm{Hom}(GX) \to \mathrm{Hom}(GY)$ une transformation naturelle de TX dans TY. Cela implique l'existence dans la fibre en Hom(GX) d'un morphisme $\overline{\alpha} : p^*G \to q^*Y$ rendant commutatif le pentagone ci-contre.

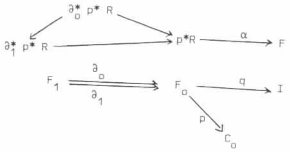
$$\begin{tikzcd} \partial_o^* p^* G \arrow[r] \arrow[d] & p^*G \arrow[dr, "\overline{\alpha}"] & \\ & & q^*Y \\ \partial_1^* p^* G \arrow[r] & p^*G \arrow[ur, "\overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}(GX) \underset{C_o}{\times} \mathrm{Hom}(GX) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_o}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(GX)$$

Nous avons donc un cône inductif de sommet Y. Donc par le théorème du point 4, il y a une factorisation (unique) f de X vers Y telle que $q^*f \circ \delta = \overline{\alpha}$, ce qui entraîne $Tf = \alpha$.

d. Construction de S adjoint à gauche de T.

Si R est la famille des préfaisceaux représentables image de G par T, nous savons que toute famille de préfaisceaux F indexée par I est limite à droite des représentables, comme le schématise le diagramme ci-dessous où F_0, F_1, ∂_0 et ∂_1 sont respectivement les objets des objets, des

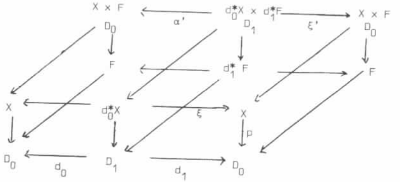


flèches, les morphismes "source" et "but" de R_F, catégorie de représentation de F.

On pose alors $SF = \varinjlim_{R_F} (P \circ \sigma_F)$; cette définition se prolonge aisément pour faire de S un foncteur cartésien : adjoint à gauche de T. En effet, il y a bijection entre les morphismes de SF vers X et les cônes de $P \circ \sigma_F$ de sommets X. Ces derniers sont en bijection avec les cônes de base $Y \circ \sigma_F$ (où Y est le plongement de Yoneda) et de sommet TX, vu le caractère pleinement fidèle de T, et donc avec les morphismes de F vers TX, ce qui achève la démonstration.

□

Rappelons que si $\mathbb{F}$ est une catégorie exacte au sens de Barr et $\underline{D}$ une catégorie interne à $\mathbb{F}$, on peut définir pour tout diagramme interne (X,ξ) un foncteur $- \otimes_{\underline{D}} X : \mathbb{F}^{\underline{D}^{op}} \to \mathbb{F}$ en associant au préfaisceau (F,α) l'objet $F \bar{\otimes}_{\underline{D}} X$ cogégalisateur des deux morphismes α' et ξ' de $d_0^*X \times d_1^*F$ vers $X \underset{D_0}{\times} F$ obtenus par factorisation dans le diagramme suivant où d_0^*X et d_1^*F sont les produits fibrés respectifs de X et F par d_0 et d_1.



En faisant remarquer que $d_0^*X \underset{D_1}{\times} d_1^* F$ est le produit fibré de $X \underset{D_0}{\times} F$ par ξ, Diaconescu [3] montre que

$$F \otimes_{\underline{D}} X = \varinjlim_{R_X^{op}} (X \underset{D_0}{\times} F, \alpha') = \varinjlim_{R_X^{op}} (p^{op})^* (F,\alpha)$$

si $p : R_X \to \underline{D}$ est le foncteur canonique.

En conséquence, le foncteur $- \otimes_{\underline{D}} X$ est exact à gauche si R_X^{op} est filtrante ou encore si R_X est cofiltrante.

En particulier, $- \otimes_{\underline{D}} X$ respectera les produits fibrés si la catégorie de représentation de X est faiblement cofiltrante.

Nous allons utiliser ce résultat pour montrer que le foncteur S que nous venons de construire est exact à gauche sous de bonnes hypothèses. Pour cela, nous allons montrer que S peut s'écrire comme un certain produit tensoriel; ceci fait l'objet du lemme suivant.

<u>LEMME</u>.

Si la fibration Fam $\mathbb{F}$ de la proposition précédente possède en plus des sommes disjointes,

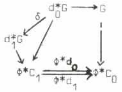
Alors $SF \simeq \Phi^*F \otimes_{\Phi^*\underline{C}} P$ si F est dans la fibre en 1, P est le plongement de la sous-catégorie pleine $\underline{C}$ engendrée par les générateurs et Φ est le morphisme géométrique dont l'existence est garantie par le théorème du point 3.

Démonstration

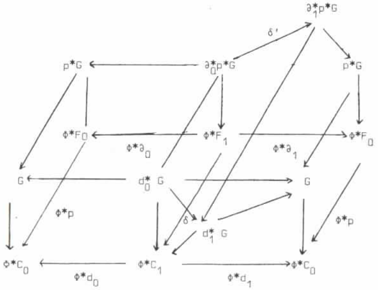
Considérons le préfaisceau F décrit par

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] \arrow[d, "q"'] & F_0 \arrow[d, "p"] \\ C_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & C. \end{tikzcd}$$

Nous savons par ailleurs que P est décrit par le diagramme ci-dessous dans la catégorie $\mathbb{F}$.



Comme Φ^* est exact à gauche, Φ^*F devient un préfaisceau interne à $\mathbb{F}$ au-dessus de $\Phi^*\underline{C}$. En vertu de la structure géométrique de Fam $\mathbb{F}$, il est clair que $\Phi^*F_0 \times_{\Phi^*C_0} G \cong p^*G$ et $\Phi^*F_1 \times_{\Phi^*C_1} d_0^* G \cong \partial_0^* p^* G$ comme le manifeste le diagramme ci-dessous.



Quant aux deux morphismes de $\partial_0^*p^*G$ vers p^*G, il s'agit bien des morphismes dont le coégalisateur est SF par construction, d'où on a bien $SF \cong \Phi^*F \otimes_{\Phi^*\underline{C}} P$. □

En fait, on peut montrer que si F est dans la fibre en I de Fam $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$, SF est isomorphe à $\Phi^*F \otimes_{\Phi^*\underline{C}\times\Phi^*I} P \circ U$ où $U : \Phi^*\underline{C} \times \Phi^*I \to \Phi^*\underline{C}$ est le foncteur de projection.

Nous avons maintenant rassemblé le matériel nécessaire pour démontrer le théorème de Giraud.

Théorème de Giraud.

Soient $\mathbb{E}$ un topos et $\mathbb{F}$ une catégorie quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbb{F}$ est un $\mathbb{E}$-topos de Grothendieck

(ii) la catégorie $\mathbb{F}$ apparaît comme la fibre en 1 d'une fibration Fam $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$
- à limites à gauche finies
- à $\mathbb{E}$-sommes disjointes universelles
- localement petite
- possédant une famille génératrice
- exacte au sens de Barr
- où chaque fibre possède des coégalisateurs universels de paires réflexives.

Démonstration.

Si $\mathbb{F}$ est équivalente à $\mathbb{E}_j^{\underline{C}^{op}}$ pour une certaine catégorie interne $\underline{C}$ à $\mathbb{E}$ et une topologie j, $\mathbb{F}$ satisfait les conditions (ii).
En effet, $\mathbb{F}$ est alors un topos borné sur $\mathbb{E}$. La seule condition non triviale à vérifier est celle relative à la famille génératrice, qui fait l'objet d'un théorème de J. Bénabou : un morphisme géométrique est borné ssi la fibration qui lui est associée possède une famille génératrice.

Inversément, supposons que $\mathbb{F}$ satisfasse toutes les conditions (ii).
Nous avons vu que Fam $\mathbb{F}$ se plonge de manière pleinement fidèle dans la fibration des familles de préfaisceaux sur la sous-catégorie pleine $\underline{C}$ engendrée par les générateurs et que ce plongement T admet un adjoint à gauche S.
En utilisant le caractère pleinement fidèle et exact à gauche de T, on voit facilement que $S1 \simeq ST1 \simeq 1$.
Reste à voir que S respecte les produits fibrés.
Or nous pouvons supposer que $\underline{C}$ est cofiltrante, car si elle ne l'est pas, nous avons vu qu'on peut compléter la famille génératrice pour qu'elle le devienne. De plus, Fam $\mathbb{F}$ est géométrique; appelons Φ le morphisme géométrique qui lui est associé.
Comme Φ^* est exact à gauche et à droite, $\Phi^*\underline{C}^{op}$ est filtrante et donc la opfibration discrète $\mathbb{P}$ associée au plongement P de $\Phi^*\underline{C}$ dans $\mathbb{F}$ est faiblement filtrante (voir [4],2.56). En conséquence, le foncteur $- \otimes_{\Phi^*\underline{C}} P$ respecte les produits fibrés.

Mais on sait que le foncteur S restreint aux fibres en 1 s'écrit comme la composée $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}} \xrightarrow{\overline{\Phi}^*} \mathbb{F}^{\Phi^*\underline{C}^{op}} \xrightarrow{- \otimes_{\Phi^*\underline{C}} P} \mathbb{F}$ où $\overline{\Phi}^*$ défini par $\overline{\Phi}^*F = (\Phi^*F_0, \Phi^*F_1, \Phi^*\partial_0, \Phi^*\partial_1)$ est exact à gauche. Puisque S est la composée de foncteurs respectant les produits fibrés, il les respecte également.
Ainsi $\mathbb{F}$ est une sous-catégorie exacte réflexive de $\mathbb{E}^{\underline{C}^{op}}$, il y a donc une topologie j telle que

$$\mathbb{F} \simeq \mathbb{E}_j^{\underline{C}^{op}}$$

ce qu'achève la démonstration. $\square$

Corollaires

1. Le topos $\mathbb{F}$ est borné sur $\mathbb{E}$ ssi c'est un $\mathbb{E}$-topos de Grothendieck (théorème de Diaconescu)
2. *Si* $\mathbb{F}$ vérifie les hypothèses du (ii) ci-dessus, *Alors* Fam $\mathbb{F}$ est well-powered.

Démonstration

1. C'est une conséquence du théorème de Giraud et du résultat déjà énoncé liant l'existence de famille génératrice et le caractère borné.
2. On sait que chaque fibre de Fam $\mathbb{F}$ est un topos et que Fam $\mathbb{F}$ est géométrique. Soient X dans la fibre en I et Ω_I l'objet classifiant les monomorphismes dans Fam $\mathbb{F}(I)$. On construit Sub X grâce au produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}\ X \arrow[r] \arrow[d] & \Phi_*(\Omega_I^X). \arrow[d] \\ I \arrow[r, "\eta_I"'] & \Phi_*\Phi^*I \end{tikzcd}$$

$\square$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BARR M., "Exact Categories" L.N. in Math, 236, Springer, 1971.

[2] BENABOU J., "Cours sur les catégories fibrées" Louvain-la-Neuve 1980, à paraître.

[3] DIACONESCU R., "Change of base for toposes with generators" J. Pure and Applied Algebra 6, 1975.

[4] JOHNSTONE P.T., "Topos Theory" Academic Press 1977.

[5] MOENS J.-L., "Caractérisation des topos de faisceaux sur un site interne à un topos" dissertation doctorale 1982, Louvain-la-Neuve.