

## Chapitre 2 :

### Extension du langage interne d'un topos aux préfaisceaux sur une catégorie interne.

Soient  $\mathbb{E}$  un topos et  $\underline{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, m, id)$  une catégorie interne à  $\mathbb{E}$ . Le but de ce chapitre est d'étendre à la catégorie des préfaisceaux sur  $\underline{C}$  dans  $\mathbb{E}$  le langage interne  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  tel qu'il est décrit en 0.14. Pour cela, nous définissons tout d'abord à l'aide de  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  les notions de familles de préfaisceaux et de transformations naturelles. Nous verrons que ces deux nouveaux concepts coïncident avec ceux de la théorie des catégories internes classique. Dans ce cadre, l'extension du langage interne à la catégorie des préfaisceaux s'imposera d'elle-même et sera utilisée pour en exhiber la structure de topos. Enfin, toujours à l'aide du langage étendu, nous étudierons les propriétés de la catégorie fibrée des familles de préfaisceaux.

Dans la suite, nous utiliserons souvent l'équivalence entre  $\mathbb{E}$  et  $\text{For}(\mathbb{E})$  signalée en 0.17 aussi nous permettrons-nous d'identifier dans certains cas une formule avec son interprétation.

Les variables de type  $C_0$  seront notées  $x, d, e, \dots$  et celles de type  $C_1$   $f, g, h, \dots$ . Si le contexte est clair, on omettra de signaler le type de ces variables. De plus, on écrira  $f: x \rightarrow d$  à la place de la formule  $d_0 f \approx x \wedge d_1 f \approx d$ . Si  $F: \varphi(x) \rightarrow \psi(y)$  est un morphisme de  $\text{For}(\mathbb{E})$  (cfr. 0.77) on se permet souvent de le noter simplement  $t$  (c'est-à-dire de désigner une classe d'équivalence par un de ses représentants) ou encore  $t(x) \sim y$  suivant la convention de notation de 0.17.

#### 2.1 La composition.

Dans ce paragraphe sont regroupées les conventions d'écriture relatives à l'expression de la composition en langage interne qui seront largement utilisées par la suite.

La formule  $\exists f (\pi_1 f \times f \wedge \pi_2 f \times g \wedge m_f \times h)$  où  $\tau(f) = C_1 \times_{C_0} C_1$  et  $\pi_1, \pi_2$  sont des projections canoniques sera abrégée en  $gof \sim h$ .

2.1.1 Proposition.

La formule  $gof \sim h$  décrit un morphisme de  $d_1 f \times d_0 g$  vers  $C_1$  dans  $\text{For}(E)$  dont l'interprétation est  $m$ . En particulier, les formules  $gof \sim h \wedge g'of' \sim h' \rightarrow h \times h'$ ,  $d_1 f \times d_0 g \rightarrow \exists h (gof \sim h)$ ,  $gof \sim h \rightarrow d_1 f \times d_0 g$  sont valides dans  $E$ .

La démonstration se base sur la validité des formules suivantes:

- (pf<sub>1</sub>)  $d_1 f \times d_0 g \rightarrow \exists f (\pi_1 f \times f \wedge \pi_2 f \times g)$
- (pf<sub>2</sub>)  $\pi_1 f \times \pi_1 f' \wedge \pi_2 f \times \pi_2 f' \rightarrow f \times f'$ ,  $\tau f = \tau f' = C_1 \times_{C_0} C_1$ .



Si une formule énonce une propriété pour une flèche quelconque de  $C_1$  (i.e. une variable  $h$  de type  $C_1$ ), on désirerait pouvoir en regarder la particularisation aux flèches qui sont des composées. C'est pourquoi on définit une pseudo-substitution par  $gof$ :  $\varphi(h)_h^{gof}$  ou encore  $\varphi(gof)$ , c'est une abréviation de la formule  $\exists f (\pi_1 f \times f \wedge \pi_2 f \times g \wedge \varphi(m_f))$ .

Il est facile de voir que  $\varphi(gof)$  est équivalente à  $\exists h (gof \sim h \wedge \varphi(h))$ . Pour que ces notations soient bien définies, il s'agit de voir que cette pseudo-substitution vérifie bien les propriétés de commutativité avec les connecteurs et quantificateurs. C'est le cas sous l'hypothèse que  $f$  et  $g$  soient composables. A titre d'exemple, voyons le cas de l'implication.

2.1.2 Proposition.

La formule  $d_1 f \times d_0 g \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi)_h^{gof} \leftrightarrow (\varphi_h^{gof} \rightarrow \psi_h^{gof}))$  est valide.

démonstration.

Nous donnerons seulement la preuve de l'implication la plus difficile,

à savoir  $(\varphi_h^{g \circ f} \rightarrow \varphi_h^{g \circ f}) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)_h^{g \circ f}$ .

Pour cela, nous utiliserons les formules (pf<sub>1</sub>) et (pf<sub>2</sub>) ci-dessus qui découlent du fait que  $d_1 f \times d_0 g$  est le produit fibre de  $d_1$  et  $d_0$ .

Par (pf<sub>2</sub>), il est facile de se convaincre que

$\pi_1 f = f \wedge \pi_2 f \times g \wedge \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f')) \rightarrow \varphi(m f)$  est valide.

Ensuite la dérivation que voici termine la démonstration.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \text{(1)} & & \text{(2)} \\
 \pi_1 f = f \wedge \pi_2 f = g & & \varphi(m f) \\
 \hline
 \pi_1 f = f \wedge \pi_2 f = g \wedge \varphi(m f) & & \\
 \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f')) & \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f')) \rightarrow \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f')) & \\
 \hline
 \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f')) & & \pi_1 f = f \wedge \pi_2 f = g
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \text{(1)} & \frac{\varphi(m f)}{\varphi(m f) \rightarrow \varphi(m f)} \text{-(2)} \\
 & \pi_1 f = f \wedge \pi_2 f = g & \\
 \frac{d_1 f \times d_0 g}{\exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g)} \text{(pf}_1\text{)} & \frac{\pi_1 f = f \wedge \pi_2 f = g \wedge \varphi(m f) \rightarrow \varphi(m f)}{\exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f)) \rightarrow \varphi(m f)} & \\
 \hline
 \exists g' (\pi_1 f' = f \wedge \pi_2 f' = g \wedge \varphi(m f)) \rightarrow \varphi(m f) & & \text{-(1)}
 \end{array}
 \end{array}$$

□

Cette proposition assure donc que sous l'hypothèse que  $f$  et  $g$  soient composables, les notations  $\varphi(g \circ f)$  et  $\varphi(h)_h^{g \circ f}$  sont non ambiguës. Enfin, on établit facilement les propriétés que voici, dont la démonstration est omise.

### 2.1.3 Proposition.

Les formules suivantes sont valides dans  $\mathcal{E}$ .

$$d_0 f \times d \rightarrow f \circ \text{id}(d) \sim f,$$

$$d_0 f \times c \rightarrow \text{id}(c) \circ f \sim f,$$

$$d_1 f \times d_0 g \wedge d_1 g \times d_0 h \rightarrow h \circ (g \circ f) \sim (h \circ g) \circ f,$$

$$\varphi(g \circ f) \wedge f \times f' \rightarrow \varphi(g \circ f'),$$

$$\varphi(g \circ f) \wedge g \times g' \rightarrow \varphi(g \circ f'),$$

$$\varphi(g \circ f) \rightarrow d_1 f \times d_0 g,$$

$$g \circ f \sim g' \circ f \Leftrightarrow d_1 f \times d_0 g,$$

$$d_0(g \circ f) \times d_0 f \Leftrightarrow d_1 f \times d_0 g,$$

$$d_1(g \circ f) \times d_1 g \Leftrightarrow d_1 f \times d_0 g.$$

□

2.2. Les familles de préfaïnceaux sur  $\mathbb{C}$  et de transformations naturelles indexées par un objet  $I$  de  $\mathbb{E}$ .

2.2.1 On appelle terme préfonctoriel de base  $X$  un couple  $(F_0, F_1)$  où

- $X$  est un objet de  $\mathbb{E}$ ,
- $F_0$  un terme de  $\mathcal{A}(\mathbb{E})$  de type  $\Omega^{C_0 \times X}$ ,
- $F_1$  un terme de  $\mathcal{A}(\mathbb{E})$  de type  $\Omega^{C_1 \times X \times X}$ ,
- $\sigma F_0 = \sigma F_1$  est la suite de variables libres de  $(F_0, F_1)$ .

Si  $F_0, F_1$  sont des variables, on dira que  $(F_0, F_1)$  est une variable préfonctorielle de base  $X$ . Les variables préfonctorielles sont notées  $\bar{F}, \bar{G}, \dots$

Si  $(F_0, F_1)$  est un terme préfonctoriel ayant  $i$  comme suite de variables libres, on écrit respectivement

$F_i, F_i(\alpha), \alpha \in F_i; \alpha, F_i f$  et  $F_i f(x) \sim x'$  au lieu de  $(F_0, F_1), \{\alpha | (\alpha, \alpha) \in F_0\}, (\alpha, \alpha) \in F_0, \{x \alpha' | f(x \alpha') \in F_1\}$  et  $\{f, x, x'\} \in F_1$ .

2.2.2 Soient  $F_i$  et  $G_j$  deux termes préfonctoriels de bases respectives  $X$  et  $Y$ .

On appelle terme naturel de  $F_i$  vers  $G_j$  un terme  $\alpha$  de  $\mathcal{A}(\mathbb{E})$  de type  $\Omega^{C_0 \times X \times Y}$  ayant  $i$  comme suite de variables libres.

Si  $\alpha$  est une variable, on l'appellera variable naturelle de  $F_i$  vers  $G_j$ . Les variables naturelles seront notées  $\alpha, \beta, \dots$

On convient enfin d'écrire  $\alpha^i, \alpha^i(x) \sim y$  au lieu de  $\{x \mid y \mid (x, y) \in \alpha\}$  et  $\{x, y, y\} \in \alpha$ .

2.2.3 On appelle famille de préfaïnceaux de base  $X$  indexée par  $I$  un terme préfonctoriel  $F_i$  (où  $i$  est une variable de type  $I$ ) vérifiant les axiomes suivants dans  $\mathbb{E}$  avec  $\tau x = \tau x' = X$ :

PF1  $F_i f(x) \sim x' \rightarrow x \in F_i(d, f) \wedge x' \in F_i(d \circ f)$

PF2  $F_i f(x) \sim x' \wedge F_i f(x) \sim x'' \rightarrow x' \sim x''$

PF3  $x \in F_i(d, f) \rightarrow \exists x' (F_i f(x) \sim x')$

ID  $F_i(\text{id}(x))(x) \sim x' \rightarrow x \sim x'$

COMP  $d, f \sim d \circ g \rightarrow F_i f(F_i g(x)) \sim F_i(g \circ f)(x)$ .

Le dernier axiome est une abréviation de la formule

$$d_1 f \neq d_2 g \rightarrow (\exists x' (F_i g(x) \vee x' \wedge F_i f(x') \sim x')) \leftrightarrow F_i (g \circ f)(x) \sim x^0.$$

Remarquons que les axiomes  $PF_{1,2,3}$  assurent que  $F_i f(x) \sim x'$  donne lieu dans  $\text{For}(E)$  à un morphisme de  $x \in F_i(d_1 f)$  vers  $x' \in F_i(d_2 g)$  au-dessus de  $C_1 \times I$ .

2.24 On appelle famille de transformations naturelles de  $F_i$  vers  $G_i$  au-dessus de  $u: I \rightarrow J$  un terme naturel ayant  $i$  comme variable libre et vérifiant les axiomes suivants avec  $\tau(i) = I$ ,  $\tau x = X$ ,  $\tau y = Y$ :

$$\text{TFN 1} \quad \alpha_x^i(x) \sim y \rightarrow x \in F_i c \wedge y \in G_{u(i)}(c).$$

$$\text{TFN 2} \quad \alpha_x^i(x) \sim y \wedge \alpha_x^i(x) \sim y' \rightarrow y \sim y'$$

$$\text{TFN 3} \quad x \in F_i c \rightarrow \exists y (\alpha_x^i(x) \sim y)$$

$$\text{NAT} \quad G_{u(i)} g (\alpha_{d_1 g}^i(x)) \sim \alpha_{d_2 g}^i (F_i g(x)).$$

Le dernier axiome est une abréviation pour la formule

$$\exists y (\alpha_{d_1 g}^i(x) \sim y \wedge G_{u(i)} g(y) \sim y') \leftrightarrow \exists x' (F_i g(x) \sim x' \wedge \alpha_{d_2 g}^i(x') \sim y').$$

Un préfaisceau et une transformation naturelle sont des familles au-dessus de  $I$ , c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de variables libres.

Une famille de transformations naturelles indexée par  $I$  est une famille de transformations naturelles au-dessus de l'identité sur  $I$ .

On écrit  $\alpha: F \Rightarrow G$ ,  $\beta: F_i \Rightarrow G_i$ ,  $\gamma: F_i \Rightarrow G_j$  pour signaler que  $I \xrightarrow{u} J$

$\alpha$  est une transformation naturelle entre les préfaisceaux  $F$  et  $G$ ,  $\beta$  une famille de transformations naturelles indexée par  $I$  et  $\gamma$  une famille de transformations naturelles au-dessus de  $u$ .

2.25 Un exemple de famille de préfaisceaux: la famille des préfaisceaux représentables.

La famille des préfaisceaux représentables est indexée par  $C_0$ .

On la note  $\hat{z}$  et elle se définit par  $\hat{z}(d) = \{f \mid f: d \rightarrow c\}$

$$\hat{z}(g) = \{f \mid f: d_1 g \rightarrow c \wedge f \circ d_2 g\}.$$

Il est aisé de s'assurer que  $\hat{z}$  satisfait les axiomes de préfaisceaux.

Remarquons qu'ici la notion de famille est primordiale. En effet, il ne suffit pas de connaître les préfaisceaux représentables qui correspondent aux  $\mathbb{A}$  avec  $\alpha: 1 \rightarrow C_0$ , car les éléments globaux ne suffisent pas dans un topos. On est vraiment obligé de définir  $\mathbb{A}$  pour un  $x$  quelconque dans  $C_0$ , c'est-à-dire pour une variable  $x$  de  $C_0$ , ce qui revient à regarder la collection de tous les représentables comme une famille indexée par  $C_0$ .

### 2.3 Construction de la fibration des familles de préfaisceaux.

Appelons  $\text{Pref}_E(\underline{C})$  la collection des préfaisceaux et transformations naturelles entre eux et  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  la collection des familles de préfaisceaux et familles de transformations naturelles.

On décide d'identifier dans ces collections les familles de transformations naturelles  $\alpha^i$  et  $\beta^i$  qui sont égales dans  $E$ , i.e. telles que  $\alpha^i \sim \beta^i$  est une formule valide. On continue cependant pour la commodité d'écrire  $\alpha^i$  au lieu de sa classe d'équivalence, comme nous le faisons déjà pour les morphismes de  $\text{For}(E)$ .

Le but de ce paragraphe est de montrer que la collection  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  s'organise naturellement en une fibration de base  $E$  dont la fibre en  $\mathbb{A}$  est  $\text{Pref}_E(\underline{C})$  ce qui explique la notation.

#### 2.3.1 Lemme.

Les collections  $\text{Pref}_E(\underline{C})$  et  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  sont des catégories.

démonstration.

Étudions le cas de  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$ .

Considérons la situation

$$\begin{array}{ccccc} F_i & \xrightarrow{\alpha} & G_j & \xrightarrow{\beta} & H_k \\ I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{v} & K \end{array}$$

On définit alors la composée de  $\alpha$  et  $\beta$  comme étant le terme  $\beta \circ \alpha = \{ x \times z \mid \exists y (\alpha_x^i(x) \sim y \wedge \beta_y^k(y) \sim z) \}$ . Il est facile de voir que  $\beta \circ \alpha$  satisfait les axiomes qui en font une famille de transformations naturelles de  $F_i$  vers  $H_k$  au-dessus de  $v \circ u$ .

L'associativité et l'existence d'un neutre pour la composition sont claires. □

Il apparaît clairement que  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  est une catégorie au-dessus de  $E$ . Soit  $P$  le foncteur évident de  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  dans  $E$ .

### 2.3.2 Proposition.

Le foncteur  $P: \text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C})) \rightarrow E$  est une fibration dont la fibre en  $1$  est  $\text{Pref}_E(\underline{C})$ .

démonstration.

Soient  $u: J \rightarrow I$  un morphisme de  $E$  et  $F_i$  une famille de préfaisceaux indexée par  $I$ . On pose  $(u^*F)_j(x) = \{x \mid x \in F_{u(j)}(x)\}$ ,  $(u^*F)_j^i = \{x \mid x' \in F_{u(j)}(x) \wedge x' \in x\}$ . Il est bien clair que la fonctorialité de  $F_i$  entraîne celle de  $(u^*F)_j$ . De plus, il y a une famille de transformations naturelles  $\alpha: (u^*F)_j \Rightarrow F_i$  au-dessus de  $u$ ; on l'obtient en posant  $\alpha_x^j(x) \sim x \Leftrightarrow x \in F_{u(j)}(x)$  (et  $x \sim x \Leftrightarrow x$ ).

De nouveau les vérifications sont claires. Nous allons observer que  $\alpha$  est cartésienne. En effet considérons la situation

$$\begin{array}{ccc} G_j & \xrightarrow{\beta} & F \\ (u^*F)_j & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array}$$

$$J \xrightarrow{u} I.$$

La factorisation de  $\beta$  à travers  $\alpha$  dont l'unicité est claire par définition même de  $\alpha$  n'est autre que  $\gamma: G_j \Rightarrow (u^*F)_j$  définie par  $\gamma_x^j(y) \sim x \Leftrightarrow \beta_x^j(y) \sim x$ . On vérifie facilement que la composée de deux cartésiennes est encore une cartésienne. □

### 2.3.3 Remarque.

La fibration ainsi construite n'est pas nécessairement sémi-dé. Pour qu'elle le devienne, il suffit d'identifier les familles de préfaisceaux  $F_i$  et  $G_i$  telles que  $F_i \circ x \simeq G_i \circ x$  et  $F_i \circ f \simeq G_i \circ f$  sont des formules valides dans  $E$ . On aura alors en effet  $(v^*u^*F)_k = ((u \circ v)^*F)_k$  puisque, par exemple,

$\{x \mid x \in F_{u \circ v}(k)(x)\} \approx \{x \mid x \in F_{u \circ w}(k)(x)\}$  est une formule valide dans  $\mathbb{E}$ .

## 2.4. Interprétation d'une famille de préfaiseaux.

On sait que, de la catégorie  $\text{For}(\mathbb{E})$  des formules de  $\mathbb{E}$ , il y a moyen de construire un foncteur interprétation à valeurs dans  $\mathbb{E}$  lui-même. Semblablement, on voudrait pouvoir associer à tout préfaiseau un diagramme (cfr [12], 2.14) sur  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Si on regarde la fibration géométrique associée au morphisme géométrique  $\Phi = (\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}^{\text{op}}) : \mathbb{E}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbb{E}$ , on s'aperçoit que sa fibre en  $I$  n'est autre que  $\mathbb{E}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}/\mathcal{C}^{\text{op}} \approx \mathbb{E}^{(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}}$  (cfr. [12], 2.18). Cette dernière catégorie joue donc le rôle de catégorie des familles de diagrammes sur  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  indexés par  $I$ . Ceci nous fait percevoir que l'interprétation cherchée s'engagera naturellement en un foncteur cartésien de la fibration  $\mathbb{E}$  vers  $\mathbb{E}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}/\Phi$ . Nous verrons plus loin que ce foncteur est en fait une équivalence de catégories.

### 2.4.1. Définition

Soit  $F_i$  une famille de préfaiseaux de base  $X$  indexée par  $I$ . L'interprétation  $|F_i|$  de cette famille est un objet  $(F_0 \xrightarrow{p} C_0 \times I, q)$  de  $\mathbb{E}^{(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}}$  défini comme suit:

- $F_0 = \{x \in F_i(x)\}$ ,
- $F_0$  est un sous-objet de  $X \times I \times C_0$ , on obtient  $p$  en faisant suivre de la projection qui oublie  $X$ ,
- on sait que  $\{x \in F_i, d\}$  est le produit fibre de  $p$  et  $I \times d_i$ ; de plus  $F_i\{f(x) \vee x'\}$  peut être regardé comme un morphisme de  $x \in F_i, d, f$  vers  $x' \in F_i, d, f$  au-dessous de  $I \times C_0$ , et donc comme un morphisme  $k: d_i^* F_0 \rightarrow d_0^* F_0$ , qui suivi de la projection canonique sur  $F_0$ , fournit le morphisme  $q$  attendu.

Reste à voir que cette définition est bien posée, à savoir que  $(p, q)$  est bien un diagramme sur  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Ceci fait l'objet du

### 2.4.2. Lemme.

Sous les hypothèses qui précèdent, les égalités suivantes sont vérifiées.



- (1)  $p q = (I \times d_0) \pi_2$   
 (2)  $q(F_0 \times I \times \text{id}) = 1_{F_0}$   
 (3)  $q(q \times C_1) = q(F_0 \times C_0 \times m)$ .

démonstration.

- (1) Considérons le diagramme ci-dessous où  $(e_1, e_2)$  et  $(\pi_1, \pi_2)$  sont les couples de projections des produits fibrés de  $p$  avec  $I \times d_0$  et  $I \times d_1$ , respectivement.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \xrightarrow{\pi_2} \\
 & & & & \searrow \\
 d_1^* F_0 & \xrightarrow{k} & d_0^* F_0 & \xrightarrow{e_2} & I \times C_1 \\
 & \searrow \pi_1 & \downarrow e_1 & & \downarrow I \times d_1 \\
 & \searrow q & F_0 & \xrightarrow{p} & I \times C_0 \\
 & & & & \downarrow I \times d_0
 \end{array}$$

On sait que  $e_2 k = q$ ; cela entraîne  $p q = (I \times d_0) \pi_2$ .

- (2) L'axiome ID entraîne que le morphisme  $F_i(\text{id}(c_1))(x) \sim x$  induit l'identité sur  $F_0$ . Il n'est pas difficile de voir en interprétant que ce morphisme n'est autre que  $q(F_0 \times I \times \text{id})$ .
- (3) Par l'axiome COMP, on peut affirmer que les morphismes induits par les formules  $d_1 f = d_0 g \wedge \exists y (\pi_1 y = f \wedge \pi_2 y = g \wedge F_i(m y)(x) \sim x)$  et  $d_1 f = d_0 g \wedge \exists x' (F_i f(x) \sim x' \wedge F_i g(x') \sim x)$  ( $\tau_f = C_1 \times C_1$ ) sont les mêmes. D'où le résultat énoncé. □

## 2.43 Interprétation de la famille des préfaisceaux représentables.

Il est facile de voir que l'interprétation de la famille des préfaisceaux représentables n'est autre que  $((ob d_1), m)$ , comme c'est schématisé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{m} & C_1 & \xrightarrow{\quad} & \\
 \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) & & \\
 C_0 \times C_1 & \xrightarrow{C_0 \times d_1} & C_0 \times C_0 & & \\
 & \xrightarrow{C_0 \times d_0} & & & 
 \end{array}$$

## 2.5 Famille de préfaisceaux associée à un diagramme sur $C^* I^{\text{op}}$ .

Le but poursuivi dans ce paragraphe est de montrer que la nouvelle

notion de famille de préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$  ne diffère pas de celle de diagramme sur  $\mathcal{C}^{op}$  introduite par la théorie des catégories internes. Or nous venons d'associer à toute famille de préfaisceaux son interprétation; réciproquement nous allons construire la famille de préfaisceaux associée à un diagramme et vérifier que ces deux opérations donnent lieu à une équivalence de catégories.

Soit  $\text{Fam}_{\mathbb{I}}(\text{Préf}_{\mathbb{I}}(\mathcal{C}))$  la fibre en  $\mathbb{I}$  de la fibration  $\mathbb{P}$  du point 2.32. Nous allons construire un foncteur  $\Psi_{\mathbb{I}} : \mathbb{E}^{(\mathbb{I}^{op})^{\mathbb{I}}} \longrightarrow \text{Fam}_{\mathbb{I}}(\text{Préf}_{\mathbb{I}}(\mathcal{C}))$ .  
Si  $F = (X \xrightarrow{F_0} I \times C_0, X \xrightarrow{F_1} I \times C_1, X \xrightarrow{F_2} X)$  est un diagramme sur  $\mathcal{C}^{\mathbb{I}^{op}}$ , on lui associe la famille de préfaisceaux  $\Psi F_i$  construite en posant

$$\Psi F_i(x) = \{x \mid F_0(x) \approx (i, x)\} \text{ et}$$

$$\Psi F_i(f) = \{x \approx x' \mid \exists j (\pi_{1j} \approx x \wedge \pi_{2j} \approx (i, f) \wedge F_1(j) \approx x')\}, \text{ sachant que}$$

$$\pi_j = X \xrightarrow{F_0} I \times C_1 \text{ et } \pi_1, \pi_2 \text{ sont les deux projections sur } X \text{ et } I \times C_1, \text{ respectivement.}$$

La vérification du fait que  $\Psi F_i$  satisfait les axiomes  $\text{PF}_{1,2,3}$  est aisée.

L'axiome ID se ramène dans ce cas à la validité de la formule

$$\exists j (\pi_{1j} \approx x \wedge \pi_{2j} \approx (i, \text{id}(x)) \wedge F_1(j) \approx x') \rightarrow x \approx x'.$$

Or les suites d'égalités que voici sont des théorèmes de  $\mathbb{E}$ :

$$\pi_1(X \times I \times \text{id})(x) \approx x \quad (*), \quad \pi_2(X \times I \times \text{id})(x) \approx (I \times \text{id}) F_0(x) \times I \times \text{id}(i, x) \approx (i, \text{id}(x)) \quad (**).$$

La validité de  $(*)$  (voir 2.11) et l'égalité  $F_1 \circ (X \times I \times \text{id}) = \text{id}_X$  conséquence du fait que  $F$  est un diagramme, permettent alors d'écrire la dérivation

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (*) & (**) & (1) \\ \pi_1(X \times I \times \text{id})(x) \approx x & \pi_2(X \times I \times \text{id})(x) \approx (i, \text{id}(x)) & \pi_1 \approx x \wedge \pi_2 \approx (i, \text{id}(x)) \wedge F_1 \approx x' \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} & & (2) \\ & & \pi_1 \approx x \wedge \pi_2 \approx (i, \text{id}(x)) \wedge F_1 \approx x' \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} & & (3) \\ & & x \approx (X \times I \times \text{id})(x) \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} & & (4) \\ & & F_1(X \times I \times \text{id})(x) \approx x' \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} \exists j (\pi_{1j} \approx x \wedge \pi_{2j} \approx (i, \text{id}(x)) \wedge F_1(j) \approx x') & & x \approx x' \\ & x \approx x', & \end{array} \end{array} \quad (4)$$

qui montre la validité de ID.

Quant à l'axiome COMP, il se ramène à l'équivalence sous l'hypothèse

$\text{def} \approx d, g \wedge F_0(x) \approx (i, d_1 f)$  des formules

$$\exists j (\pi_{1j} \approx (i, g) \wedge \pi_{2j} \approx (i, f) \wedge \exists E (\pi_{1E} \approx x \wedge \pi_{2E} \approx \text{mf} \wedge F_1 E \approx x')) \text{ et}$$

$$\exists \alpha \beta (\pi_{1\alpha} \approx x \wedge \pi_{2\alpha} \approx (i, f) \wedge F_1 \alpha \approx \pi_{1\beta} \wedge \pi_{2\beta} \approx (i, g) \wedge F_1 \beta \approx x').$$

La démonstration de cette équivalence se fait en suivant l'intuition ensembliste.

et en utilisant l'égalité  $F_1(X \times I \times m) = F_1(F_1 X_{C_0} I \times C_1)$ .

### 2.5.1 Lemme.

$\Psi_I$  s'étend en un foncteur.

démonstration.

On pose  $\Psi_I \xi^i = \{x \times y \mid F_0(x) = (i, c) \wedge \xi(x) \times y\}$  si  $\xi$  est un morphisme de  $F$  vers  $G$  dans  $E^{C \times I^*}$ .

Les axiomes TFN<sub>1,2,3</sub> se vérifient aisément. La commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} X_{C_0}^X (I \times C_1) & \xrightarrow{\xi_x (I \times c_1)} & Y_{C_0}^X (I \times C_1) \\ \downarrow F_1 & \xi & \downarrow G_1 \\ X & \xrightarrow{\xi} & Y \end{array}$$

entraîne la validité de l'axiome NAT.

De plus  $\Psi_I$  respecte les identités et la composition. En effet, pour la composition par exemple, on a

$$\begin{aligned} \Psi_I(\beta) \circ \Psi_I(\xi)^i &= \{x \times z \mid \exists y (F_0(x) = (i, c) \wedge \xi(x) \times y \wedge G_0(y) = (i, c) \wedge \beta(y) \times z)\} \\ &= \{x \times z \mid F_0(x) = (i, c) \wedge \beta(\xi(x)) \times z\} = \Psi_I(\beta \circ \xi)^i \end{aligned}$$

□

### 2.5.2 Proposition.

Le foncteur  $\Psi_I$  est pleinement fidèle.

démonstration.

Soient  $F = (F_0: X \rightarrow I \times C_0, F_1)$  et  $G = (G_0: Y \rightarrow I \times C_0, G_1)$  deux diagrammes.

a.  $\Psi_I$  est fidèle.

Soient  $\xi$  et  $\beta$  deux transformations naturelles de  $F$  dans  $G$  telles que  $\Psi_I \xi = \Psi_I \beta$ , i.e.  $F_0(x) = (i, c) \wedge \xi(x) \times y \leftrightarrow F_0(x) = (i, c) \wedge \beta(x) \times y$ .

Il s'agit d'en déduire l'égalité de  $\xi$  et  $\beta$ .

Or on sait que  $\{F_0(x) = (i, c) \wedge \xi(x) \times y\}: X \longrightarrow X \times (I \times C_0) \times Y$  n'est autre que  $(X, F_0, \xi)$ . En faisant suivre de la projection sur  $Y$ , on trouve

bien  $\xi = \beta$ .

b.  $\Psi_I$  est plein.

Soit  $\alpha^i: \Psi_I F_i \Rightarrow \Psi_I G_i$ . Nous avons remarqué déjà que  $\alpha^i(x) \sim y$  induit un morphisme de  $x \in \Psi_I F_i(c)$  vers  $y \in \Psi_I G_i(c)$  au-dessus de  $I \times C_0$ .

Autrement dit,  $\alpha^i$  fournit un morphisme  $|\alpha^i|$  de  $X = \{x \in \Psi_I F_i(c)\}$  vers  $Y = \{x \in \Psi_I G_i(c)\}$  tel que  $G_0 \circ |\alpha^i| = F_0$ .

Il est aisé de vérifier que  $\Psi_I |\alpha^i| = \alpha^i$ . Reste à s'assurer de la naturalité de  $|\alpha^i|$ . La commutativité dans  $\text{For}(\mathbb{E})$  du carré

$$\begin{array}{ccc} F_0(x) = (i, d, f) & \xrightarrow{\alpha^i_{d,f}(x) \sim y} & G_0(y) = (i, d, f) \\ \downarrow \Psi_I F_i(f)(x) \sim x' & & \downarrow \Psi_I G_i(f)(y) \sim y' \\ F_0(x') = (i, d, f) & \xrightarrow{\alpha^i_{d,f}(i') \sim y'} & G_0(y') = (i, d, f) \end{array}$$

obtenue par l'axiome NAT entraîne par interprétation dans  $\mathbb{E}$  l'égalité  $G_0 \circ |\alpha^i| \times_{C_0} I \times C_0 = |\alpha^i| \circ F_0$  qui assure la naturalité de  $|\alpha^i|$ . □

### 2.5.3 Proposition.

Toute famille de préfaisceaux  $F_i$  est isomorphe à l'usage par  $\Psi_I$  de son interprétation dans  $\mathbb{E}^{C^* I \text{ OP}}$ .

démonstration.

Soit  $|F_i| = (p: \{x \in F_i, c\} \rightarrow I \times C_0, q: \{x \in F_i, d, f\} \rightarrow \{x \in F_i, c\})$ .

On se propose de définir une famille de transformations naturelles isomorphiques  $\alpha^i$  indexée par  $I$  de  $F_i$  vers  $\Psi_I |F_i|$ .

Pour cela, rappelons que les formules  $x \in F_i, c$  et  $b = b$  avec  $\tau b = \{x \in F_i, c\}$  sont isomorphes dans la catégorie des formules de  $\mathbb{E}$ . Notons  $m(x, i, c) \sim b$  cet isomorphisme; on pose alors  $\alpha^i_c(b) \sim x \Leftrightarrow m(x, i, c) \sim b$ . Avec cette définition, il est facile de voir que  $\alpha^i$  convient. □

### 2.5.4 Corollaire.

Les catégories  $\text{Fam}_I(\text{Pre}^f_{\mathbb{E}}(\underline{C}))$  et  $\mathbb{E}^{C^* I \text{ OP}}$  sont équivalentes.

démonstration.

Cela découle directement de 2.5.2 et 2.5.3. □

2.5.5 Théorème.

La fibration  $P: \text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C})) \rightarrow E$  est équivalente à la fibration associée au morphisme géométrique  $\Phi = (\xrightarrow{\text{lin}}, \underline{C}^*)$  de  $E^{\text{cop}}$  vers  $E$ .

démonstration.

Nous avons vu en 2.5.4 qu'il y a équivalence fibre par fibre.

Il suffit donc de prouver que cette équivalence est cartésienne, c'est-à-dire que  $\Psi_j u^* F_j \cong u^* \Psi_I F_i$  pour tout morphisme  $u: J \rightarrow I$  dans  $E$ .

Ceci revient à voir que les formules  $F_0(x) \simeq (u(j), \tau)$  et  $u^* F_0(y) \simeq (j, \tau)$  avec  $\tau y = Y$  et  $\tau j = J$  sont équivalentes, ce qui est clair puisque  $Y$  est le produit fibré de  $F_0$  par  $u \times C_0$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & X \\ u^* F_0 \downarrow & & \downarrow F_0 \\ J \times C_0 & \xrightarrow{u \times C_0} & I \times C_0 \end{array}$$

□

## 2.6 Familles de préfaisceaux et Transformations naturelles indexées par une formule $\varphi(i)$ de $\mathcal{L}(E)$ .

Nous avons jusqu'à présent à notre disposition la notion de famille de préfaisceaux indexée par un objet de  $E$ . Mais on voudrait aussi pouvoir indexer par une formule  $\varphi(i)$ , ce qui correspond à l'idée intuitive de se donner un préfaisceau pour chaque  $i$  vérifiant la formule  $\varphi(i)$ . Cette extension fait l'objet de ce paragraphe.

2.6.1 On appelle famille de préfaisceaux de base  $X$  indexée par une formule  $\varphi(i)$

un terme préfonctionnel  $F_i$  ayant  $i$  comme suite de variables libres et vérifiant

$$\begin{array}{l} \text{PFO1} \quad \alpha \in F_i: \alpha \rightarrow \varphi(i) \\ \text{PFO2} \quad F_i f(x) \times x' \rightarrow \varphi(i). \end{array}$$

en plus des axiomes PFI à 3, ID et COMP.

Remarquons que, par définition dans  $\text{For}(E)$ , il y a une projection de  $\alpha \in F_i: \alpha$  et  $F_i f(\alpha) \sim \alpha'$  vers  $\varphi(i)$  et  $F_i f(\alpha) \sim \alpha'$  induit un morphisme de

$x \in F_i(d, f)$  dans  $\alpha \in F_i(d_0, f)$  au-dessus de  $\{x, f \wedge \varphi(i)\}$ .

2.6.2 On appelle famille de transformations naturelles de  $F_i$  indexée par  $\varphi(i)$  vers  $G_j$  indexée par  $\varphi(j)$  au-dessus de  $t: \varphi(i) \rightarrow \varphi(j)$  dans  $\text{For}(E)$

un terme naturel  $\alpha$  ayant  $i$  comme suite de variables libres et vérifiant entre TFN2 et 3 les axiomes

$$\text{TFN 1 bis} \quad \alpha_c^i(x) \sim y \rightarrow x \in F_i(c) \wedge \exists j (t(i) \sim j \wedge y \in G_j(c))$$

$$\text{NAT bis} \quad G_{t(i)} g(\alpha_{d_0, g}^i(x)) \sim \alpha_{d_0, g}^i(F_i g(x)).$$

Cette dernière formule est une abréviation pour

$$\exists y (\alpha_{d_0, g}^i(x) \sim y \wedge \exists j (t(i) \sim j \wedge G_j g(j) \sim y)) \leftrightarrow \exists x' (F_i g(x) \sim x' \wedge \alpha_{d_0, g}^i(x') \sim y').$$

2.6.3 Proposition.

La collection des familles de préfaisceaux indexées par des formules s'organise en une fibration au-dessus de  $\text{For}(E)$  que l'on notera  $P: \text{Fam}'(\text{Prf}_{\mathbb{E}}(\underline{C})) \rightarrow \text{For}(E)$ .

démonstration.

On prend pour morphismes entre familles de préfaisceaux les classes d'équivalence de familles de transformations naturelles pour l'égalité. Ainsi  $\alpha \sim \beta$  si  $\alpha^i \approx \beta^i$  est une formule valide; on continue cependant à écrire  $\alpha^i$  pour désigner sa classe d'équivalence.

Soient  $F_i \xrightarrow{\alpha^i} G_j \xrightarrow{\beta^j} H_k$ ; on définit  $\beta^j \circ \alpha^i$  en posant

$$\varphi(i) \xrightarrow{t} \varphi(j) \xrightarrow{\psi} \chi(k)$$

$$\beta^j \circ \alpha^i = \{x \in X \mid \exists y, j (\alpha_c^i(x) \sim y \wedge t(i) \sim j \wedge \beta_c^j(y) \sim z)\}.$$

On se convainc facilement que cette composition est associative et admet un neutre.

L'image réciproque de  $F_i$  indexée par  $\varphi(i)$  par  $t: \varphi(j) \rightarrow \varphi(i)$  est définie par

$$t^* F_j(c) = \{x \mid \exists i (t(j) \sim i \wedge x \in F_i(c))\},$$

$$t^* F_j(f) = \{x \sim x' \mid \exists i (t(j) \sim i \wedge F_i f(x) \sim x')\}.$$

Il est clair que tout ceci fait de  $P'$  une fibration. ☒

## 2.64 Proposition.

Les fibrations  $P$  et  $P'$  sont équivalentes.

démonstration.

Pour chaque objet  $I$  de  $E$ , choisissons une variable  $i_0$  de type  $I$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C})) & \xrightarrow{\Phi_1} & \text{Fam}'(\text{Pref}_E(\underline{C})) \\ \downarrow P & & \downarrow P' \\ E & \xrightarrow{\Phi_0} & \text{For}(E) \end{array}$$

On définit alors un morphisme de fibrations  $(\Phi_0, \Phi_1)$  en posant  $\Phi_0 I = i_0 \in I$ ,  $\Phi_0(u) = \{i_j \mid u(i) \leq j\}$ ,  $\Phi_1(F_i) = F_{i_0}$  et  $\Phi_1(\alpha^i) = \alpha^{i_0}$ .

Il est bien connu que  $\Phi_0$  est une équivalence; quant à  $\Phi_1$ , il est clair qu'il est pleinement fidèle.

Mais en outre, tout objet  $F_i$  de  $\text{Fam}'(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  est isomorphe à un  $\Phi_1 F_{i'}$ .

En effet, soient  $F_i$  indexée par  $\varphi(i)$  et  $J = |\varphi(i)|$ . Dans  $\text{For}(E)$ ,  $j_0 \times j_0$  est isomorphe à  $\varphi(i)$ ; si on relève  $F_i$  au-dessus de  $j_0 \times j_0$  on obtient une famille indexée par  $J$  dont l'image par  $\Phi_1$  est clairement isomorphe à  $F_i$ .

□

Etant donné ce résultat, nous ne distinguons plus explicitement entre  $P$  et  $P'$  et nous utiliserons la notation  $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$  indistinctement pour les familles indexées par un objet ou une formule.

De plus, la proposition 2.64 combinée avec le théorème 2.55 nous assure que la notion de famille de préfaiseurs indexée par une formule coïncide avec celle de diagramme indexé par l'interprétation de cette formule.

## 2.7 Langage pour préfaiseurs.

On définit les formules " $\underline{F}$  fonct" et " $\underline{\alpha}: \underline{F} \Rightarrow \underline{G}$ " où  $\underline{F}$  et  $\underline{G}$  sont des variables préfonctorielle et naturelle par la conjonction des axiomes de fonctorialité et de naturalité appliqués à  $\underline{F}$  et  $\underline{\alpha}$  respectivement.

Le langage pour préfaiseurs s'obtient par "relativisation" des formules contenant  $\underline{F} \dots \underline{\alpha} \dots$  au moyen des expressions " $\underline{F}$  fonct" et

" $\alpha: F \Rightarrow G$ ". Ainsi, par exemple, on écrira  $\varphi(E), \exists F \varphi(E), \forall F \varphi(E), \{E | \varphi(E)\}$  à la place respective de  $\varphi(F, E_1) \wedge "E \text{ fonct}"$ ,  
 $\exists F ("E \text{ fonct}" \wedge \varphi(F)), \forall F ("E \text{ fonct}" \rightarrow \varphi(F)), \{F | "E \text{ fonct}" \wedge \varphi(F)\}$   
 si  $F$  est le couple de variables  $(F_0, E_1)$ .

Si  $F$  et  $G$  sont deux variables préfonctorielles de base  $X$ , on écrira  $F \subseteq G$  à la place de " $F \text{ fonct}$ "  $\wedge$  " $G \text{ fonct}$ "  $\wedge \forall x (x \in F \rightarrow x \in G) \wedge \forall f_{xx'} (F f(x) \rightarrow G f(x))$ . On omettra l'indice  $X$  si aucune confusion n'est à craindre. On écrira alors  $F \approx G$  à la place de  $F \subseteq G \wedge G \subseteq F$ .  
 Si  $F = (F_0, E_1)$  et  $G = (G_0, G_1)$ , il est facile de voir que la formule  $F \approx G$  est équivalente à " $F \text{ fonct}$ "  $\wedge F_0 \approx G_0 \wedge E_1 \approx G_1$ .

Semblablement, on définit " $\alpha \approx \beta$ " par " $\alpha: F \Rightarrow G \wedge \alpha \approx \beta$ ".

On peut substituer dans une formule des variables préfonctorielles ou naturelles libres par des termes préfonctoriels ou naturels: ceci se fait par substitution simultanée dans le cas des termes préfonctoriels et par substitution habituelle pour les termes naturels. L'égalité préfonctorielle définie ci-dessus possède toutes les bonnes propriétés de l'égalité par rapport à la substitution.

## 2.8 Le lemme de Yoneda.

### 2.8.1 Définition.

Soit  $F$  un préfaïceau. On définit le préfaïceau  $\text{Nat}(\hat{1}, F)$  comme suit:  $\text{Nat}(\hat{1}, F)(c) = \text{Nat}(\hat{c}, F) = \{ \alpha | \alpha: \hat{c} \Rightarrow F \}$  et  
 $\text{Nat}(\hat{f}, F) = \{ \alpha, \alpha' | \alpha: \hat{d} \Rightarrow F \wedge \alpha' = \{ g, x, \alpha \}_c (f \circ g) \sim \alpha \}$ .

Les axiomes PF1 à 3 et ID sont très clairement satisfaits. La validité de COMP se ramène à celle de la formule

$$\alpha' \approx \{ g, x, \alpha \}_c (h \circ f) \circ g \sim \alpha \iff \exists \alpha'' (\alpha'' = \{ g, x, \alpha \}_c (f \circ g) \sim \alpha \wedge \alpha' = \{ g', x, \alpha'' \}_c (h \circ g') \sim \alpha)$$

sous l'hypothèse  $d \circ f = d \circ h$ , ou encore à celle de

$$\alpha_c (h \circ f) \circ g \sim \alpha \iff \alpha_c (h \circ (f \circ g)) \sim \alpha \quad \text{qui est vraie par 2.13.}$$

Le préfaïceau  $\text{Nat}(\hat{1}, F)$  est donc bien défini.



2.8.2 Lemme.

Si  $t(x) \sim y \wedge t(x) \sim y' \rightarrow y \sim y'$  et  $\chi(z) \rightarrow \exists y (t(x) \sim y)$  sont des formules valides dans  $\mathbb{E}$ ,

Alors les formules  $\exists y (t(x) \sim y \wedge \alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y)\})$  et  $\alpha \wedge \{z \mid \exists y (\varphi(z, y) \wedge t(x) \sim y)\}$  sont équivalentes sous l'hypothèse  $\chi(\alpha)$ .

démonstration.

C'est la conséquence des deux dérivations suivantes.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{(1)}{t(x) \sim y} \\
 \frac{(2)}{z \in \alpha} \\
 \frac{z \in \alpha \leftrightarrow \varphi(y, z)}{z \in \alpha \leftrightarrow \varphi(y, z)} \\
 \frac{t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z)}{t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z)} \\
 \frac{\exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z))}{z \in \alpha \rightarrow \exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z))} \quad - (2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(1)}{t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y')} \\
 \frac{\varphi(z, y')}{\varphi(z, y')} \\
 \frac{y \sim y'}{y \sim y'} \\
 \frac{\exists y' (t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y'))}{\exists y' (t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y'))} \quad - (3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(1)}{t(x) \sim y} \\
 \frac{(4)}{t(x) \sim y'} \\
 \frac{y \sim y'}{y \sim y'} \\
 \frac{z \in \alpha}{z \in \alpha} \\
 \frac{\exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z)) \rightarrow z \in \alpha}{\exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z)) \rightarrow z \in \alpha} \quad - (4)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(1)}{\alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y)\}} \\
 \frac{\forall z (z \in \alpha \leftrightarrow \varphi(z, y))}{\forall z (z \in \alpha \leftrightarrow \varphi(z, y))} \\
 \frac{\varphi(z, y) \leftrightarrow z \in \alpha}{\varphi(z, y) \leftrightarrow z \in \alpha}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{z \in \alpha \leftrightarrow \exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(y, z))}{\exists y (t(x) \sim y \wedge \alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y)\})} \quad - (1)$$

où (1) symbolise la formule  $t(x) \sim y \wedge \alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y)\}$ , et

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1)}{\alpha \wedge \{z \mid \exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(z, y))\}} \\
 \frac{(2)}{z \in \alpha \leftrightarrow \exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(z, y))} \\
 \frac{\exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(z, y))}{\exists y (t(x) \sim y \wedge \varphi(z, y))} \quad - (3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(3)}{t(x) \sim y \wedge \varphi(z, y)} \\
 \frac{(4)}{t(x) \sim y} \\
 \frac{y \sim y'}{y \sim y'} \\
 \frac{t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y')}{t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y')} \\
 \frac{\exists y (t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y'))}{\exists y (t(x) \sim y' \wedge \varphi(z, y'))} \quad - (3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(4)}{\varphi(z, y')} \\
 \frac{z \in \alpha}{z \in \alpha} \\
 \frac{\varphi(z, y') \rightarrow z \in \alpha}{\varphi(z, y') \rightarrow z \in \alpha} \quad - (4)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1)}{t(x) \sim y'} \\
 \frac{\chi(\alpha)}{\exists y' (t(x) \sim y')} \\
 \frac{\exists y' (t(x) \sim y' \wedge \alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y')\})}{\exists y' (t(x) \sim y' \wedge \alpha \wedge \{z \mid \varphi(z, y')\})} \quad - (1)
 \end{array}$$

2.83 Proposition (Lemme de Yoneda).  
 Les préfaisceaux  $F$  et  $\text{Nat}(\mathbb{1}, F)$  sont isomorphes dans  $\text{PréFIE}(\mathcal{C})$ .

démonstration.

Nous allons construire deux transformations naturelles inverses l'une de l'autre.

1. On définit  $j: \text{Nat}(\mathbb{1}, F) \Rightarrow F$  par la formule

$$j_c(\alpha) \sim \alpha \leftrightarrow \ulcorner \alpha : \hat{c} \Rightarrow F \urcorner \wedge \alpha_c(\text{id}(c)) \sim \alpha.$$

Cette définition satisfait bien les axiomes TFN1 à 3.

La naturalité revient à démontrer que les formules

$\ulcorner \alpha : \hat{d} \Rightarrow F \urcorner \wedge \exists \alpha' (\alpha'_{d,f}(\text{id}(c)) \sim \alpha' \wedge F_f(\alpha') \sim \alpha)$  et  
 $\exists \alpha' (\ulcorner \alpha' : \hat{d} \Rightarrow F \urcorner \wedge \alpha'_c \{g \circ \alpha\} \alpha'_c \{f \circ g\} \sim \alpha\} \wedge \alpha'_c(\text{id}(c)) \sim \alpha)$  sont équivalentes.

La seconde formule se ramène aisément à  $\ulcorner \alpha : d_f \Rightarrow F \urcorner \wedge \alpha_c(f) \sim \alpha$  et la première aussi en utilisant la naturalité de  $\alpha$  et l'axiome ID.

2. On définit ensuite  $S: F \Rightarrow \text{Nat}(\mathbb{1}, F)$  par la formule

$$S_c(x) \sim \alpha \leftrightarrow x \in F_c \wedge \alpha \ddot{\sim} [x]_c^F$$

où  $[x]_c^F$  est la famille de transformations naturelles indexée par  $X \times \mathcal{C}_c$  définie par le terme  $\{g d x' / g: d \rightarrow c \wedge F_g(x) \sim \alpha'\}$ .

Les axiomes TFN1 à 3 sont faciles à vérifier. La naturalité, quant à elle, se ramène à l'équivalence des formules

$x \in F_d, f \wedge \alpha \ddot{\sim} \{g d x' / g: d \rightarrow d_f \wedge F_{f \circ g}(x) \sim \alpha'\}$  et

$x \in F_d, f \wedge \alpha \ddot{\sim} \{g d x' / g: d \rightarrow d_f \wedge F_g(F_f(x)) \sim \alpha'\}$  qui est claire par COMP.

3. Voyons si  $S \circ j = \text{id}$ .

On sait que  $(S \circ j)_c(\alpha) \sim \alpha'$  est la formule

$\exists x (\ulcorner \alpha : \hat{c} \Rightarrow F \urcorner \wedge \alpha_c(\text{id}(c)) \sim \alpha \wedge \alpha' \ddot{\sim} [x]_c^F)$  ou encore

$\ulcorner \alpha : \hat{c} \Rightarrow F \urcorner \wedge \exists x (\alpha_c(\text{id}(c)) \sim \alpha \wedge \alpha' \ddot{\sim} \{g d x' / g: d \rightarrow c \wedge F_g(x) \sim \alpha'\})$

En remarquant que la formule  $\exists x (\alpha_c(\text{id}(c)) \sim \alpha)$  est valide et en utilisant judicieusement le lemme 2.82, on montre que  $(S \circ j)_c(\alpha) \sim \alpha'$  est encore équivalente à

" $\underline{\alpha}: \hat{c} \Rightarrow F$ "  $\wedge$  " $\underline{\alpha}' = \{g d \alpha' / g: d \rightarrow c \wedge \exists x. (\alpha'_c(id(x)) \sim x \wedge Fg(x) \sim \alpha'c)\}$ " et donc par la naturalité de  $\underline{\alpha}$  et l'axiome ID  $\hat{c}$ .

" $\underline{\alpha}: \hat{c} \Rightarrow F$ "  $\wedge$  " $\underline{\alpha} \simeq \underline{\alpha}'$ " qui représente bien le morphisme identité.

4. Enfin assurons-nous que  $f \circ \delta = id$ , c'est-à-dire que  $\exists \underline{\alpha} (\alpha \in Fc \wedge \underline{\alpha} \simeq [x]_c^F \wedge \alpha'_c(id(x)) \sim \alpha' \wedge \underline{\alpha}: \hat{c} \Rightarrow F)$  n'est autre que  $\alpha \in Fc \wedge \alpha \times \alpha'$ .

Or la première formule est équivalente à  $\alpha \in Fc \wedge [x]_c^F(id(x)) \sim \alpha'$ , et donc à  $\alpha \in Fc \wedge \alpha \times \alpha'$ .

□

## 2.84. Remarques.

1. En particulier, le lemme de Yoneda implique que les formales  $\alpha \in Fc$  et " $\underline{\alpha}: \hat{c} \Rightarrow F$ " sont isomorphes dans le topos  $\text{For}(E)/c \times c$ .

2. Tout ce qui vient d'être fait est aussi d'application pour les familles de préfaisceaux.

## 2.85 Le plongement de Yoneda.

Le plongement de Yoneda est un objet  $Y$  de la fibre en 1 de la fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\underline{C}))^E$ . Il est décrit par le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{d_0 f} & \\
 & \swarrow \hat{f} & \\
 \widehat{d_1 f} & & \hat{c} \\
 & \searrow \hat{f} & \\
 & & \\
 C_1 & \xrightarrow[d_1]{d_0} & C_0
 \end{array}$$

on l'on remarque que  $\widehat{d_0 f} = (d_0^* \hat{1})_f$ ,  $\widehat{d_1 f} = (d_1^* \hat{1})_f$  et  $\hat{f}$  est la famille de transformations naturelles induite par  $C_1$  décrite par la formule  $\hat{f}_x(g) \sim h \leftrightarrow g: c \rightarrow d_0 f \wedge h \sim f \circ g$ .

## 2.9 La structure de topos de $\text{Pref}_E(\underline{C})$ .

Une des conséquences de 2.55 est que  $\text{Pref}_E(\underline{C})$  est un topos. Nous allons dans ce paragraphe expliciter la structure de topos en calquant les constructions faites dans le cas des topos de préfaisceaux sur  $E$  en grâce au langage pour préfaisceaux mis au point en 2.7.

### 2.9.1 Les limites à gauche fibres.

a. L'objet final.

Il s'obtient simplement en posant  $1(x) = \{d \mid d \leq x\}$  et  $1(f) = \{d \mid d' \mid f: d \rightarrow d'\}$ .

b. Les produits fibres.

Considérons la situation

$$\begin{array}{ccc}
 & & G \\
 & & \Downarrow \beta \\
 F & \xrightarrow{\alpha} & H
 \end{array}$$

On définit  $F \times_H G$  point par point en posant

$$\begin{aligned}
 F \times_H G(x) &= \{xy \mid \exists z (\alpha_x(x) \sim z \wedge \beta_x(y) \sim z)\} \text{ et} \\
 F \times_H G(f) &= \{xy \mid xy' \mid \exists z (\alpha_x(x) \sim z \wedge \beta_x(y) \sim z) \wedge Ff(x) \sim x' \wedge Gf(y) \sim y'\}.
 \end{aligned}$$

Cette définition fait bien de  $F \times_H G$  un préfaisceau. Il est évident qu'il s'agit là du produit fibre attendu.

### 2.9.2 L'exponentiation

Soient  $F, G, H$  trois préfaisceaux.

On pose  $F^G = \text{Nat}(\underline{1} \times G, F)$ .

A une transformation naturelle  $\alpha: H \Rightarrow F^G$ , on associe  $\bar{\alpha}: H \times G \Rightarrow F$  définie par la formule

$$\bar{\alpha}_x(x, y) \sim z \Leftrightarrow \exists \beta_x (\alpha_x(x) \sim \beta_x \wedge \beta_x: \hat{x} \times G \Rightarrow F \wedge \beta_x(\text{id}(x), y) \sim z).$$

Dans l'autre sens, à une transformation naturelle  $\beta: H \times G \Rightarrow F$ , on

associe  $\beta_0: H \Rightarrow F^G$  définie par la formule

$$(\beta_0)_x(x) \sim \gamma \Leftrightarrow (\gamma)_d(f, y) \sim z \Leftrightarrow f: d \rightarrow x \wedge \exists y' (\beta_x(x, y') \sim z \wedge Gf(y) \sim y').$$

Les définitions sont bien posées et fournissent la bijection désirée.

Voyons, par exemple, que  $(\overline{\beta_0}) = \beta_3$ ; cette égalité est conséquence de la suite d'équivalences de formules que voici :

$$\begin{aligned} (\overline{\beta_0})_c(x, y) \sim z &\Leftrightarrow \exists \beta' (\beta_0)_c(x) \sim \beta' \wedge \beta' : \hat{x} \in G \Rightarrow F' \wedge \beta' \wedge (\text{id}(x), y) \sim z \\ &\Leftrightarrow \exists \beta' (\beta' = \{f, y, dz\} \text{ f: } d \rightarrow c \wedge \exists y' (\beta'_c(x, y') \sim z \wedge G(f)(y) \sim y')) \wedge \\ &\quad \beta' : \hat{x} \in G \Rightarrow F' \wedge \beta' \wedge (\text{id}(x), y) \sim z \\ &\Leftrightarrow \text{id}(c): c \rightarrow c \wedge \exists y' (\beta'_c(x, y') \sim z \wedge G(\text{id}(c))(y) \sim y') \\ &\Leftrightarrow \beta'_c(x, y) \sim z. \end{aligned}$$

On procède de même pour  $(\overline{\alpha})_0 = \alpha$ .

### 2.93 Lemme sur les transformations naturelles monomorphiques.

a. La transformation naturelle  $\alpha: F \Rightarrow G$  est un monomorphisme ssi la formule  $\alpha_c(x) \sim y \wedge \alpha_c(x') \sim y \rightarrow x \sim x'$  est valide.

b. Si  $\alpha: F \Rightarrow G$  est un monomorphisme,

Alors il y a un préfaisceau  $H \subseteq G$  tel que  $F$  soit isomorphe à  $H$ .

démonstration.

a. On utilise le fait que  $\alpha$  est un monomorphisme ni le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\quad} & F \\ \parallel & & \downarrow \alpha \\ F & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

est un produit fibre.

b. On pose  $H_c = \{y \mid \exists x (\alpha_c(x) \sim y)\}$  et  $H_f = \{y, y' \mid \exists x (\alpha_c(x) \sim y \wedge G_f(y) \sim y')\}$ .

□

### 2.94 L'objet classifiant les monomorphismes.

a. On sait que dans les catégories de préfaisceaux ensemblistes, le rôle d'objet classifiant est joué par le préfaisceau des cribles. C'est pourquoi nous définissons le préfaisceau  $C_2$  en posant

$$C_2(c) = \{ \hat{F} \mid \hat{F} \subseteq \hat{c} \} \text{ et}$$

$$C_2(f) = \{ \hat{F} \hat{G} \mid \hat{F} \subseteq \hat{c}_1 \hat{f} \wedge \hat{G} \subseteq \hat{f}^* \hat{F} \} \text{ où } \hat{f} \text{ est défini en 2.85 et } \hat{f}^* \hat{F} \text{ est la famille de préfaisceaux indexée par } C_1 \text{ définie par}$$

$$\int^* \tilde{F}(c) = \{g \mid g: c \rightarrow \text{obj} \wedge f \circ g \in \tilde{F}(c)\} \text{ et}$$

$$\int^* \tilde{F}(h) = \{g \mid g: d, h \rightarrow \text{obj} \wedge f \circ g \in \tilde{F}(d, h) \wedge g \sim g \circ h\}.$$

Cette définition fait bien de  $C_2$  un préfaïceau; les axiomes ID et COMP résultent du fait que la composition admet un neutre et est associative.

On définit  $\nu: 1 \Rightarrow C_2$  par  $\nu_c(d) \sim \tilde{F} \hookrightarrow c \times d \wedge \tilde{F} \simeq \hat{c}$ .

b. Il s'agit de prouver que la transformation naturelle  $\nu$  classe bien les monomorphismes de  $\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\underline{C})$ .

Par 2.9.3, on peut se limiter à le montrer pour les inclusions.

Soit  $G \subseteq F$ ; on définit  $\psi_G: F \Rightarrow C_2$  la flèche caractéristique de  $G$  par la formule

$$(\psi_G)_c(x) \sim \tilde{F} \leftrightarrow x \in Fc \wedge \tilde{F} \simeq ([x]_c^F)^* G.$$

Cette définition est bien naturelle; en effet la naturalité se ramène à voir que  $x \in Fd, f \rightarrow ([x]_{d,f}^F \circ \hat{f}) \simeq [Ff(x)]_{d,f}$ , i.e. à démontrer sous l'hypothèse  $x \in Fd, f$  l'équivalence

$\forall g, d, x' (\exists x' (g: d \rightarrow d, f \wedge Ff(x) \sim x' \wedge Fg(x') \sim x'')) \Leftrightarrow g: d \rightarrow d, f \wedge F(f \circ g)(x) \sim x'$

ce qui est une conséquence de COMP.

c. Nous allons montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} G & \Longrightarrow & 1 \text{ est} \\ \parallel & & \Downarrow \nu \\ F & \xRightarrow{\psi_G} & C_2 \end{array}$$

un produit fibre, c'est-à-dire que  $G$  est isomorphe à  $\psi_G^*(\nu)$ .

Or on voit que  $\psi_G^*(\nu)(x) \simeq \{x \mid x \in Fc \wedge c \times d \wedge (\psi_G)_c(x) \sim \hat{c}\}$  est isomorphe à  $\{x \mid x \in Fc \wedge ([x]_c^F)^* G \simeq \hat{c}\}$ .

La thèse se ramène donc à montrer que dans  $Fc(E)$  les formules  $x \in Gc$  et  $x \in Fc \wedge ([x]_c^F)^* G \simeq \hat{c}$  sont isomorphes.

Or, d'une part, on voit facilement que  $x \in Gc \rightarrow ([x]_c^F)^* G \simeq \hat{c}$ ;

d'autre part  $x \in Fc \wedge ([x]_c^F)^* G \simeq \hat{c}$  implique  $\forall f(d: f: d \rightarrow c \Leftrightarrow Ff(x) \in Gd)$ , et donc si on prend  $d=c$  et  $f = \text{id}(c)$ , on obtient  $x \in Gc$ .

Les deux formules considérées sont donc bien équivalentes et le carré de départ est un produit fibre.

d. Pour terminer, il faut montrer l'unicité de la flèche caractéristique  $\psi_G$ .

Soit  $\psi: F \Rightarrow G$  telle que  $\psi^*(v) \simeq \psi_G^*(v)$ . Nous allons voir que  
 $\psi \simeq \{x \in F \mid x \in F_c \wedge \tilde{v} \simeq ([x]_c^F)^* \hat{v}\}$ , ou encore que  
 $x \in F_c \rightarrow (([x]_c^F)^* G \simeq \psi_c(x))$ .

Or la validité de  $\psi^*(v) \simeq \psi_G^*(v)$  entraîne celle de

$$x \in F_c \wedge f: d \rightarrow c \rightarrow (Ff(x) \in Gd \Leftrightarrow \psi_{\text{def}}(Ff(x)) \sim \hat{v}).$$

Mais alors, par naturalité de  $\psi$ , cette dernière formule devient

$$x \in F_c \wedge f: d \rightarrow c \rightarrow (Ff(x) \in Gd \Leftrightarrow \hat{f}^* \psi_c(x) \sim \hat{v}) \text{ et comme la formule}$$

$\hat{f} \in \psi_c(x)(d)$  est équivalente à  $\text{id}(d) \in \hat{f}^* \psi_c(x)(d)$ , il vient finalement

$$x \in F_c \wedge f: d \rightarrow c \rightarrow (Ff(x) \in Gd \Leftrightarrow \hat{f} \in \psi_c(x)(d)), \text{ d'où la formule}$$

$$x \in F_c \rightarrow (([x]_c^F)^* G \subseteq \psi_c(x)) \text{ est valide.}$$

L'inclusion dans l'autre sens s'obtient par une méthode analogue.

e. Définition.

Une famille de préfaisceaux  $F_{i,c}$  indexée par  $\varphi(i,c)$  est une famille de cribles ssi la formule  $\varphi(i,c) \rightarrow F_{i,c} \in C_2(c)$  est valide.

## 2.10 Les sommes infinies dans $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\underline{C}))$ .

Proposition.

La fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\underline{C}))$  possède des sommes infinies disjointes et universelles.

démonstration.

a. Si  $F_i$  est une famille de préfaisceaux indexée par  $I$  et  $u: I \rightarrow J$  un morphisme de  $E$ , on définit la famille  $\coprod_u F_j$  indexée par  $J$  en posant

$$\coprod_u F_j(x) = \{x_i \mid u(i) = j \wedge x \in F_i(x)\} \text{ et}$$

$$\coprod_u F_j(f) = \{x_i x'_i \mid i x'_i \wedge u(i) = j \wedge F_i f(x) \simeq x'_i\}.$$

Le fait que  $\coprod_u F_i$  ainsi défini est une famille de préfaisceaux est clair.

b. Il y a une famille de transformations naturelles  $\alpha: F_i \Rightarrow \coprod_u F_j$  canonique au-dessus de  $u$ . Il suffit de poser

$$\alpha_i^x(x) \simeq (x, i) \Leftrightarrow x \in F_i(x) \wedge x \simeq x \wedge i x'_i.$$

La naturalité est claire; de plus,  $\alpha$  est cocartésienne.

En effet, considérons  $\beta: F_i \Rightarrow G_j$  au-dessus de  $u$ . On construit

une factorisation  $f_j: \coprod_u F_j \Rightarrow G_j$  au-dessus de  $J$  en posant

$$f_j(x, i) \sim y \Leftrightarrow \beta_x^i(x) \sim y \wedge u(i) = j. \text{ On constate les equivalences}$$

$$(f \circ \alpha)_x^i(x) \sim y \Leftrightarrow \exists x' i' (\alpha_x^i(x) \sim (x' i') \wedge f_{x'}^{u(i)}(x'; i') \sim y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x' i' \wedge \beta_{x'}^{i'}(x) \sim y \Leftrightarrow \beta_x^i(x) \sim y$$

sont valides dans  $E$ , d'où  $f \circ \alpha = \beta$ . L'unicité de  $f$  est facile à prouver.

c. Les données satisfont bien à la condition de Chevalley-Beck.

$$\begin{array}{ccc} I \times J & \xrightarrow{\quad} & J \\ \downarrow \kappa & \swarrow u' & \downarrow \nu \\ I & \xrightarrow{u} & K \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{En effet, si le carré ci-contre est un produit} \\ \text{fibré, il s'agit de vérifier l'isomorphisme} \\ \nu^* \coprod_u F \simeq \coprod_{u'} \nu'^* F \text{ pour toute famille } F_i \text{ de pré-} \\ \text{faisceaux indexée par } I. \end{array}$$

Cela se ramène à l'isomorphisme dans  $\text{For}(E)$  des formules

$$u(i) \times \nu(j) \wedge x \in F_i, x \text{ et } u'(y) \times j \wedge x \in F_{\nu'(y)}(x) \text{ avec } \tau y = I \times J \times K.$$

Cet isomorphisme est décrit par la formule  $j = j' \wedge i = \nu'(y)$ .

d. Les sommes ainsi définies sont disjointes. Soit  $u: I \rightarrow J$ .

$$\text{Remarquons que } (F \times F)_{\coprod_u}^x(x) = \{x \alpha' \mid i \times i' \wedge x \in F_i, x \wedge x \in x'\}.$$

La transformation naturelle  $\beta: F_i \Rightarrow (F \times F)_{\coprod_u}^x$  au-dessus de la diagonale  $\Delta: I \rightarrow I \times I$  induite par le produit fibré est décrite par  $\beta_x^i(x) \sim (x_0, x_1) \Leftrightarrow x \in F_i, x \wedge x \times x_0 \wedge x \times x_1$ .

Une telle transformation naturelle est évidemment cocartésienne.

e. Les sommes sont universelles, i.e. les morphismes cocartésiens sont respectés par produits fibrés.

Considérons la situation où  $F$  et  $G$  sont des bases respectives  $X$  et  $Y$

$$\begin{array}{ccc} F \times G & \xrightarrow{\quad} & G \\ \swarrow \alpha & \searrow \beta & \\ F & \xrightarrow{\quad} & \coprod_u F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I \times J & \xrightarrow{u'} & J \\ \swarrow \nu' & \searrow \nu & \\ I & \xrightarrow{u} & K \end{array}$$

$$\text{On constate que } (F \times G)_{\coprod_u}^x(m) = \{xy \mid \beta_x^{u'(m)}(y) \sim (x, \nu'(m))\} \text{ avec } \tau m = I \times J$$

$$\text{et que } \beta_x^{u'(m)}(xy) \sim y' \Leftrightarrow \beta_x^{u'(m)}(y) \sim (x, \nu'(m)) \wedge y \times y'.$$



Pour montrer que  $\mathcal{J}$  est cocartésienne, supposons l'existence d'une famille  $\delta: (F \times G)_m \Rightarrow H_j$  au-dessus de  $u'$  et soit  $Z$  la base de  $H_j$ .

On construit aisément une famille  $\mathcal{J}$ -indexée de transformations naturelles  $\varepsilon: G_j \Rightarrow H_j$  en posant

$$\varepsilon_c^j(y) \sim Z \Leftrightarrow \exists \alpha \sim m' (\delta_c^{m'}(x; y) \sim Z \wedge u'(m') \times j).$$

Cette définition satisfait les différents axiomes de naturalité.

Avant d'étudier  $\varepsilon \circ j$ , remarquons que

$\delta_c^{m'}(x; y) \sim Z \wedge \beta_c^{u'(m)}(y) \sim (x, v'(m))$  implique par TFN1 la validité de  $\beta_c^{u'(m)}(y) \sim (x, v'(m))$  et donc si  $u'(m') \leq u(m)$  est valide, celle de  $v'(m) \leq v'(m') \wedge x \leq x'$  puisque  $\beta$  vérifie TFN2.

Ainsi, dans la suite ci-dessous, toutes les équivalences sont valides:

$$\begin{aligned} (\varepsilon \circ j)_c^{m'}(x; y) \sim Z &\Leftrightarrow \exists y' \sim m' (\delta_c^{m'}(x'; y') \sim Z \wedge u'(m') \times u'(m) \wedge y \leq y' \wedge \beta_c^{u'(m)}(y) \sim (x, v'(m))) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \sim m' (\delta_c^{m'}(x'; y) \sim Z \wedge u'(m') \leq u'(m) \wedge v'(m') \leq v'(m) \wedge \beta_c^{u'(m)}(y) \sim (x, v'(m)) \wedge \\ &\quad x = x') \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \delta_c^{m'}(x; y) \sim Z \wedge \beta_c^{u(m)}(y) \sim (x, v'(m))$$

$$\Leftrightarrow \delta_c^{m'}(x; y) \sim Z \text{ puisque, par TFN}_1, \delta_c^{m'}(x; y) \sim Z \rightarrow \beta_c^{u(m)}(y) \sim (x, v'(m)).$$

D'où  $\varepsilon \circ j = \delta$ : l'unicité de  $\varepsilon$  s'obtient facilement. ☒

## 2.11 Propriétés de petitesse dans $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathcal{E}}(\underline{C}))$ .

### 2.11.1 Proposition.

La fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathcal{E}}(\underline{C}))$  est localement petite.

démonstration.

Soient  $F_i$  et  $G_i$  deux familles de préfaisceaux indexées par  $\varphi(i)$ .  
On pose  $\text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i) = \underline{\alpha}: F_i \Rightarrow G_i$   $\wedge \varphi(i)$ ; il y a une projection canonique  $t: \text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i) \rightarrow \varphi(i)$ .

a. Au-dessus de  $\text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i)$  formule de  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ , il y a la famille générique  $\delta^{\underline{\alpha}, i}$  de toutes les transformations naturelles de  $F_i$  dans  $G_i$ .

En effet, au-dessus du couple  $(\underline{\alpha}, i)$ , on met  $\underline{\alpha}$  lui-même, c'est-à-dire qu'on pose  $\delta^{\underline{\alpha}, i}(x) \sim y$  comme étant la formule

$\alpha_c(x) \sim y \wedge \alpha: F_i \Rightarrow G_i \wedge \varphi(i)$ .

Comme  $x \in (t^*F)_{\alpha_i}(x)$  est la formule  $x \in F_i, x \wedge \alpha: F_i \Rightarrow G_i \wedge \varphi(i)$ , il est clair que  $\delta \alpha_i$  satisfait TFN<sub>1</sub>. Les autres axiomes se déduisent de la présence dans la définition de  $\delta \alpha_i$  de " $\alpha: F_i \Rightarrow G_i$ ".

b. Soient  $s: \varphi(j) \rightarrow \varphi(i)$  un morphisme de For(E) et  $\beta^j: \delta^* F_j \Rightarrow \delta^* G_j$ . On associe à  $\beta$  un morphisme  $u: \varphi(j) \rightarrow \text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i)$  au-dessus de  $\varphi(i)$  en posant  $u(j) \sim (\alpha, i) \Leftrightarrow s(j) \sim i \wedge \alpha \approx \beta^j$ .

Si nous montrons que la formule  $u(j) \sim (\alpha, i) \rightarrow \alpha: F_i \Rightarrow G_i$  est valide, il sera clair que  $u$  est un morphisme de For(E) de source  $\varphi(j)$  et de but  $\text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i)$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $u(j) \sim (\alpha, i)$  implique les axiomes TFN1bis, TFN2 et 3, NATbis (cfr. 2.6) appliqués à  $\alpha$ .

b.1. Pour TFN1bis, la situation est symétrique en  $F_i$  et  $G_i$ .

Montrons, par exemple, que

$u(j) \sim (\alpha, i) \rightarrow \forall x, y (\alpha_c(x) \sim y \rightarrow x \in F_i, x)$  est valide.

Pour cela, il suffit de se convaincre que la formule

$s(j) \sim i \wedge \beta^j \approx \alpha \wedge \alpha_c(x) \sim y \rightarrow x \in F_i, x$  est valide.

Ceci se ramène à  $s(j) \sim i \wedge \beta^j_c(x) \sim y \rightarrow x \in F_i, x$ , ce qui est clair car la validité de  $\beta^j_c(x) \sim y \rightarrow \exists i' (s(j) \sim i' \wedge x \in F_i, x)$  permet d'écrire la dérivation

$$\frac{\frac{\frac{s(j) \sim i \wedge \beta^j_c(x) \sim y}{\beta^j_c(x) \sim y}}{\exists i' (s(j) \sim i' \wedge x \in F_i, x)}}{\alpha_c(x) \sim y} \quad \frac{\frac{\frac{s(j) \sim i \wedge \beta^j_c(x) \sim y}{s(j) \sim i} \quad \frac{s(j) \sim i' \wedge x \in F_i, x}{s(j) \sim i'}}{i \approx i'}}{x \in F_i, x} \quad \frac{\frac{s(j) \sim i' \wedge x \in F_i, x}{x \in F_i, x}}{\alpha_c(x) \sim y} \quad (1)$$

b.2 Pour TFN2 et NATbis, c'est une conséquence de ce que  $\beta^j$  vérifie déjà ces axiomes.

b.3 Reste à voir pour que  $\alpha$  satisfasse TFN3 que

$u(j) \sim (\alpha, i) \wedge x \in F_i, x \rightarrow \exists y (\alpha_c(x) \sim y)$  soit valide, ou encore que  $s(j) \sim i \wedge \alpha \approx \beta^j \wedge x \in F_i, x \rightarrow \exists y (\beta^j_c(x) \sim y)$  le soit ce qui apparaît clairement grâce à la dérivation

$$\frac{\frac{\frac{\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx \beta^j \wedge \alpha \in F_i \kappa}{\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \in F_i \kappa}}{\exists i (\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \in F_i \kappa)}}{\alpha \in \mathcal{S}^* F_j \kappa}}{\exists y (\beta^j \kappa(x) \sim y)}.$$

c. L'image réciproque de  $\beta$  par  $u$  est  $\mathcal{S}$ . En effet, cela découle de la suite d'équivalences valides que voici:

$$\begin{aligned} (u^* \mathcal{S})^j \kappa(x) \sim y &\Leftrightarrow \exists \alpha i (u(j) \sim (\alpha, i) \wedge \mathcal{S}_{\alpha}^{i, i'}(x) \sim y) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha i (\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx \beta^j \wedge \alpha_{\alpha}(x) \sim y) \\ &\Leftrightarrow \beta^j \kappa(x) \sim y. \end{aligned}$$

d. Par ailleurs, à toute flèche  $u: \psi(j) \rightarrow \text{Hom}_{\psi(i)}(F_i, G_i)$  au-dessus de  $\psi(j)$ , on associe naturellement  $u^* \mathcal{S}: u^* t^* F_j \Rightarrow u^* t^* G_j$ .

On constate que  $u(j) \sim (\alpha, i) \Leftrightarrow \alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx u^* \mathcal{S}^j$  est valide car  $\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx u^* \mathcal{S}^j \Leftrightarrow \alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx \{x \approx y \mid \exists \alpha' i' (u(j) \sim (\alpha', i') \wedge \alpha'_{\alpha}(x) \sim y)\} \wedge \psi(j)$ ,  $\psi(j) \rightarrow \exists \alpha i (u(j) \sim (\alpha, i))$  et  $u(j) \sim (\alpha, i) \wedge u(j) \sim (\alpha', i') \rightarrow \alpha \approx \alpha' \wedge i \approx i'$  le sont.

D'où par le lemme 2.8.2 est assurée la validité de  $\alpha(j) \sim i \wedge \alpha \approx u^* \mathcal{S}^j \Leftrightarrow \alpha(j) \sim i \wedge \exists \alpha' i' (u(j) \sim (\alpha', i') \wedge \alpha \approx \{x \approx y \mid \alpha'_{\alpha}(x) \sim y\})$ , ce qui fournit bien la thèse annoncée car  $u(j) \sim (\alpha, i) \rightarrow \alpha(j) \sim i$ .

Ceci achève de démontrer la bijection entre

$$\text{Hom}_{\text{For}(E)/\psi(i)}(\psi(j), \text{Hom}_{\psi(i)}(F_i, G_i)) \text{ et } \text{Hom}_{\text{Fam}_{\psi(j)}(\text{Préf}_E(\mathcal{E}))}(\mathcal{S}^* F_j, \mathcal{S}^* G_j). \quad \square$$

## 2.11.2 Remarque :

Les points 2.9.1, 2.10, 2.11.1 et 1.14, nous permettent d'affirmer que  $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\mathcal{E}))$  est une fibration géométrique. Ce résultat équivaut évidemment contenu dans le théorème 2.5.5, mais nous disposons maintenant d'un résultat supplémentaire, à savoir que le morphisme géométrique de  $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\mathcal{E}))$  dans  $E$  peut être décrit dans le langage interne du topos  $E$  puisque les limites à gauche finies, les sommes et le caractère localement petit sont descriptibles dans ce langage.

2.11.3 Proposition.

La fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\underline{E}))$  est well-powered.

démonstration.

Soit  $F_i$  une famille de préfaisceaux indexée par  $\varphi(i)$ .  
On pose  $\text{Sub}(F_i) = \underline{F} \subseteq F_i \wedge \varphi(i)$  avec la projection canonique sur  $\varphi(i)$ .  
En raisonnant comme en 2.11.1, on se convainc que cette définition est correcte.  $\square$

2.11.4 Proposition.

La collection des familles de préfaisceaux de base  $X$  est petite.

démonstration.

Il faut voir qu'il y a une famille générique de préfaisceaux de base  $X$ . Soit  $\underline{F}$  une variable préfonctorielle de base  $X$ .

Dans la fibre au-dessus de " $\underline{F}$  fonct" on construit la famille  $K_{\underline{F}}$  en posant  $K_{\underline{F}}(c) = \{x \mid x \in \underline{F} c \wedge \text{"}\underline{F}$  fonct"}\}  
 $K_{\underline{F}}(f) = \{x, x' \mid \underline{F} f(x) \sim x' \wedge \text{"}\underline{F}$  fonct"}\}.

Tout a été fait pour que  $K_{\underline{F}}$  soit bien une famille de préfaisceaux de base  $X$ .  
Nous allons montrer qu'il y a bijection entre les familles de préfaisceaux de base  $X$  indexées par  $\varphi(i)$  et les morphismes de  $\varphi(i)$  vers " $\underline{F}$  fonct" dans  $\text{For}(E)$ .

En effet, si  $t: \varphi(i) \rightarrow \text{"}\underline{F}$  fonct" est un morphisme,  $(t^* K)_i$  est une famille de préfaisceaux de base  $X$ . D'autre part, si  $F_i$  est une telle famille indexée par  $\varphi(i)$ , on construit  $s: \varphi(i) \rightarrow \text{"}\underline{F}$  fonct" en posant  $s(i) \sim \underline{F} \Leftrightarrow \varphi(i) \wedge \underline{F} \times F_i$ .  
Il est clair que  $s$  est bien un morphisme et que  $(s^* K)_i$  est bien  $F_i$  car les égalités  $(s^* K)_i(c) = \{x \mid \exists \underline{F}(\varphi(i) \wedge F_i \simeq \underline{F} \wedge x \in K_{\underline{F}}(c))\} = \{x \mid x \in F_i c\} = F_i c$  sont valides.

Pour terminer, il faut se convaincre de ce que le morphisme  $\bar{E}$  associé à  $(t^* K)_i$  est bien  $t$  lui-même. Vu la validité des formules  $\bar{E}(i) \sim \underline{F} \Leftrightarrow \varphi(i) \wedge \underline{F} = (t^* K)_i$

$\Leftrightarrow \varphi(i) \wedge \underline{F} \simeq \{x \mid \exists \underline{F}' (t(i) \sim \underline{F}' \wedge x \in \underline{F}'c)\}$ , et connaissant celle de  $\varphi(i) \rightarrow \exists \underline{F} (t(i) \sim \underline{F})$  et de  $t(i) \sim \underline{F} \wedge t(i) \sim \underline{F}' \rightarrow \underline{F} = \underline{F}'$ , le lemme 2.8.2 nous permet de conclure à la validité de  $\underline{F}(i) \sim \underline{F} \Leftrightarrow \varphi(i) \wedge \exists \underline{F}' (t(i) \sim \underline{F}' \wedge \underline{F} \simeq \{x \mid x \in \underline{F}'c\})$ , d'où il vient que les morphismes  $\underline{F}$  et  $t$  coïncident.  $\square$

### 2.11.5 Corollaire.

Si  $K_{\underline{F}}$  est la famille générique des préfaisceaux de base  $X$ , Alors les formules " $\underline{\alpha}: \underline{F} \Rightarrow F$ " et " $\underline{\alpha}: K_{\underline{F}} \Rightarrow F$ " sont équivalentes.

### 2.12 Les limites à droite dans $\text{Fam}(\text{Préf}_{\underline{E}}(\underline{C}))$ .

#### 2.12.1 Proposition.

La fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\underline{E}}(\underline{C}))$  admet des petites limites à droite universelles.

démonstration.

On sait déjà par 2.10 que  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\underline{E}}(\underline{C}))$  possède des sommes infinies universelles. De plus, chaque fibre a des coégalisateurs universels respectés par images réciproques. Un théorème de J. Bénabou [6] permet alors de conclure.  $\square$

#### 2.12.2 Proposition.

Toute famille de préfaisceaux s'exprime comme limite à droite de représentables.

démonstration.

Soit  $F_i$  une famille de préfaisceaux indexée par  $\varphi(i)$ .

1. Considérons la catégorie  $\underline{E}_i$  interne à  $\text{For}(\underline{E})$  définie par

$\underline{E}_i = (x \in F_i, x' \in F_i, d, f, \partial_0, \partial_1, \varepsilon, cp)$  où les quatre flèches naturelles sont définies par les équivalences suivantes:

$$\partial_0(x'f) \sim (x'i)x \Leftrightarrow i'x' \wedge x \simeq d_0 f \wedge F_i f(x) \sim x',$$

$$\partial_0(x \circ f) \sim (x \circ i) \Leftrightarrow i \circ i' \wedge x \circ d_0 f \wedge x \in F_0 f \wedge x \circ x',$$

$$E(x \circ i) \sim (x \circ i' \circ c) \Leftrightarrow i \circ i' \wedge x \circ x' \wedge f \neq \text{id}(x),$$

$$\text{cp}(f \circ g \circ x \circ i) \sim (x \circ i' \circ h) \Leftrightarrow i \circ i' \wedge h \sim f \circ g \wedge F_0 f(x) \sim x' \wedge F_0 g(x') \sim x''.$$

Il y a un foncteur d'oubli  $\sigma_i: \underline{F}_i \rightarrow \underline{C}$  qui est décrit par le couple de projections canoniques  $p: x \in F_i, c \rightarrow C_0$  et  $q: x \in F_i, d_0 f \rightarrow C_1$ .

2. Nous nous proposons de montrer que  $F_i \simeq \varinjlim_{F_i} Y_0 \sigma_i$ , sachant que  $Y$  est le plongement de Yoneda dont la description est donnée en 2.8.5.

La famille de préfaisceaux covariants externes  $Y_0 \sigma_i$  peut être décrite par la situation que voici

$$\begin{array}{ccc} & \partial_0 p^* \dashrightarrow \beta_0 & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \\ \partial_1 p^* & \dashrightarrow & p^* \end{array}$$

$$C_1 \xleftarrow{q} x \in F_i, d_0 f \xrightleftharpoons[\partial_1]{\partial_0} x \in F_i, c \xrightarrow{p} \varphi(i),$$

où  $p$  est la projection canonique et  $\alpha = \mathcal{R}^* f$ , c'est-à-dire que  $\alpha \circ i^* f(g) \sim g' \Leftrightarrow x \in F_i, d_0 f \wedge g: c \rightarrow d_0 f \wedge g' \sim f \circ g$  est valide, et où  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des morphismes cartésiens au-dessus de  $\partial_0$  et  $\partial_1$  respectivement.

Pour prouver que  $F_i \simeq \varinjlim_{F_i} Y_0 \sigma_i$ , nous allons montrer que  $F_i$  est le sommet d'un cône inductif universel de base  $p^*$ , c'est-à-dire qu'il y a une famille de transformations naturelles  $\gamma: p^* \Rightarrow F_i$  au-dessus de  $q$  telle que (a)  $\gamma$  coégalise  $\beta_0$  et  $\beta_1$ , et

(b)  $\underline{\delta}: p^* \Rightarrow G_i$  coégalise également  $\beta_0$  et  $\beta_1$ , et alors  $\delta$  se factorise de manière unique à travers  $\gamma$ .

3. Or nous connaissons une famille canonique de transformations naturelles de  $p^*$  vers  $F_i$  au-dessus de  $q$ . Il s'agit de  $[x]_c^{F_i}$ , introduite en 2.8.3; c'est le  $\gamma$  cherché.

3.1.  $[x]_c^{F_i}$  satisfait la condition (a).

En effet, on constate aisément que les formules

$$(\gamma \circ \beta_0)_c^{F_i}(g) \sim x'' \Leftrightarrow g: c \rightarrow d_0 f \wedge \exists x' (F_0 f(x) \sim x' \wedge F_0 g(x') \sim x'')$$

$(f \circ g, \alpha)^{i \circ f}_c(g) \sim x \Rightarrow g: x \rightarrow d \circ f \wedge F_i(f \circ g)(x) \sim x$  sont valides.

L'égalité  $f \circ g = f \circ g, \alpha$  découle alors du fait que  $F_i$  vérifie COMP.

3.2.  $[x]_c^{F_i}$  satisfait la condition (b).

Soit  $\delta: p^* \Rightarrow G_i$  une famille de transformations naturelles au-dessus de  $g$  telle que  $\delta \circ \beta_0 = \delta \circ \beta, \alpha$ , autrement dit telle que les formules

$\exists x' (F_i f(x) \sim x' \wedge \delta_d^{x' \circ id, f}(g) \sim y)$  et  $\delta_d^{x' \circ id, f}(f \circ g) \sim y$  soient équivalentes dans  $\mathbb{E}$ .

On construit  $\varepsilon: F_i \Rightarrow G_i$  en posant

$$\varepsilon^i = \{x \times y \mid \delta_d^{x \circ id, c}(id(x)) \sim y\}.$$

Le fait que  $\varepsilon^i$  ainsi construite vérifie l'axiome NAT se déduit des hypothèses imposées à  $\delta$ . En effet,

$\exists x' (F_i f(x) \sim x' \wedge \delta_{d \circ f}^{x' \circ id, f}(id(d \circ f)) \sim y)$  est par hypothèse équivalente à  $\delta_{d \circ f}^{x' \circ id, f}(f \circ id(d \circ f)) \sim y$  et donc à  $\delta_{d \circ f}^{x' \circ id, f}(id(d \circ f) \circ f) \sim y$  et finalement à  $\exists y' (\delta_{d, f}^{x' \circ id, f}(id(d, f)) \sim y' \wedge G_i f(y') \sim y)$  par naturalité de  $\delta$ .

La vérification de ce que  $\delta = \varepsilon \circ g$  est donnée par la suite de

formules équivalentes que voici:

$$\begin{aligned} (\varepsilon \circ g)_d^{x \circ id, c}(g) \sim y &\Leftrightarrow \exists x' (x \in F_i, x \wedge g: d \rightarrow x \wedge F_i g(x) \sim x' \wedge \delta_d^{x' \circ id}(id(d)) \sim y) \\ &\Leftrightarrow x \in F_i, x \wedge g: d \rightarrow x \wedge \delta_d^{x \circ id, c}(id(d) \circ g) \sim y \quad (\text{par hypothèse}) \\ &\Leftrightarrow \delta_d^{x \circ id, c}(g) \sim y. \end{aligned}$$

Si pour une autre famille  $\bar{\varepsilon}^i$ , on avait aussi  $\bar{\varepsilon} \circ g = \delta$ , cela impliquerait que les formules

$\exists x' (g: d \rightarrow x \wedge F_i g(x) \sim x' \wedge \bar{\varepsilon}_d^i(x) \sim y)$  et  $\delta_d^{x \circ id, c}(g) \sim y$  seraient équivalentes dans  $\mathbb{E}$ . En prenant  $x = d$  et  $g = id(x)$ , on obtient alors  $\bar{\varepsilon}_d^i(x) \sim y \Leftrightarrow \delta_d^{x \circ id, c}(id(x)) \sim y$  et donc  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ , ce qui prouve l'unicité de  $\varepsilon$  et achève la démonstration.  $\square$

## 2.13 Familles génératrices et catégories de représentation.

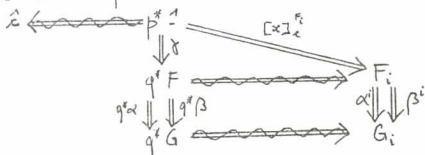
La proposition 2.12.2 ci-dessus a pour corollaire la

2.13.1 Proposition.

La famille des préfaisceaux représentables est famille génératrice dans  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}))$ .

démonstration.

Considérons le diagramme où  $\alpha^i, \beta^i: F_i \Rightarrow G_i$  sont deux familles différentes de transformations naturelles indexées par  $\varphi(i)$ .



$$C_0 \leftarrow P \quad \alpha \in F_i \quad \rightarrow G_i \quad \varphi(i)$$

On peut les remonter par  $q$  défini en 2.12.1. Si  $\gamma$  est la factorisation de  $[\alpha]_c^{F_i}$  à travers le morphisme cartésien, il est clair que  $\gamma$  sépare  $q^*\alpha$  et  $q^*\beta$ , sinon  $[\alpha]_c^{F_i}$  ne séparerait pas  $\alpha$  et  $\beta$  ce qui serait en contradiction avec le fait qu'il est collectivement épimorphique (cfr. 0.29)

□

2.13.2 En utilisant le lemme de Yoneda et 2.8.4, on s'aperçoit que la catégorie de représentation de  $F_i$  définie en 1.3.1 n'est autre que la catégorie  $\underline{F}_i$  introduite en 2.12.2. Cette catégorie sera donc notée désormais  $\mathcal{R}_{F_i}$  et notera  $\Phi_{F_i} = \gamma \circ \sigma_i$ . Finalement, 2.12.2 se résume en  $F_i \simeq \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_{F_i}} \Phi_{F_i}$  et est une particularisation à la fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}))$  du théorème 1.3.4.

2.14 Théorème.

La fibration  $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}))$  des familles de préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{E}$  est localement petite, possède des limites à gauche finies, des sommes disjointes universelles, une famille génératrice indexée par  $C_0$  et des coégalisateurs universels. Elle est de plus exacte au sens de Barr.