

Chapitre 1 : Préliminaires sur les catégories fibrées.

Dans ce chapitre, on trouvera un certain nombre de définitions et propriétés qui nous seront utiles par la suite. Parmi celles-ci, soulignons la notion de fibration géométrique, la possibilité d'exprimer un objet comme limite à droite de générateurs et l'étude des limites à droite filtrantes dans une fibration.

Tout au long de ce chapitre, la catégorie de base \mathcal{E} sera simplement supposée posséder des limites à gauche finies. Si des hypothèses supplémentaires s'avèrent nécessaires, nous le signalerons en temps voulu.

1.1 Les fibrations géométriques.

Nous avons vu en 0.210.b qu'à un morphisme géométrique $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, on peut associer une fibration notée \mathcal{F}/f sur \mathcal{E} . Ce type de fibration joue un rôle très important, manifesté entre autre par le résultat central de cette section, à savoir que pour qu'une fibration à limites à gauche finies soit géométrique, il suffit qu'elle soit localement petite et possède des sommes disjointes et universelles (1.14).

1.11 Définition

Une fibration $C: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ est une fibration géométrique si elle possède des limites à gauche finies et s'il y a un morphisme géométrique $\Phi: C \rightarrow \mathcal{E}$ tel que C soit équivalente comme fibration à $C(2)/\Phi_1$.

La fibration \mathcal{F}/f associée au morphisme géométrique $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ est bien évidemment géométrique, de même que $\mathcal{E}: \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}$ puisqu'elle peut avoir comme \mathcal{E}/id .

1.12 Proposition

Soit $C: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ une fibration géométrique.

- (i) Si C est continuellement fermé, alors elle est localement petite.
- (ii) Si $C(1)$ est un topos, alors C est well-powered.

démonstration.

Soit Φ le morphisme géométrique associé à C .

- (i) Soient α et β deux objets de la fibre en I ; leur exponentiation β^α est en core un objet de cette fibre. On pose alors $\text{Hom}_I(\alpha, \beta) = (\overline{\Phi}_*)_I(\beta^\alpha)$, c'est-à-dire que $\text{Hom}_I(\alpha, \beta)$ s'obtient par le produit fibre de $\overline{\Phi}_*(\beta^\alpha)$ le long de l'unité $\eta_I: I \rightarrow \overline{\Phi}_* \overline{\Phi}^* I$ comme nous l'avons vu en 0.210. b.

L'objet $\text{Hom}_I(\alpha, \beta) \rightarrow I$ ainsi construit jouit bien de toutes les propriétés désirées. En effet les morphismes dans \mathbb{E}/I de $u: J \rightarrow I$ vers $\text{Hom}_I(\alpha, \beta)$ sont exactement ceux de $\overline{\Phi}^* u$ vers β^α dans $\mathbb{F}/\overline{\Phi}^* I$. Par adjonction cartésienne dans $\mathbb{F}/\overline{\Phi}^* I$, ces derniers correspondent bien aux morphismes de $u^* \alpha$ vers $u^* \beta$, ce qui assure le caractère localement petit.

- (ii) La démonstration est semblable.

On peut aussi obtenir le résultat ci-dessus en remarquant que la fibration \mathbb{F}/f associée au morphisme géométrique $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ s'obtient par changement de base de la fibration \mathbb{F} le long de f^* . Le caractère géométrique de f assure alors le respect des propriétés attendues (voir [6]). Cette proposition a pour corollaire que les fibrations associées aux morphismes géométriques entre topos sont toujours localement petites et well-powered.

Nous allons voir que le caractère localement petit est lié à l'aspect géométrique d'une fibration. Pour cela, nous avons besoin des lemmes suivants.

1.13 Lemmes

Soit C une catégorie fibrée sur \mathbb{E} .

- a. Si C a des sommes infinies disjointes et universelles

Alors pour tout morphisme u de \mathbb{E} , \coprod_u respecte les produits fibrés.

b. Si \mathcal{C} a des sommes infinies universelles,

Alors le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \coprod_u u^* X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \coprod_u u^* Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array},$$

sachant que les morphismes horizontaux sont les counités de l'adjonction.

c. Si \mathcal{C} a des sommes infinies disjointes et universelles,

Alors les diagrammes du type

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \coprod_u X \\ \downarrow f & & \downarrow \coprod_u f \\ Y & \xrightarrow{\quad} & \coprod_u Y \end{array}$$

au-dessus de u sont des produits fibrés.

démonstration.

a. Il s'agit de montrer que $\coprod_u X \times_{\coprod_u Y} \coprod_u Z$ et $\coprod_u (X \times_Y Z)$ sont isomorphes.

Pour ce la nous allons construire un morphisme cocartésien au-dessus de u de $X \times_Y Z$ dans $\coprod_u X \times_{\coprod_u Y} \coprod_u Z$. Cette construction se fait en deux étapes.

a.1 Comme les sommes sont disjointes, on sait que le morphisme canonique de Y vers $Y \times_{\coprod_u Y} Y$ au-dessus de la diagonale est cocartésien.

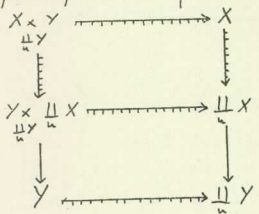
Le caractère universel des sommes assure le respect par produit fibre de la nature cocartésienne de ce morphisme par produit fibre. Dans le diagramme ci-dessus, chaque carré est un produit fibre. Ceci donne lieu à un morphisme cocartésien de $X \times_Y Z$ dans $X \times_{\coprod Y} Z$.

a.2 On montre aisément, puisque les sommes sont universelles, qu'il y a un morphisme cocartésien de $X \times_Y Z$ vers $\coprod_u X \times \coprod_u Z$.

b. Soit A le produit fibre de f et g .

Le produit fibre de A le long du morphisme cocartésien $u^* Y \rightrightarrows \coprod_u u^* Y$ donne un morphisme cocartésien au-dessus de u . Mais ce produit fibre n'est autre que $u^* X$ lui-même car la composée $u^* Y \rightrightarrows \coprod_u u^* Y \rightarrow Y$ est un morphisme cartésien. Donc nous avons construit un morphisme cocartésien de $u^* X$ vers A , et A est donc bien isomorphe à $\coprod_u u^* X$.

c. Puisque les sommes sont disjointes et universelles, des arguments similaires à ceux utilisés en 1.13.a2 permettent d'assurer que la factorisation de X à travers $X \times_Y Y$ est cocartésienne. Par ailleurs, $X \times_Y Y$ peut s'obtenir par le produit fibre suivant



ce qui assure par composition l'existence d'un morphisme cocartésien de X vers $Y \times_{\coprod_u Y} \coprod_u X$ au-dessus de l'identité; ce ne peut être qu'un isomorphisme.



Ces propriétés vont nous permettre de donner une condition suffisante pour qu'une fibration soit géométrique.

1.14 Théorème.

Si C est une fibration sur E à limites à gauche finies, à sommes disjointes et universelles et localement petite,

Alors C est géométrique.

démonstration.

Nous supposons C svidée. Si elle ne l'est pas, on prend une fibration C' svidée équivalente à C (l'existence d'une telle fibration est assurée par exemple par [6]). Comme la notion de fibration géométrique est définie à équivalence près, le passage à C' ne pose pas de problème.

1. Construction d'un morphisme géométrique $\Phi: C \rightarrow E$.

a. A chaque niveau I de E , il faut définir un couple de foncteurs adjoints $((\Phi_I)_*, \Phi_I^*)$.

Nous noterons ε_I l'unique morphisme de I vers 1 dans E .

Pour définir $(\Phi_I)_*: C(I) \rightarrow E/I$, on pose $(\Phi_I)_*(X) = \text{Hom}_I(\varepsilon_I^* 1, X)$.

Cela fournit bien un foncteur.

Quant à $\Phi_I^*: E/I \rightarrow C(I)$, il se définit sur les objets par

$\Phi_I^*(u) = \coprod_u \varepsilon_J^* 1$ si $u: J \rightarrow I$. Comme C est svidée, Φ_I^* devient un foncteur.

Les foncteurs Φ_* et Φ^* ainsi obtenus sont cartésiens. En effet, pour Φ^* c'est une conséquence de la condition de Chevaly-Beck et pour Φ_* cela découle du fait que le carré suivant est un produit fibre-

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\square}(\coprod_u \varepsilon_J^* 1, u^* X) & \longrightarrow & \text{Hom}_I(\varepsilon_I^* 1, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \xrightarrow{u} & I \end{array}$$

b. Φ_I^* est adjoint à gauche de $(\Phi_I)_*$.

En effet c'est une conséquence de la suite d'isomorphismes canoniques que voici:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}(I)} \left(\coprod_u \mathbb{E}_J^* 1, X \right) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}(I)} \left(\mathbb{E}_J^* 1, u^* X \right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{E}/I} \left(u, \text{Hom}_I \left(\mathbb{E}_J^* 1, X \right) \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{E}/I} \left(u, \left(\Phi_I \right)_* (X) \right). \end{aligned}$$

2. Enfin Φ_I^* est exact à gauche.

Le respect de l'objet final par Φ_I^* est évident.

Considérons un produit fibre dans \mathbb{E}/I . Prouver que Φ_I^* respecte ce produit fibre revient à démontrer que $\coprod_{uf} \mathbb{E}_{K \times L}^* 1$ est isomorphe à

$$\begin{array}{ccc} K \times L & \xrightarrow{f'} & L \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ K & \xrightarrow{f} & J \end{array} \xrightarrow{u} I$$

$$\coprod_{uf} \mathbb{E}_K^* 1 \times \coprod_{uf} \mathbb{E}_L^* 1.$$

Grâce au lemme 1.13a et au fait que \mathcal{C} a des sommes disjointes et universelles, il suffit de montrer que

$$\coprod_{uf} \mathbb{E}_{K \times L}^* 1 \simeq \coprod_f \mathbb{E}_K^* 1 \times \coprod_g \mathbb{E}_L^* 1.$$

Ceci découle aisément de l'universalité des sommes comme on le voit dans le diagramme ci-dessous où chaque rectangle est un produit fibre.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}_{K \times L}^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_f \mathbb{E}_K^* 1 \times \coprod_g \mathbb{E}_L^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{E}_I^* 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}_K^* 1 \times \coprod_g \mathbb{E}_L^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_f \mathbb{E}_K^* 1 \times \coprod_g \mathbb{E}_L^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_g \mathbb{E}_L^* 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}_K^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_f \mathbb{E}_K^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{E}_J^* 1 \end{array}$$

2. La fibration \mathcal{C} est équivalente à $\mathcal{C}(1)/\Phi_{I_1}$.

Nous allons construire deux foncteurs $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}(1)/\Phi_{I_1}$ et $G: \mathcal{C}(1)/\Phi_{I_1} \rightarrow \mathcal{C}$ et montrer qu'ils induisent une équivalence.

a. Construction de F .

A un objet X de $\mathcal{C}(I)$, F_I associe l'unique morphisme de $\coprod_{\mathbb{E}_I} X$ dans

$\coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1 = \overline{\Phi}_1^* (1)$ rendent le carré suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\mathcal{E}_I} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varepsilon_I^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1 \end{array} .$$

Ceci donne lieu à un foncteur cartésien. Pour le voir, il faut s'assurer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mathcal{E}_I} \coprod_{\mathcal{U}} u^* X & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\mathcal{E}_I} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\mathcal{E}_I} \coprod_{\mathcal{U}} u^* \varepsilon_I^* 1 & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1 \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{I} \end{array}$$

est un produit fibre. On s'en convainc facilement grâce aux lemmes 1.13 a et b.

b. Construction de G .

On pose $G_I(X \xrightarrow{f} \coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1) = X \times_{\substack{\coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1 \\ \mathcal{E}_I}} \varepsilon_I^* 1$. Comme les sommes sont

universelles, il y a un morphisme cocartésien de $G_I(f)$ vers X au-dessus de \mathcal{E}_I . G respecte bien les morphismes cartésiens car les images réciproques s'obtiennent elles aussi par produit fibre.

c. F et G induisent une équivalence de fibrations.

Tout d'abord, il est bien clair que $FG \cong \text{id}$ puisque le morphisme de $G_I f$ vers la source de f est cocartésien.

Pour que $GF \cong \text{id}$, il faut voir que $X \cong \coprod_{\mathcal{E}_I} X \times_{\substack{\coprod_{\mathcal{E}_I} \varepsilon_I^* 1 \\ \mathcal{E}_I}} \varepsilon_I^* 1$ ce qui

est vrai par le lemme 1.13. c. ☐

Notons en passant que ce théorème ne nécessite que des limites à gauche

finies comme hypothèses sur la base E .

Rappelons que si C est une fibration sur E et $F: E' \rightarrow E$ un foncteur le produit fibre de F et C donne encore lieu à une catégorie fibrée sur E' . C'est le changement de base de C par F et nous le noterons $F(C)$.

1.15 Proposition.

Soit D une catégorie interne à E .

Si C est une fibration géométrique ayant F comme fibre en 1 et induisant le morphisme géométrique $f = (f_*, f^*): F \rightarrow E$,

Alors les catégories fibrées C^D et $f^*(F^D)$ sont équivalentes.

démonstration.

Par le théorème qui précède, on sait que C est équivalente à F/f . La particularisation de la définition 0.24 à la fibration F/f assure qu'un objet de $C^D(I)$ est formé d'un couple (k, α) où $k: F_0 \rightarrow f^*D_0 \times f^*I$ est un morphisme de F et $\alpha: d_0^*F_0 \rightarrow d_1^*F_0$ un morphisme de F/f qui satisfait les conditions voulues. Or la fibre $f^*(F^D(I))$ n'est autre que $F^D(f^*I)$ et on voit facilement qu'un objet de cette dernière est exactement un couple (k, α) tel que décrit ci-dessus. D'où la thèse est démontrée. \square

Remarquons qu'on déduit de 0.210.2 que $F^D(f^*I)$ est équivalente à $F^D/f^*D \times f^*I$ et donc à $F^D \times f^*I$ par [2] 2.18, ou encore à $(F/f^*I)^D \times f^*I$ c'est-à-dire $k(I)^D \times f^*I$.

1.2 Générateurs globaux.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème de J. Bénabou selon lequel un morphisme géométrique est bon -ssi la fibration géométrique qui lui est associée possède une famille de générateurs au sens de 0.29.

Pour cela, nous introduisons la notion de générateur global qui correspond intuitivement à un objet de la fibre en s dont l'ensemble des sous-objets engendre la fibration tout entière. Nous verrons que sous certaines hypothèses, la somme globale (au-dessus de s) d'une famille génératrice est un générateur global. Réciproquement, dans une fibration well-powered, la famille générique des sous-objets d'un générateur global est une famille génératrice.

1.21 Définition.

Soit une fibration C sur E

Un objet G de $C(s)$ est un générateur global de C si pour tous objets I de E et X de $C(I)$, on peut trouver un morphisme $u: J \rightarrow I$ et un sous-objet S de $E_J^* G$ source d'un morphisme collectivement épimorphique (cfr 0.29) au-dessus de u et de but X .

Remarquons que l'existence d'un générateur global G dans la fibration géométrique \mathbb{F}/f associée au morphisme géométrique $f: F \rightarrow E$ implique que f soit borné. En effet, on vérifie facilement que G est un objet de générateurs de \mathbb{F} au-dessus de E au sens de Diaconescu [9]. Mais on a aussi la réciproque si les morphismes collectivement épimorphiques sont universels ou ce qui revient au même si les épimorphismes sont universels dans \mathbb{F} .

1.22 Lemme.

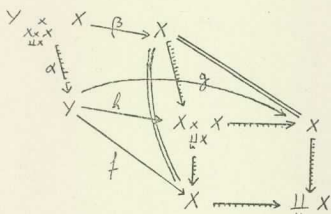
Si C est une fibration sur E à sommes infinies disjointes et universelles,

Alors le morphisme canonique de X dans $u^* \coprod_u X$ est un mono.

démonstration

Soient $f, g: Y \rightarrow X$ deux morphismes de $C(J)$ qui égalise $X \rightarrow u^* \coprod_u X$.
Mais alors f et g sont également égalisés par le morphisme cocartésien

$X \xrightarrow{\text{monomorphisme}} \coprod_{u \times X} X$, il y a donc une unique factorisation h de Y dans $X \times X$.
 Comme les sommes sont disjointes et universelles, on construit un morphisme cocartésien α de $\begin{matrix} Y \times X \\ \times \times X \\ \coprod \times X \end{matrix}$ dans Y

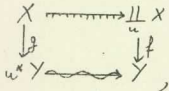


Il est clair que α cocgalise f et g puisque $f \circ \alpha = \beta = g \circ \alpha$; d'où $f = g$ en vertu du caractère cocartésien de α .

☒

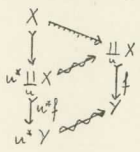
Collage.

Si \mathcal{C} est une fibration à sommes disjointes et universelles
 Alors dans tout carré commutatif du type suivant



si f est un monomorphisme, alors g l'est aussi.

démonstration.



Comme on le voit dans le diagramme ci-contre, g est la composée de deux monomorphismes.

☒

1.23 Proposition.

Si la fibration \mathcal{C} est géométrique sur \mathbb{E} et les épimorphismes de $\mathcal{C}(1)$ sont universels,

Alors les notions de générateurs globaux et d'objets de générateurs de $\mathcal{C}(A)$ sur E (au sens de Dinculescu) coïncident.

démonstration.

Il reste à voir que si G est un objet de générateurs de $\mathcal{C}(A)$ sur E , alors c'est un générateur global.

Nous avons déjà remarqué que toutes les fibrations géométriques possèdent des sommes disjointes et universelles (voir 0.210. b).

Soit X un objet de la fibre en I . On peut recouvrir $\coprod_{E_I} X$ par une famille S J -indérée de sous-objets de G . Comme les morphismes collectivement épimorphiques sont universels, le morphisme $X \times_{\coprod_{E_I} X} S \rightarrow X$ est

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \xrightarrow{\quad} \coprod_{E_I} X \\
 & \nearrow & \nearrow \\
 X \times S & \xrightarrow{\quad} & S \\
 \downarrow \coprod_{E_I} X & & \downarrow \\
 q^* \varepsilon_J^* G & \xrightarrow{\quad} & \varepsilon_J^* G \\
 & & \\
 I \times J & \xrightarrow{p} I & \xrightarrow{\varepsilon_I} 1 \\
 & \searrow q & \nearrow \varepsilon_J
 \end{array}$$

collectivement épimorphique au-dessus de la projection $I \times J \xrightarrow{p} I$. Par le corollaire du lemme 1.22, $X \times S$ s'injecte aussi dans $\varepsilon_{I \times J}^* G = q^* \varepsilon_J^* G$ ce qui achève la démonstration. \square

En particulier la proposition précédente s'applique aux fibrations associées aux morphismes géométriques entre Topos.

Nous allons maintenant étudier les liens entre la notion habituelle de famille génératrice due à J. Bénabou et celle de générateur global.

1.24 Proposition.

Si G est une famille génératrice indexée par \mathcal{C}_0 dans \mathcal{C} possédant

des sommes infinies disjointes et universelles et localement petite,
 Alors $\coprod_{\mathcal{E}_0} G$ est générateur global.

démonstration.

Soient un objet X de $\mathcal{C}(I)$ et $(p, q) : \text{Hom}(G, X) \rightarrow \mathcal{C}_0 \times I$ le morphisme induit par le caractère localement petit de \mathcal{C} .

On sait que le morphisme $p^* G \rightarrow X$ au-dessus de q est collectivement épimorphique (voir [6]). De plus, par le lemme 1.22, G s'injecte dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_0}^* \coprod_{\mathcal{E}_0} G$ d'où $p^* G$ est un sous-objet de $\mathcal{E}^* \coprod_{\mathcal{E}_0} G$ si \mathcal{E} est l'unique morphisme de $\text{Hom}(G, X)$ vers 1 dans \mathcal{E} .

Ceci achève de montrer que $\coprod_{\mathcal{E}_0} G$ est un générateur global. \square

Le passage dans l'autre sens est donné par la proposition suivante.

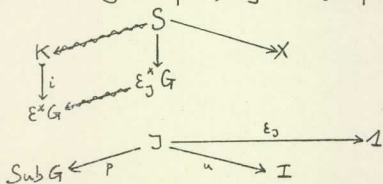
1.25 Proposition.

Si G est un générateur global dans une fibration \mathcal{C} well-powered
Alors la famille de tous les sous-objets de G est famille génératrice.

démonstration.

Dans la fibre en $\text{Sub } G$, il y a un monomorphisme générique $K \xrightarrow{i} \mathcal{E}^* G$ avec $\mathcal{E} : \text{Sub } G \rightarrow 1$ dans \mathcal{E} . Il s'agit de voir que K est une famille génératrice.

Soit X dans la fibre en I . On sait qu'il y a un morphisme $u : J \rightarrow I$ et un morphisme collectivement épimorphique d'un sous-objet S de $\mathcal{E}_J^* G$ vers X . Comme i est générique, il y a un (unique) morphisme $p : J \rightarrow \text{Sub } G$



tel que $p^* i$ soit $S \rightarrow \mathcal{E}_J^* G$. En conséquence, K indexé par $\text{Sub } G$ est bien

famille génératrice au sens de Bénabou.



Des résultats précédents, on déduit aisément le
1.26 Théorème (Bénabou)

Un morphisme géométrique entre deux topos est bon

SSI

la fibration qui lui est associée possède une famille génératrice.

1.3 Les objets comme limite à droite de générateurs.

Classiquement, sous certaines hypothèses, tout objet d'une catégorie admettant un ensemble de générateurs est limite à droite de ces générateurs (voir [11] par exemple). L'objet de ce paragraphe est d'étendre ce résultat aux fibrations.

Soit \mathcal{C} une fibration sur \mathbb{E} localement petite et G une famille de générateurs indexée par C_0 de \mathbb{E} .

Rappelons que les objets $\text{Hom}(G, X \times_Z Y)$ et $\text{Hom}(G, X) \times_{\text{Hom}(G, Z)} \text{Hom}(G, Y)$ sont isomorphes.

Notons $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, d_0, d_1, m, e)$ la sous-catégorie pleine engendrée par les générateurs (cf [6]). En particulier que le morphisme $(d_0, d_1): \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ n'est autre que la flèche structurale $\text{Hom}(G, G) \rightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$.

1.31 Definition.

On appelle catégorie de représentation d'un objet X de $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ la catégorie $\mathcal{R}_X = (\alpha_0, \alpha_1, \partial_0, \partial_1, \mu, \iota)$ interne à \mathbb{E}/\mathbb{I} construite comme suit:

- α_0 est le morphisme q sachant que $(p, q): \text{Hom}(G, X) \rightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathbb{I}$ est le morphisme structural,
- $\partial_1: \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, X)$ est la première projection,
- $\alpha_1 = q \circ \partial_1$,

- ∂_0 s'obtient en utilisant le caractère classifiant de $\text{Hom}(G, X)$. En effet dans la fibre au-dessous de $C_1 \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$, il y a un morphisme de $\mathbb{R}^* d_0^* G$ vers $d_1^* q^* X$ obtenu par composition des images réciproques des morphismes génériques $\delta: d_0^* G \rightarrow d_1^* G$ et $\gamma: p^* G \rightarrow q^* X$, comme le montre le diagramme ci-dessous où le carré de base est un produit fibre.

$$\begin{array}{ccccc}
 d_0^* G & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{R}^* d_0^* G & & \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \mathbb{R}^* \delta & & \\
 d_1^* G & \xleftarrow{\quad} & d_1^* p^* G & \xrightarrow{\quad} & p^* G \\
 & & \downarrow d_1^* \gamma & & \downarrow \gamma \\
 & & d_1^* q^* X & \xrightarrow{\quad} & q^* X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_1 \times_{C_0} \text{Hom}(G, X) & \xrightarrow{\quad \partial_0 \quad} & \text{Hom}(G, X) \\
 & \swarrow \alpha & & \searrow \beta & \\
 \text{Hom}(G, G) & & & & \text{Hom}(G, X) \\
 & \searrow d_1 & C_0 & \xleftarrow{\quad p \quad} & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Par définition de $\text{Hom}(G, X)$, il y a donc un unique morphisme ∂_0 de $C_1 \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ vers $\text{Hom}(G, X)$ tel que $q \partial_0 = \gamma \beta$, $\alpha \partial_0 = d_0 \alpha$, $p \partial_0 = d_0 p$ et $\partial_0^* \gamma \cong d_1^* \gamma \circ \mathbb{R}^* \delta$.

- les morphismes μ et ν sont obtenus grâce à la propriété suivante.

1.32 Lemme

Pour tous J de \mathbb{E} , $f, g: J \rightarrow C_0$ et $u: J \rightarrow I$ morphismes de \mathbb{E} , il y a un triangle commutatif du type

$$\begin{array}{ccc}
 & f^* G & \\
 g^* G & \xleftarrow{\quad} & u^* X \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

SSI

il y a un morphisme $k: J \rightarrow \text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ (unique) tel que $(d_0 \alpha, d_1 \alpha, \alpha) \circ k = (f, g, u)$.

En raccourci, $\text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ classifie tous les triangles de sommet X et de base G .

démonstration.

Nous allons associer au triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & f^* G & \\
 g^* G & \xleftarrow{\quad} & u^* X \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

un unique morph.

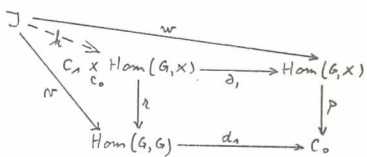
me de \mathcal{J} dans $\text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$. La flèche $f^*G \rightarrow g^*G$ donne lieu à un morphisme $w: \mathcal{J} \rightarrow \text{Hom}(G, G)$ et la flèche $g^*G \rightarrow u^*X$

$$(f, g) \rightarrow C_0 \times C_0 \xleftarrow{(d_0, d_0)}$$

quant à elle fournit $w: \mathcal{J} \rightarrow \text{Hom}(G, X)$. Comme le contour externe du diagramme

$$(g, u) \rightarrow C_0 \times I \xleftarrow{(p, A)}$$

rieur du diagramme



commute, il y a une unique factorisation k et il est clair que l'image réciproque par k du triangle

$$\begin{array}{ccc} r^* d_0^* G & \longrightarrow & \mathcal{J}^* g^* X \\ \downarrow & & \nearrow \\ r^* d_1^* G & & \end{array}$$

redonne le

Réciproquement tout morphisme de \mathcal{J} vers $C_1 \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ au-dessus de $C_0 \times C_0 \times I$ engendre par image réciproque un triangle commutatif au-dessus de \mathcal{J} ; ceci achève d'établir la bijection attendue.

□

En utilisant ce résultat, on construit aisément μ et ν . Ainsi, par exemple, la flèche ν est celle qui classifie le triangle commutatif trivial de la fibre $\text{Hom}(G, X)$.

$$\begin{array}{ccc} p^* G & \xrightarrow{\nu} & q^* X \\ p^* G & \xrightarrow{\mu} & q^* X \end{array}$$

La catégorie de représentation de X est munie d'un foncteur d'oubli vers la sous-catégorie pleine engendrée par les générateurs. Ils agit du foncteur "source", noté σ_X qui associe intuitivement à un morphisme d'un générateur vers un certain objet de la famille X ce générateur lui-même. Il est décrit par le couple $(\text{Hom}(G, X) \xrightarrow{p} C_0, \text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow{r} \text{Hom}(G, G))$. Ce foncteur interne est en fait par définition même une opfibration discrète au sens de Johnstone [12].

Si on compose ce foncteur interne avec le préfaisceau \mathbb{P} de \mathcal{C}^{cl} décrivant le plongement canonique de \mathcal{C} comme sous-catégorie

plaine de la fibration C , on obtient la famille de préfaisceaux indexée par I décrite par le diagramme

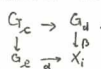


$$\text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow[\partial_1]{\partial_0} \text{Hom}(G, X) \longrightarrow I.$$

Notons Φ_X cet objet de $C^{\mathbb{R}_X}(1)$; le but de ce paragraphe est de montrer que $\lim_{\rightarrow \mathbb{R}_X} \Phi_X \cong X$ (voir 0.24 et 0.27) moyennant certaines

hypothèses sur C . Établissons tout d'abord quelques résultats préliminaires.

En combinant le fait que $\text{Hom}(G, p^*G) \cong \text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ et que $\text{Hom}(G, p^*G \times_X p^*G)$ est le produit fibre de ∂_0 avec lui-même (cf. la remarque faite au début de ce paragraphe), il est facile de voir que $\text{Hom}(G, p^*G \times_X p^*G)$ n'est autre que $\text{Hom}(G, p^*G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, p^*G)$ et qu'il est donc muni de deux projections ρ_1 et ρ_2 vers $\text{Hom}(G, G) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X)$ telles que $\partial_0 \rho_1 = \partial_0 \rho_2$. Intuitivement, $\text{Hom}(G, p^*G \times_X p^*G)$ est l'objet des carrés commutatifs



structural (∂_0, s_1) de $\text{Hom}(G, p^*G \times_X p^*G)$ vers $C_0 \times \text{Hom}(G, X) \times \text{Hom}(G, X)$ qui intuitivement fait correspondre au carré décrit plus haut le triple (c, α, β) , s'obtient en prenant pour s_0 le morphisme $\partial_0 \rho_1 = \partial_0 \rho_2 = p \partial_0 \rho_1 = p \partial_0 \rho_2$ et pour s_1 l'unique factorisation à travers le produit fibre $\text{Hom}(G, X) \times_{\mathbb{I}} \text{Hom}(G, X)$ des morphismes $\partial_1 \rho_1$ et $\partial_1 \rho_2$ qui sont tous deux égaux par q .

1.33 Lemme.

Si $g: p^*G \rightarrow Y$ est une famille de cônes inductifs indexée par I et de base Φ_X (g est alors au-dessus de q),

Alors le contour extérieur du diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 p^*G \times_X p^*G & \xrightarrow{p_2} & p^*G \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \alpha \\
 p^*G & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \searrow \beta & \\
 & & Y
 \end{array}$$

démonstration.

Rappelons que le produit fibre $p^*G \times_X p^*G$ se calcule dans la fibre en $\text{Hom}(GX) \times_{\mathbb{I}} \text{Hom}(GX)$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc}
 p^*G \times_X p^*G & \xrightarrow{p_2} & \pi_2^* p^*G \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \pi_2^* \delta \\
 \pi_1^* p^*G & \xrightarrow{\pi_1^* \beta} & \pi_1^* q^*X \\
 & \searrow & \\
 & & p^*G \xrightarrow{\delta} q^*X \rightarrow X
 \end{array}$$

$\text{Hom}(G, X) \times_{\mathbb{I}} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow{q} \mathbb{I}$

Les morphismes π_1 et π_2 sont les projections canoniques et sont coégalisés par q . Si on compose avec le morphisme cotangent au-dessus de s_1 de but $p^*G \times_X p^*G$ la flèche générique $\xi: s_0^*G \rightarrow s_1^*(p^*G \times_X p^*G)$, on obtient un morphisme α collectivement épimorphe. Pour établir la thèse, il suffira donc de prouver que $q\pi_1 \alpha = q\pi_2 \alpha$. Il est facile, par la définition de p_1 et p_2 , de voir que

$$s_1^*(p_1^*) \circ \xi = p_1^* \alpha^* \delta \quad \text{et} \quad s_1^*(p_2^*) \circ \xi = p_2^* \alpha^* \delta.$$

De plus comme $\pi_1 s_1 = d_1 p_1$ et $\pi_2 s_1 = d_2 p_2$,

$$s_1^* \pi_1^* \delta = p_1^* d_1^* \delta \quad \text{et} \quad s_1^* \pi_2^* \delta = p_2^* d_1^* \delta.$$

En conséquence nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned}
 s_1^*(\pi_1^* \delta) \circ s_1^*(p_1^*) &= p_1^* d_1^* \delta \circ p_1^* \alpha^* \delta = p_2^* d_1^* \delta \circ p_2^* \alpha^* \delta \\
 &= s_1^*(\pi_1^* \delta) \circ s_1^*(p_2^*).
 \end{aligned}$$

Notons β_0 et β_1 les factorisations des morphismes $d_0^* p^*G \rightarrow p^*G \xrightarrow{\delta} Y$ et $d_1^* p^*G \rightarrow p^*G \xrightarrow{\delta} Y$ à travers $\alpha^* Y$. Par hypothèse, nous savons que $\beta_0 = \beta_1 \circ \alpha^* \delta$. D'où $p_1^* \beta_0 = p_1^* \beta_1 \circ p_1^* \alpha^* \delta$ et

$$\rho_2^* \beta_0 = \rho_2^* \beta_1 \circ \rho_2^* \alpha^* \delta.$$

Si l'on note \bar{g} l'unique factorisation de g à travers $q^* Y$ garantie par le morphisme cartésien $q^* Y \rightarrow Y$ au-dessus de q , on constate que $\beta_0 = \partial_0^* \bar{g}$. Comme de plus $\partial_0 \rho_1 = \partial_0 \rho_2$, il vient que $\rho_1^* \beta_1 \circ \rho_1^* \alpha^* \delta = \rho_2^* \beta_1 \circ \rho_2^* \alpha^* \delta$. Mais alors le diagramme suivant est commutatif,

$$\text{Hom}(G, p^* G \times p^* G) \xrightarrow{\Delta_1} \text{Hom}(G, X) \times \text{Hom}(G, X) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow{\pi_1} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow{\pi_2} \text{Hom}(G, X)$$

et donc $g \rho_1 a = g \rho_2 a$ ce qui entraîne la thèse. \(\square\)

Nous avons maintenant rassemblé un matériel suffisant pour démontrer le théorème crucial de cette section.

1.34 Théorème.

Si \mathcal{C} est une fibration localement petite à limites à gauche finies, à composites universelles telle que dans chaque fibre les relations d'équivalence sont effectives et les épimorphismes sont des coégalisateurs,

Alors tout objet s'exprime comme limite à droite des générateurs.

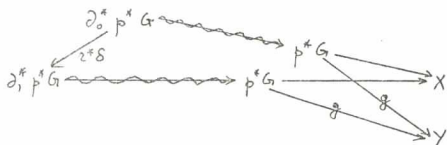
En particulier, si \mathcal{R}_X est la catégorie de représentation de X et Φ_X

la famille de préfaisceaux sur \mathcal{R}_X associée à X , alors

$$X \cong \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_X} \Phi_X.$$

démonstration.

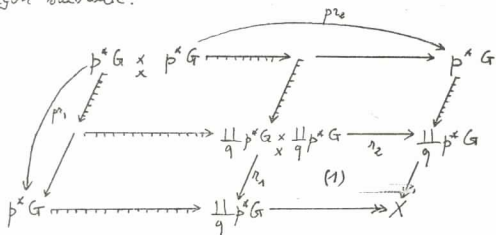
Considérons le diagramme suivant.



$$\text{Hom}(G, X) \times_{\mathbb{C}_0} \text{Hom}(G, X) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \text{Hom}(G, X) \xrightarrow{q} I$$

Il s'agit de prouver que toute famille de cônes inductifs g de base \mathbb{C}_X donne lieu à une unique factorisation $h: X \rightarrow Y$ au-dessus de I rendant commutatif le triangle $p^*G \rightarrow X$.

Par le lemme 1.33, nous savons que g coégalise π_1 et π_2 . Par ailleurs, puisque les sommes sont universelles, le produit fibre $\coprod_{\mathbb{C}_X} p^*G \times \coprod_{\mathbb{C}_X} p^*G$ calculé dans $\mathcal{C}(I)$ est la somme au-dessus de $q\pi_1 = q\pi_2$ de $p^*G \times_{\mathbb{C}_X} p^*G$. En effet, on peut construire $p^*G \times_{\mathbb{C}_X} p^*G$ de la façon suivante:



$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(G, X) \times_{\mathbb{C}_X} \text{Hom}(G, X) & \xrightarrow{\pi_2} & \text{Hom}(G, X) \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow q \\ \text{Hom}(G, X) & \xrightarrow{q} & I \end{array}$$

Ce dernier diagramme manifeste clairement que $\coprod_q p^*G \times_X \coprod_q p^*G \simeq \coprod_{\pi_1 q} (p^*G \times_X p^*G)$.

Appelons g' la factorisation de g à travers $\coprod_q p^*G$ et g'' la factorisation de $g \eta_1$ à travers $\coprod_q p^*G \times_X \coprod_q p^*G$. On a bien évidemment l'égalité $g \eta_1 = g'' = g' \eta_2$.

Or le carré (1) est une somme amalgamée car $\coprod_q p^*G \times_X \coprod_q p^*G$ est une relation d'équivalence effective et $\coprod_q p^*G \rightarrow X$ est un épimorphisme. D'où il y a un unique $k: X \rightarrow Y$. C'est le morphisme attendu. \square

1.35 Remarque.

A nous venons en particulier de démontrer que $\coprod_q p^*G \rightarrow X$ est le cogénérateur de deux morphismes α_0 et α_1 , obtenus par factorisation en utilisant le caractère cocartésien de la flèche horizontale supérieure dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \alpha_0^* p^* G \\ \swarrow \alpha_0^* \delta \quad \searrow \delta \end{array} & \xrightarrow{\quad} \coprod_{\alpha_1} \alpha_0^* p^* G \\
 & & \downarrow \alpha_0 \quad \downarrow \alpha_1 \\
 \coprod_q p^* G & \xrightarrow{\quad} p^* G & \xrightarrow{\quad} \coprod_q p^* G \\
 & \searrow g \quad \swarrow g' & \downarrow \\
 & Y & \xleftarrow{k} X
 \end{array}$$

En effet, les morphismes g rendant commutatifs les triangles de base $\alpha_0^* \delta$ sont en bijection avec les morphismes g' coégalisant α_0 et α_1 . Par ailleurs on vient de montrer que tous les tels g donnent lieu à une factorisation unique k à travers X , d'où k est également une factorisation unique de g' à travers X .

Remarquons également que la paire (α_0, α_1) est réflexive. Pour le voir, observons d'abord que la structure de catégorie de \mathcal{R}_X entraîne les isomorphismes $\coprod_q p^*G \simeq \coprod_q \coprod_{\alpha_1} \coprod_{\alpha_0} p^*G \simeq \coprod_{\alpha_1} \coprod_{\alpha_0} p^*G$; donc pour avoir un morphisme de

$\coprod_q p^*G$ dans $\coprod_{\alpha_1} \alpha_0^* p^*G$, il suffit d'en exhiber un de $\coprod_{\alpha_0} p^*G$ vers $\alpha_0^* p^*G$. La réflexion attendue se déduit alors du morphisme $\coprod_{\alpha_0} p^*G \rightarrow \alpha_0^* p^*G$ obtenu

par adjonction à partir de $p^*G \xrightarrow{\sim} i^* \Delta^* p^*G$.

1.36 Proposition.

Soit \mathcal{C} une fibration localement petite sur \mathbb{E} .

1. Si $u: I \rightarrow J$ est un morphisme de \mathbb{E} et X un objet de $\mathcal{C}(J)$,

Alors $\mathcal{R}_{u^*X} \simeq u^* \mathcal{R}_X$.

2. Tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(I)$ induit un foncteur $\bar{f}: \mathcal{R}_X \rightarrow \mathcal{R}_Y$ dans $\text{Cat}(\mathbb{E}/\mathbb{I})$ tel que $\Phi_X \simeq \Phi_Y \circ \bar{f}$.

démonstration.

1. C'est une conséquence du fait que $\text{Hom}(G, u^*X) \simeq u^* \text{Hom}(G, X)$.

2. Notons $(p_X, q_X): \text{Hom}(G, X) \rightarrow C_0 \times I$ et $(p_Y, q_Y): \text{Hom}(G, Y) \rightarrow C_0 \times I$ les morphismes structuraux et $\delta_X: p_X^*G \rightarrow q_X^*X$ et $\delta_Y: p_Y^*G \rightarrow q_Y^*Y$ les morphismes génériques.

2.a. Le foncteur interne \bar{f} est un couple (f_0, f_1) où $f_0: \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y)$ est l'unique morphisme tel que $f_0^* \delta_Y = q_X^* f_1 \circ \delta_X$ et $f_1: \text{Hom}(G, X) \times_{C_0} \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y) \times_{C_0} \text{Hom}(G, Y)$ s'obtient par factorisation parce que $p_Y \circ f_0 = p_X$. On vérifie aisément que ces données font de \bar{f} un foncteur interne de \mathcal{R}_X vers \mathcal{R}_Y .

2.b. Le fait que $\Phi_X \simeq \Phi_Y \circ \bar{f}$ résulte de ce que $p_X^*G \simeq f_0^* p_Y^*G$. □

1.4 Les sommes externes finies.

Dans une fibration à sommes infinies (internes), rien ne garantit a priori l'existence de sommes finies externes. Dans ce paragraphe, nous allons chercher des conditions sur la fibration qui permettent de construire les sommes finies à partir des sommes infinies. Tout d'abord, rappelons un résultat de Bénabou [6] qui nous sera utile dans la suite.

1.41 Théorème (J. Bénabou)

Si la fibration C sur E est localement petite et si E a des sommes finies,
 Alors le foncteur canonique $K: C(I \amalg J) \rightarrow C(I) \times C(J)$ qui à un X associe ses images réciproques le long des deux injections est pleinement fidèle.

démonstration.

Soient $I \xrightarrow{i} I \amalg J$ et $J \xrightarrow{j} I \amalg J$ les deux injections et $\alpha, \beta: X \rightarrow X'$ deux morphismes de $C(I \amalg J)$. Le foncteur K sera fidèle si des égalités $i^* \alpha = i^* \beta$ et $j^* \alpha = j^* \beta$, on peut déduire $\alpha = \beta$. Cette dernière égalité se ramène à démontrer que les morphismes $\bar{\alpha}, \bar{\beta}: I \amalg J \rightarrow \text{Hom}_{I \amalg J}(X, X')$ induits par α et β sont égaux. Mais par hypothèse, ils coïncident précisément des deux injections et donc ils sont bien égaux.

Similairement, si on a deux morphismes, l'un de $i^* X$ vers $i^* X'$ et l'autre de $j^* X$ vers $j^* X'$, il y a deux flèches de I et J respectivement vers $\text{Hom}_{I \amalg J}(X, X')$ et donc une de $I \amalg J$ dans $\text{Hom}_{I \amalg J}(X, X')$ et K est plein.

□

Ce théorème montre clairement l'importance du caractère localement petit de la fibration. Nous allons voir que dans les fibrations localement petites à sommes infinies, certaines sommes finies externes existent toujours.

1.42 Proposition.

Soit E une catégorie à sommes finies universelles.

Si C est une fibration sur E localement petite à sommes infinies,

Alors on peut construire la somme externe $\coprod_f p^* G \amalg \coprod_g q^* G$

pour un objet G de $C(C_0)$, et des flèches

$f: A \rightarrow I, g: B \rightarrow I, p: A \rightarrow C_0$ et $q: B \rightarrow C_0$ de E .

Cette somme est stable par image réciproque.

démonstration.

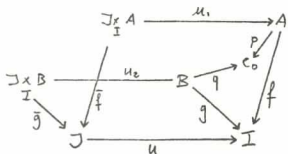
On pose $\coprod_f p^* G \amalg \coprod_g q^* G = \coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G$ où $f \amalg g$ et $p \amalg q$ sont des morphismes

de source $A \amalg B$ induites respectivement par f, g et p, q . Les bijections suivantes montrent que $\coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G$ est bien la somme attendue.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}(I)} \left(\coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G, X \right) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}(A \amalg B)} \left((p \amalg q)^* G, (f \amalg g)^* X \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}(A)} (p^* G, f^* X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}(B)} (q^* G, g^* X) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}(I)} \left(\coprod_f p^* G, X \right) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}(I)} \left(\coprod_g q^* G, X \right). \end{aligned}$$

La deuxième bijection est une conséquence du théorème 1.41.

Considérons maintenant un morphisme $u: J \rightarrow I$ de \mathbb{E} . Il s'agit de prouver que $u^* \left(\coprod_f p^* G \amalg \coprod_g q^* G \right) \simeq u^* \coprod_f p^* G \amalg u^* \coprod_g q^* G$.



Par la condition de Chevalley-Beck, cet isomorphisme se ramène à $u^* \coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G \simeq \coprod_f u_1^* p^* G \amalg \coprod_g u_2^* q^* G$. Puisque dans \mathbb{E} les sommes sont

universelles, le carré ci-dessous est un produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{f \amalg g} B) \amalg (\coprod_{f \amalg g} A) & \xrightarrow{u_1 \amalg u_2} & A \amalg B \\ \downarrow \bar{f} \amalg \bar{g} & & \downarrow f \amalg g \\ J & \xrightarrow{u} & I \end{array}$$

Donc $u^* \coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G \simeq \coprod_{f \amalg g} (u_1 \amalg u_2)^* (p \amalg q)^* G \simeq \coprod_{f \amalg g} (p \amalg q)^* G$ et ce

dernier objet est par définition $\coprod_f (p u_1)^* G \amalg \coprod_g (q u_2)^* G$. Les sommes coinduites sont donc stables par images réciproques. \square

Classiquement dans une catégorie ayant un ensemble de générateurs

et telle que tout objet est limite à droite de ces générateurs, si on peut faire des sommes finies de générateurs, on peut faire des sommes finies quelconques. Nous allons démontrer l'homologue de ce résultat dans les fibrations.

1.43 Théorème.

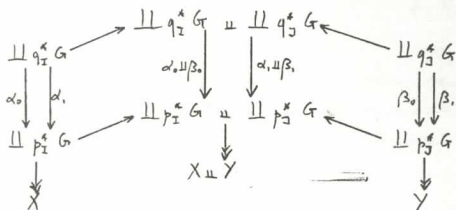
Soit \mathcal{E} une catégorie à limites à gauche finies et à sommes finies universelles.

Si \mathcal{C} est une fibration sur \mathcal{E} à limites à gauche finies, à sommes, localement petite, possédant une famille génératrice G indexée par C_0 , des cogénérateurs de paires réflexives et dans laquelle tout épimorphisme est un cogénérateur et les relations d'équivalence sont effectives,

Alors \mathcal{C} possède des sommes finies extrêmes stables par un âge réciproque.

démonstration.

Sous les hypothèses mises sur \mathcal{C} , nous savons par 1.34 que tout objet est limite à droite des générateurs et même qu'il est le but d'un cogénérateur d'une paire réflexive de morphismes entre sommes (internes) de générateurs. Soient X, Y deux objets au-dessus de I et J respectivement.



Supposons, comme cela est suggéré par le diagramme ci-dessus, que X soit le cogénérateur dans la fibre en I de α_0 et α_1 , et que Y soit celui de β_0 et β_1 , dans la fibre en J . Par 1.42, on peut faire les sommes $\coprod q_i^k G \amalg \coprod q_j^k G$ et $\coprod p_i^k G \amalg \coprod p_j^k G$; les couples α_0, β_0 et α_1, β_1 , induisent une paire (réflexive) de morphismes entre ces objets. Il est aisé de vérifier que $X \amalg Y$ est le

coégalisateur de ces deux morphismes. Comme les coégalisateurs sont stables par image réciproque, on a bien aussi: $u^*(X \amalg Y) \cong u^*X \amalg u^*Y$. \square

Dans une fibration à sommes externes finies, la propriété suivante est vérifiée.

1.44 Proposition (J. Bénabou)

Soit \mathcal{E} une catégorie à sommes finies disjointes et universelles.

Si \mathcal{C} est une fibration localement petite à sommes finies et infinites,

Alors pour tous I, J objets de \mathcal{E} , $\mathcal{C}(I \amalg J) \cong \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(J)$.

démonstration.

Nous savons déjà par 1.41 que $\mathcal{C}(I \amalg J)$ se plonge pleinement fidèlement dans $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(J)$. Par ailleurs, si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}(I)$ et $\mathcal{C}(J)$ respectivement, on peut leur associer $\amalg_i X \amalg_j Y$ dans $\mathcal{C}(I \amalg J)$ si i et j sont les injections canoniques de I et J dans $I \amalg J$. Pour démontrer l'équivalence annoncée, il ne suffit plus que de prouver le

1.45 Lemme.

Dans les conditions ci-dessus, $i^*(\amalg_i X \amalg_j Y) \cong X$.

démonstration.

En utilisant la stabilité des sommes finies par image réciproque et la condition de Chevalery-Bek, la thèse se ramène à démontrer que X est isomorphe à $X \amalg \amalg_{\mu_I} \mu_J^* Y$ puisque le carré

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\mu_J} & J \\ \mu_I \downarrow & & \downarrow j \\ I & \xrightarrow{i} & I \amalg J \end{array}$$

est un produit fibre, les sommes ayant été supposées disjointes dans \mathcal{E} . Or comme \mathcal{C} est localement petite, la fibre en 0 se réduit à un seul élément (voir [6]). Mais alors il est facile de voir que $\amalg_{\mu_I} \mu_J^* Y$ est initial dans $\mathcal{C}(I)$, ce qui implique la thèse. \square

1.5 Limites à droite filtrantes.

Nous allons montrer que sous certaines hypothèses on peut élargir légèrement la famille des générateurs pour que la sous-catégorie pleine qu'elle engendre devienne filtrante. En particulier, tout objet peut alors s'exprimer comme une limite à droite faiblement filtrante.

1.51 Définitions.

Soit C une fibration localement petite sur E et à limites à gauche finies.

Une famille génératrice est dite filtrante (resp. cofiltrante) si la sous-catégorie pleine de C qu'elle engendre est filtrante (resp. cofiltrante).

Une famille génératrice G indexée par C_0 contient l'objet final (resp. initial) s'il y a un morphisme $f: 1 \rightarrow C_0$ dans E tel que $f^*G \simeq 1$ (resp. $f^*G \simeq 0$).

1.52. Lemme.

La sous-catégorie pleine engendrée par une famille génératrice G contenant l'objet final (resp. initial) est une catégorie possédant un objet final (resp. initial).

démonstration.

Analysons le cas de l'objet final.

Par définition, il y a un morphisme $f: 1 \rightarrow C_0$ qui pointe l'objet final. De plus il y a un morphisme $h: C_0 \rightarrow C_1$ qui classifie la flèche $G \rightarrow \mathbb{E}_{C_0} 1$ au-dessus de C_0 . Par construction, la commutativité du triangle

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(G, G) \\ (1_{C_0}, f^* \mathbb{E}_{C_0}) \searrow & \downarrow \lambda & \swarrow (d_0, d_1) \\ & C_0 \times C_0 & \end{array}$$

est un mono puisque $(1_{C_0}, f^* \mathbb{E}_{C_0})$ l'est. Enfin le carré commutatif suivant est bien un produit fibre. En effet, si $\lambda: X \rightarrow C_0$ est tel

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{E_{C_0}} & 1 \\
 \downarrow h & & \downarrow \dagger \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0
 \end{array}$$

que $d_1 k = \dagger E_x$, alors il y a une factorisation m (nécessairement unique puisque k est un mono) telle que $k = h m$. Il suffit de poser $m = d_0 k$ et en utilisant le caractère classifiant de C_1 , l'égalité $k = h d_0 k$ se ramène à la vérification de l'isomorphisme $k^* S \simeq k^* d_0^* h^* S$ où S est la flèche générique de $d_0^* G$ vers $d_1^* G$ au-dessus de C_1 . Il est facile de voir que $k^* S$ n'est autre que la flèche $k^* d_0^* G \rightarrow E_x^* 1$; comme $h^* S$ est isomorphe à $G \rightarrow E_{C_0}^* 1$, la thèse est claire. \square

Une des conséquences de ce résultat est que dans une fibration localement petite, toute famille génératrice qui contient l'objet final (resp. initial) est filtrante (resp. cofiltrante) (voir Johnstone [12], ex 2.10). Nous allons utiliser cette remarque dans le résultat que voici.

1.53 Théorème.

Supposons que \mathbb{E} possède des sommes finies disjointes et universelles.

- a. Si C est une fibration sur \mathbb{E} à limites à gauche finies, à sommes finies et localement petite,

Alors toute famille génératrice peut se prolonger en une famille génératrice filtrante.

- b. Si C est une fibration sur \mathbb{E} à limites à gauche finies, à sommes infinies et localement petite,

Alors toute famille génératrice peut se prolonger en une famille de génératrice cofiltrante.

démonstration.

Soit G indexé par C_0 une famille génératrice.

- a. Posons $G' = G \amalg 1$ dans la fibre en $C_0 \amalg 1$. Par construction et par le lemme 1.45, on voit que l'image réciproque de G' le long de

l'injection de 1 dans $C \parallel 1$ est 1 et donc que G' contient l'objet final. Par ailleurs, il est clair que G' est encore générateur. La thèse suit alors par 1.52.

b. Soient $i: C_0 \rightarrow C \parallel 1$ et $j: 1 \rightarrow C \parallel 1$ les deux injections canoniques. Posons $G' = \coprod_{\mathbb{C}} G$. Le caractère localement petit conjugué avec la condition de Chevalley-Beck entraîne que $j^* \coprod_{\mathbb{C}} G = 0$. Par ailleurs, comme $i^* \coprod_{\mathbb{C}} G \cong G$, G' est encore générateur. \square

Corollaire.

Sous les hypothèses conjointes des théorèmes 1.34 et 1.53, on peut affirmer que tout objet est limite à droite faiblement filtrante (resp. faiblement cofiltrante) des générateurs.

En effet on peut toujours supposer par 1.53 que la famille de générateurs est filtrante (resp. cofiltrante). Comme le foncteur \mathcal{O}_X de la catégorie de représentation \mathcal{R}_X d'un objet X vers la catégorie filtrante (resp. cofiltrante) des générateurs est une opfibration discrète, il s'ensuit que \mathcal{R}_X est elle-même faiblement filtrante (resp. faiblement cofiltrante) (voir [12], 2.56). L'importance de ces faits réside dans la possibilité de leur appliquer le résultat suivant.

1.54 Théorème.

Si C est une fibration sur \mathbb{E} à limites à gauche finies, à sommes disjointes universelles, localement petite et exacte au sens de Barr [1],

Alors les limites à droite filtrantes (resp. faiblement filtrantes) commutent aux limites à gauche finies (resp. aux produits fibrés).

démonstration.

Soit \underline{D} une catégorie interne à \mathbb{E} filtrante (resp. faiblement filtrante). Il s'agit de voir que le foncteur $\lim_{\rightarrow \underline{D}}: C^{\underline{D}} \rightarrow C$ est exact à gauche (resp.

respecte les produits fibrés].

Or grâce à 1.14, on sait que \mathcal{C} est géométrique. Appelons $\Phi = (\Phi_*, \Phi^*)$ le foncteur géométrique de $\mathcal{C}(I)$ vers \mathbb{E} qui lui est associé. En outre, par 1.15, une famille de préfaisceaux indexée par I n'est rien d'autre qu'un objet de $\mathcal{C}(I)^{\Phi^* \mathbb{D} \times \Phi^* I}$. Donc le foncteur lin regardé au niveau I est le foncteur $\text{lin}_{\Phi^* \mathbb{D} \times \Phi^* I} : \mathcal{C}(I)^{\Phi^* \mathbb{D} \times \Phi^* I} \xrightarrow{\rightarrow \mathbb{D}} \mathcal{C}(I)$.

Or comme Φ^* est l'image réciproque d'un morphisme géométrique, $\Phi^* \mathbb{D} \times \Phi^* I$ est encore filtrante (resp. faiblement filtrante). Mais par hypothèse, $\mathcal{C}(I)$ est exacte. Dans ces conditions, Diaconescu [9] a démontré que le foncteur $\text{lin}_{\Phi^* \mathbb{D} \times \Phi^* I}$ est exact à gauche (resp.

respecte les produits fibrés). La thèse est donc établie. \square