

Chapitre 3 :

Topologies de Grothendieck et faisceaux.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment le langage interne à un topos \mathbb{E} peut être étendu à la catégorie des préfaisceaux sur une catégorie \mathcal{C} interne à \mathbb{E} .

Nous allons utiliser cette extension pour définir les notions de topologie de Grothendieck et de faisceau et pour en étudier les principales propriétés. A nouveau, par la construction même du langage pour préfaisceaux, notre démarche suivra pas à pas celle qui est utilisée pour les situations ensemblistes. Ce chapitre est donc en fait une traduction quasi mot à mot dans le langage pour préfaisceaux de ce qui se fait pour les topologies et faisceaux sur une petite catégorie (i.e. interne à \mathbb{E} ns).

3.1 Les topologies de Grothendieck et les cribles couvrants.

3.1.1 Définitions.

Une topologie de Grothendieck \mathcal{J} sur une catégorie \mathcal{C} interne à \mathbb{E} est déterminée par la donnée d'un terme $\mathcal{J}c$ de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ ayant une variable libre c de type C_0 et vérifiant dans \mathbb{E} les axiomes suivants :

$$\text{TOP1} \quad \mathcal{J}c \in C_2c$$

$$\text{TOP2} \quad \hat{c} \in \mathcal{J}c$$

$$\text{TOP3} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{J}(d, f) \rightarrow \hat{f}^* \mathcal{R} \in \mathcal{J}(d, f)$$

$$\text{TOP4} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{J}c \wedge \mathcal{R}' \in C_2c \wedge \forall d (f \in \mathcal{R}d \rightarrow \hat{f}^* \mathcal{R}' \in \mathcal{J}d) \rightarrow \mathcal{R}' \in \mathcal{J}c,$$

sachant que \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont des variables préfonctionnelles de base C_1 .

Un couple $(\underline{C}, \mathcal{J})$ forme d'une catégorie interne \underline{C} à \mathbb{E} et d'une topologie de Grothendieck \mathcal{J} sur \underline{C} est appelé site interne à \mathbb{E} .

3.1.2 Lemme.

Toute topologie de Grothendieck s'étend en un sous-préfaïceau du préfaïceau des cribles sur \underline{C} .

démonstration.

On pose $\mathcal{J}\mathcal{P} = \{ \underline{R} \underline{R}' / \underline{R} \in \mathcal{J}(d, f) \wedge \underline{R}' \simeq \hat{f}^* \underline{R} \}$.
L'axiome TOP3 assure le caractère bien défini. La fonctorialité provient de ce que $\hat{f} \circ \hat{g}^* \underline{R} = \hat{g}^* \hat{f}^* \underline{R}$. En effet, il est facile de constater que sous l'hypothèse $d \circ f = d, g$, les termes $\hat{f} \circ \hat{g}^* \underline{R}(c) = \{ h \mid h \circ (f \circ g) \in \underline{R}(c) \}$ et $\hat{g}^* \hat{f}^* \underline{R}(c) = \{ h \mid (h \circ f) \circ g \in \underline{R}(c) \}$ sont égaux. □

3.1.3 Proposition.

Un sous-préfaïceau \mathcal{J} de \mathcal{C}_c est une topologie de Grothendieck SSI

\mathcal{J} satisfait les axiomes TOP1 à 3 et

$$\begin{array}{l} \text{TOP5} \quad \underline{R} \in \mathcal{J}c \wedge \underline{R}' \in \underline{R} \wedge \forall d (f \in \underline{R}(d) \rightarrow \hat{f}^* \underline{R}' \in \mathcal{J}d) \rightarrow \underline{R}' \in \mathcal{J}c \\ \text{TOP6} \quad \underline{R} \in \mathcal{J}c \wedge \underline{R} \subseteq \underline{R}' \wedge \underline{R}' \in \mathcal{C}_c \rightarrow \underline{R}' \in \mathcal{J}c \end{array}$$

démonstration.

1. Condition suffisante.

Il est clair que TOP4 implique TOP5. De plus, si l'on remarque que $f \in \underline{R}d \wedge \underline{R}' \in \mathcal{C}_c \rightarrow \hat{f}^* \underline{R}' \times \hat{d}$ est une formule valide car les égalités $\hat{f}^* \underline{R}'(c) \times \{ g \mid g: e \rightarrow d \wedge f \circ g \in \underline{R}'(e) \} \simeq \{ g \mid g: e \rightarrow d \wedge \underline{R}'(f)(g) \in \underline{R}'(e) \} \times \hat{d}(e)$ le sont, on en déduit que TOP2 et TOP4 impliquent TOP6.

2. Condition nécessaire.

Notons $\underline{R} \wedge \underline{R}'$ le terme préfaisceau défini par les égalités $\underline{R} \wedge \underline{R}'(c) = \{ f \mid f \in \underline{R}c \wedge f \in \underline{R}'c \}$ et $\underline{R} \wedge \underline{R}'(f) = \{ g g' \mid g \in \underline{R}d, f \wedge g \in \underline{R}'d, f \wedge g' \in \underline{R}'d \}$.

L'antécédent de l'implication TOP4 implique la formule $\forall f d (f \in \underline{R} d \rightarrow \hat{f}^*(R \cap R') \in Jd)$, ce qui par TOP5, entraîne la formule $\underline{R} \cap \underline{R}' \in Jc$ et donc par TOP6, comme $\underline{R} \cap \underline{R}' \in \underline{R}'$ est valide, que $\underline{R}' \in Jc$.
L'axiome TOP4 se trouve donc vérifié. \square

3.1.5 Définition.

Une famille de préfaisceaux Fic indexée par $\varphi(i, c)$ est une famille de cribles couvrants pour la topologie J si Fic satisfait la formule $\varphi(i, c) \rightarrow Fic \in Jc$.

3.1.6 Proposition.

Une intersection finie de cribles couvrants est encore un crible couvrant.

démonstration.

Il s'agit de démontrer que $\underline{R} \in Jc \wedge \underline{R}' \in Jc \rightarrow \underline{R} \cap \underline{R}' \in Jc$ est valide.

Par TOP5, ceci sera satisfait si

$\underline{R} \in Jc \wedge \underline{R}' \in Jc \rightarrow \forall f d (f \in \underline{R} d \rightarrow \hat{f}^*(R \cap R') \in Jd)$ l'est. Cette dernière formule est valide par TOP3 conjugué au fait que $\underline{R} \in Jc \wedge \underline{R}' \in Jc \rightarrow \forall f d (f \in \underline{R} d \rightarrow \hat{f}^*(R \cap R') \simeq \hat{f}^*R \cap \hat{f}^*R')$ est valide. En effet, nous avons vu en 3.13.1 que $f \in \underline{R} d \rightarrow \hat{f}^*R \simeq \hat{d}$; d'où $f \in \underline{R} d$ entraîne que $\hat{f}^*(R \cap R') \simeq \hat{f}^*R \cap \hat{f}^*R' \simeq \hat{d} \cap \hat{f}^*R' \simeq \hat{f}^*R'$. \square

3.1.7 Proposition.

Les familles de cribles couvrants sont stables par image réciproque dans $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\underline{C}))$.

démonstration.

Soit Ric une famille indexée par $\varphi(i, c)$ et vérifiant la formule $\varphi(i, c) \rightarrow Ric \in Jc$ pour une topologie de Grothendieck J donnée. Soit $t: \psi(k, c) \rightarrow \varphi(i, c)$ un morphisme de $\text{For}(E)/C_0$. Montrons la validité de la formule $\psi(k, c) \rightarrow t^*R_{ke} \in Jc$. Celle-ci est conséquence de celle de $\psi(k, c) \rightarrow t^*R_{ke} \simeq Ric$.

En effet, $t(h,c) \sim i \rightarrow t^* R_{h,c} \times R_{i,c}$ est valide, comme le montre la dérivation

$$\begin{array}{c}
 (2) \\
 \frac{t(h,c) \sim i}{i \sim i} \quad \frac{t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d)}{g \in R_{i,c}(d)} \quad \frac{t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d)}{t(h,c) \sim i} \quad (3) \\
 \frac{\exists i (t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d))}{g \in R_{i,c}(d)} \quad (1) \quad \frac{\exists i (t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d))}{g \in R_{i,c}(d)} \\
 \frac{\exists i (t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d)) \rightarrow g \in R_{i,c}(d)}{\exists i (t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d)) \leftrightarrow g \in R_{i,c}(d)} \\
 \frac{\forall g (\exists i (t(h,c) \sim i \wedge g \in R_{i,c}(d)) \leftrightarrow g \in R_{i,c}(d))}{t^* R_{h,c}(d) \times R_{i,c}(d)}
 \end{array}$$

Mais alors, la validité de $\varphi(h,c) \rightarrow \exists i (t(h,c) \sim i)$ permet d'écrire la dérivation

$$\begin{array}{c}
 (1) \\
 \frac{\varphi(h,c)}{\exists i (t(h,c) \sim i)} \quad \frac{\forall i (c) \rightarrow R_{i,c} \in J_c}{R_{i,c} \in J_c} \quad \frac{t(h,c) \sim i}{t^* R_{h,c} \times R_{i,c}} \quad (4) \\
 \frac{\exists i (t(h,c) \sim i) \quad R_{i,c} \in J_c}{t^* R_{h,c} \in J_c} \quad (2)
 \end{array}$$

qui fournit la thèse annoncée. □

Nous avons vu en 2.11.4 que la collection des familles de préfaisceaux de base X est petite. Il est facile de voir que celle des cribles tels que définis en 2.94.e est également petite. On peut aussi montrer la petitesse de la collection des cribles courants.

3.1.8 Proposition.

Dans la fibration $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\underline{\mathcal{C}}))$ la collection des familles de cribles courants est petite.

démonstration.

On construit la famille générique $K_{R,c}$ de tous les cribles courants indexé par la formule $\underline{R} \in J_c$ en posant

$$K_{\mathbb{R},c}(d) = \{f \mid f: d \rightarrow c \wedge f \in \mathbb{R}(d) \wedge \mathbb{R} \in \mathbb{J}c\} \text{ et}$$

$$K_{\mathbb{R},c}(g) = \{f \mid f: d, g \rightarrow c \wedge f \in \mathbb{R}(d, g) \wedge f \sim f \circ g\}.$$

Si $R_{h,c}$ est une famille de cribles couvrants indexée par $\psi(h,c)$, on lui associe un morphisme $s: \psi(h,c) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{J}c$ tel que $(s^*K)_{h,c} = R_{h,c}$. En effet, il suffit de poser $s(h,c) \sim (R, c)$ équivalente à $\psi(h,c) \wedge R_{h,c} \simeq \mathbb{R} \wedge c \simeq c$. De plus, comme $\mathbb{R} \in \mathbb{J}c \rightarrow K_{\mathbb{R},c} \in \mathbb{J}c$ est valide, on sait que l'image réciproque de $K_{\mathbb{R},c}$ sera toujours une famille de cribles couvrants. \square

3.2. Topologies de Grothendieck et topologies de Lawvere-Tierney.

3.2.1. Considérons une topologie de Grothendieck \mathbb{J} .

Soit $j: C_c \Rightarrow C_c$ sa flèche caractéristique. Rappelons que

$$j_c(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}' \text{ est défini par } \mathbb{R} \in C_c c \wedge \mathbb{R}' \simeq [R]_c^* \mathbb{J} \text{ où}$$

$$[R]_c = \{f \mid f: d \rightarrow c \wedge \mathbb{R} \in C_c c \wedge \mathbb{R}' \simeq \hat{f}^* \mathbb{R}\}. \text{ Par abus, nous}$$

écrivons $j_c(\mathbb{R})(d)$ pour le terme $\{f \mid f: d \rightarrow c \wedge \exists \mathbb{R}' (j_c \mathbb{R} \sim \mathbb{R}' \wedge f \in \mathbb{R}'(d))\}$.

3.2.2 Lemme.

Avec les notations ci-dessus, les formules suivantes sont valides

$$\text{dans } \mathbb{E}: (a) \mathbb{R} \in C_c c \rightarrow \forall d (j_c \mathbb{R}(d) \simeq \{f \mid f: d \rightarrow c \wedge \hat{f}^* \mathbb{R} \in \mathbb{J}d\}),$$

$$(b) \mathbb{R} \in \mathbb{J}c \Leftrightarrow j_c \mathbb{R} \hat{c}.$$

démonstration.

(a) Sous l'hypothèse $\mathbb{R} \in C_c c$, il faut montrer l'équivalence des formules $f: d \rightarrow c \wedge f \in [R]_c^* \mathbb{J}(d)$ et $f: d \rightarrow c \wedge \hat{f}^* \mathbb{R} \in \mathbb{J}d$, ce qui est clair par définition de $[R]_c$.

(b) Il est facile de voir par TOP4 que $\mathbb{R} \in \mathbb{J}c \Leftrightarrow \forall f d (f: d \rightarrow c \rightarrow \hat{f}^* \mathbb{R} \in \mathbb{J}d)$ est valide, et donc que $\mathbb{R} \in \mathbb{J}c \Leftrightarrow \forall d (j_c \mathbb{R}(d) \simeq \hat{c}(d))$ l'est par (a); la thèse est donc prouvée. \square

3.2.3 Proposition.

La flèche caractéristique d'une topologie de Grothendieck est une topologie de Lawvere-Tierney.

démonstration.

Soit j la flèche caractéristique de J .

1. $j \circ \nu = \nu$.

Cela revient à démontrer que $j_c \hat{c} \sim \nu \hat{c}$, ce qui est clair par TOP2 et le lemme 3.2.2. (b).

2. $j \circ j = j$.

Cette égalité découle de la validité de $[[R_c]_* J]_*^* \simeq [R_c]_* J$, ou encore de celle de $f: d \rightarrow c \wedge \hat{f}^* [R_c]_* J \in Jd \Leftrightarrow f: d \rightarrow c \wedge \hat{f}^* R \in Jd$.

Or $\hat{f}^* [R_c]_* J(c) = \{g: c \rightarrow d \wedge f: d \rightarrow c \wedge \hat{g}^* \hat{f}^* R \in Jc\}$. Donc si $\hat{f}^* R \in Jd$, $\hat{f}^* [R_c]_* J$ vaut \hat{d} et est donc bien dans Jd , d'où la formule de droite implique celle de gauche. Dans l'autre sens, on utilise TOP4.

3. $j \circ \wedge = \wedge \circ j \times j$.

Étant donné que $\wedge(R, R') \simeq R \wedge R'$, il s'agit de montrer que $j_c(R \wedge R') \sim j_c(R) \wedge j_c(R')$, ce qui se déduit facilement du fait que les formules $R \wedge R' \in Jc \Leftrightarrow R \in Jc \wedge R' \in Jc$ et $\hat{f}^*(R \wedge R') \simeq \hat{f}^* R \wedge \hat{f}^* R'$ sont valides. ⊗

3.2.4 Proposition.

Les sous-objets de \mathcal{C}_c classifiés par des topologies de Lawvere-Tierney sont des topologies de Grothendieck.

démonstration.

Soit $j: \mathcal{C}_c \Rightarrow \mathcal{C}_c$ une topologie de Lawvere-Tierney classifiant $J \in \mathcal{C}_c$. Nous savons donc que $Jc = \{R \mid R \in \mathcal{C}_c \wedge j_c R \sim \hat{c}\}$.

1. J satisfait trivialement TOP1.

2. $j \circ \nu = j$ implique $j_c \hat{c} \sim \hat{c}$ et donc que J satisfait TOP2.

3. la naturalité de j entraîne la validité de $\hat{f}^* j_{d,f} \hat{c} \sim j_{d,f} \hat{f}^* \hat{c}$ et donc celle de $R \in Jd, f \rightarrow j_{d,f} \hat{f}^* R \sim \hat{d}_f$, d'où J satisfait TOP3.

4. Par lemme 3.2.2 (a) et l'unicité de la fonction caractéristique, la formule $R \in Jc \wedge R' \in \mathcal{C}_c \wedge \forall f (f \in R'd \rightarrow \hat{f}^* R' \in Jd) \rightarrow R \in j_c(R')$ est valide. D'où avec la même hypothèse, on peut conclure $j_c R \in j_c j_c R' \simeq j_c R'$ puisque j respecte les inclusions. D'où $j_c R \sim \hat{c}$ et TOP4 est satisfait. ⊗

3.2.5 Théorème.

Dans le topos $\text{Pref}_E(\underline{C})$, il y a bijection entre les topologies de Lawvere - Tierney et les topologies de Grothendieck.

démonstration.

C'est un corollaire de 3.2.3 et 3.2.4. ☒

3.3. Les familles de faisceaux pour une topologie de Grothendieck.3.3.1 Définition.

Une famille de préfaisceaux F_i indexée par $\varphi(i)$ est une famille de J -faisceaux pour une topologie de Grothendieck J si pour toute formule $\varphi(i, c)$, tout morphisme $s: \varphi(i, c) \rightarrow \varphi(i)$ et toute famille $R_{i,c}$ de variables courants indexée par $\varphi(i, c)$, on a la bijection

$$\text{Hom}(R_{i,c}, \mathcal{S}^*F) \simeq \text{Hom}(p^* \mathcal{S}^*F)$$

dans la fibre en $\varphi(i, c)$ de $\text{Fam}(\text{Pref}_E(\underline{C}))$, sachant que $p: \varphi(i, c) \rightarrow \varphi(i)$ est la projection canonique.

3.3.2 Lemme.

Une sous-famille $F'_i \in F_i$ indexée par $\varphi(i)$ est dense pour une topologie de Lawvere - Tierney $j: C_2 \Rightarrow C_2$

SSI

la formule $x \in F'_i, c \rightarrow \int_c \varphi_c^i x \sim \hat{x}$ est valide avec φ^i la flèche caractéristique de F'_i .

démonstration.

Dire que F'_i est dense, c'est dire que le carré

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \parallel & & \downarrow \scriptstyle \text{w} \\ F_i & \xrightarrow{\varphi^i} & C_2 \xrightarrow{j} C_2 \end{array}$$

est un produit fibre, ou encore que $F_i \simeq (\varphi^i \circ j)^* v$. Si on traduit cet isomorphisme au niveau c , on obtient $x \in F'_i, c \leftrightarrow \int_c \varphi_c^i x \sim \hat{x}$ ce qui assure la thèse. ☒

3.3.3. Corollaire.

Soient $p: x \in F_i c \rightarrow C_0$ la projection canonique et J une topologie de Grothendieck dont $j: C_1 \rightarrow C_0$ est la flèche caractéristique.

Si F'_i est une sous-famille j -dense de F_i indexée par $\varphi(i)$,
Alors la famille $([x]_{x,c}^{F'_i})^* F'_i$ est une sous-famille J -couvrante de $p^* 1$.

démonstration.

Si φ^i est la flèche caractéristique de F'_i , il est bien connu par 2.9.4 que $\varphi^i_c(x) \sim \hat{c} \Leftrightarrow x \in F'_i c \wedge \hat{c} = ([x]_{x,c}^{F'_i})^* F'_i$ est valide. Si on combine cela avec 3.3.2, on obtient que la densité de F'_i dans F_i entraîne la validité de $x \in F_i c \wedge j_c([x]_{x,c}^{F'_i})^* F'_i \sim \hat{c}$. La thèse suit alors de 3.2.2. (b). \square

3.3.4 Lemme.

Soient $p: \varphi(k,c) \rightarrow C_0$ un morphisme de projection canonique et J une topologie de Grothendieck ayant j comme flèche caractéristique.

Si une famille de cribles $R_{k,c}$ indexée par $\varphi(k,c)$ est J -couvrante,

Alors pour tout $s: \varphi(k,c) \rightarrow \varphi(i)$, $\coprod_s R_i$ est un sous-objet j -dense de

$$\coprod_s p^* 1_i.$$

démonstration.

Soit \hat{c} la flèche caractéristique de $\coprod_s R_i$ sous-objet de $\coprod_s p^* 1_i$.

Par 3.3.2, il suffit de vérifier que la formule

$$(gk,c) \in \coprod_s p^* 1_i(d) \rightarrow j_d \alpha'_d(gk,c) \sim \hat{c} \text{ est valide ou encore que}$$

$g: d \rightarrow c \wedge s(k,c) \sim i \rightarrow \exists \underline{R} (j_d \underline{R} \sim \hat{c} \wedge \alpha'_d(gk,c) \sim \underline{R})$ l'est. Or remarquons que

$\alpha'_d(gk,c) \sim \underline{R}$ est équivalente à $[gk,c]_d^* \coprod_s R_i \simeq \underline{R}$ et que les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \text{sont vraies } [gk,c]_d^* \coprod_s R_i(c) &\simeq \{f \mid f: e \rightarrow d \wedge g: d \rightarrow c \wedge (gof, k,c) \in \coprod_s R_i(c)\} \\ &\simeq \{f \mid f: e \rightarrow d \wedge g: d \rightarrow c \wedge s(k,c) \sim i \wedge gof \in R_{k,c}(c)\} \\ &\simeq \{f \mid f: e \rightarrow d \wedge g: d \rightarrow c \wedge s(k,c) \sim i \wedge f \in \hat{g}^* R_{k,c}(c)\}, \end{aligned}$$

d'où on conclut à la validité de $g: d \rightarrow c \wedge s(k,c) \sim i \rightarrow [gk,c]_d^* \coprod_s R_i \simeq \hat{g}^* R$.

En conséquence, la thèse est ramené à la véracité de la formule

$$g: d \rightarrow c \wedge s(k,c) \sim i \rightarrow j_d(\hat{g}^* R) \sim \hat{c} \text{ ce qui est clair car}$$

$s(k, \varepsilon) \rightarrow \psi(k, \varepsilon)$ et $\psi(k, \varepsilon) \rightarrow R_{k, \varepsilon} \in J_c$ sont vraies par hypothèse. \square

Remarque: En particulier, nous avons démontré qu'une famille J -compacte est j -dense (il suffit de prendre pour s l'identité).

3.3.5 Théorème.

Soient J une topologie de Grothendieck et j la topologie de Lawvere-Tierney qui lui est associée.

Les notions de famille de J -faisceaux et de famille de faisceaux pour la topologie j coïncident.

démonstration.

1. Toute famille de J -faisceaux vérifie la condition de j -faisceaux. Soient G_i une telle famille indexée par $\varphi(i)$. Il s'agit de prouver que pour toute inclusion dense $F'_i \subseteq F_i$, on a la bijection $\text{Hom}(F'_i, G_i) \cong \text{Hom}(F_i, G_i)$. Considérons la situation décrite par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial_0^*([\infty]_{\varepsilon}^{F'_i})^* F'_i & \xrightarrow{\alpha'} & \partial_0^*([\infty]_{\varepsilon}^{F_i})^* F_i & \xrightarrow{\delta} & F'_i \\
 \downarrow \varepsilon_1 & \searrow \alpha & \downarrow \varepsilon_0 & \searrow \beta & \downarrow \delta \\
 \partial_0^* p^* \dashv \! \! \dashv & \xrightarrow{\alpha} & \partial_0^* p^* \dashv \! \! \dashv & \xrightarrow{\beta} & F_i \\
 \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \delta \\
 x \in F_i \text{ d.f.} & \xrightarrow{\partial_0} & x \in F_i \text{ c.} & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(i)
 \end{array}$$

les notations étant empruntées à 2.12.2. Comme les limites à droite sont universelles (cf 2.12.1), δ est un cône inductif limite et en conséquence est un morphisme collectivement épimorphique.

Soit $\gamma: F'_i \Rightarrow G_i$ une famille de transformations naturelles indexée par $\varphi(i)$. Il s'agit de lui associer $\beta_0: F_i \Rightarrow G_i$. Or, par 3.3.3,

$([x]_{\alpha}^{F_i})^* F_i'$ est J -courvante. Il y a donc une factorisation $\beta: p^{*1} \Rightarrow G_i$ au-dessus de q telle que $\beta \delta = \beta \varepsilon$.

De plus, on s'aperçoit que $\beta \beta_0 = \beta \beta_1 \alpha$. En effet, ε_0 étant J -courvante par 3.1.7, il suffit de voir que $\beta \beta_0 \varepsilon_0 = \beta \beta_1 \alpha \varepsilon_0$ ce qui est clair car

$$\beta \beta_0 \varepsilon_0 = \beta \varepsilon \beta'_0 = \beta \delta \beta'_0 = \beta \delta \beta'_1 \alpha' = \beta \beta_1 \alpha \varepsilon_0.$$

Or comme $F_i = \varinjlim_{R_{F_i}} \Phi_{F_i}$, il y a une factorisation unique β_0 telle que

$$\beta_0 \circ [x]_{\alpha}^{F_i} = \beta.$$

Mais alors, le triangle $\begin{array}{ccc} F_i' & \xrightarrow{\beta} & G_i \\ \uparrow \beta_0 & \searrow & \\ F_i & \xrightarrow{\beta_0} & G_i \end{array}$ est commutatif car il l'est précédé de δ .

2. Toute famille de faisceaux de Lawvere-Tierney pour j est une famille de J -faisceaux.

Soit G_i une famille de faisceaux de Lawvere-Tierney pour j .

Fixons un morphisme $s: \psi(k, c) \rightarrow \psi(i)$ et une famille $R_{k,c}$ de cribles courvants.

Si $p: \psi(k, c) \rightarrow C_0$ est la projection canonique, nous savons par 3.3.4 que

$\coprod_0 R_i$ est j -dense dans $\coprod_0 p^{*1}_i$; d'où les bijections

$$\text{Hom}(\coprod_0 R_i, G_i) \simeq \text{Hom}(\coprod_0 p^{*1}_i, G_i),$$

$$\text{Hom}(R, s^* G_i) \simeq \text{Hom}(p^{*1}, s^* G_i)$$

sont satisfaites et la famille G_i est bien une famille de J -faisceaux. \(\square\)

Notons $\text{Fam}(\text{Fais}_{\mathbb{E}}(\underline{C}, J))$ la sous-fibration pleine de $\text{Fam}(\text{Pres}_{\mathbb{E}}(\underline{C}))$ formée des familles de J -faisceaux.

Les théorèmes 2.5.5, 3.2.5 et 3.3.5 conduisent au résultat suivant.

3.3.6 Théorème.

La fibration $\text{Fam}(\text{Fais}_{\mathbb{E}}(\underline{C}, J))$ est équivalente à la fibration géométrique associée au morphisme géométrique canonique de $\mathbb{E}_J^{\text{str}}$ dans \mathbb{E} , sachant que j est la topologie de Lawvere-Tierney associée à J .

En particulier, le foncteur d'inclusion de $\text{Fam}(\text{Fais}_{\mathbb{E}}(\underline{C}, J))$ dans $\text{Fam}(\text{Pres}_{\mathbb{E}}(\underline{C}))$ admet un adjoint à gauche exact à gauche a , le foncteur

faisceau associé.

3.4 Propriétés de Fam (Fais_E(C, J)).

3.4.1 Proposition.

La fibration Fam(Fais_E(C, J)) est une fibration à limites à gauche finies où chaque fibre est un topos dont la structure est respectée par image réciproque. ☒

3.4.2 Proposition.

La fibration Fam(Fais_E(C, J)) possède des sommes infinies disjointes et universelles.

démonstration.

On pose $\coprod_0 F = a(\coprod_0 F)$ où a est le foncteur "faisceau associé".

Les adjonctions fournissent alors les bijections désirées:

$$\text{Hom}(a \coprod_0 F_i, G_i) = \text{Hom}(\coprod_0 F_i, G_i) \simeq \text{Hom}(F_i, S^* G_i)$$

Les morphismes cocartésiens sont donc obtenus par composition d'un morphisme cocartésien de Fam(Prof_E(C)) avec un morphisme bidense. Ces deux notions sont stables par produit fibre, les sommes sont donc universelles.

Le caractère disjoint est aisé à vérifier. ☒

3.4.3 Proposition.

La fibration Fam(Fais_E(C, J)) est localement petite.

démonstration.

C'est clair puisqu'elle est une sous-fibration pleine d'une fibration localement petite. ☒

3.4.4 Proposition.

La fibration Fam(Fais_E(C, J)) possède des limites à droite universelles.

démonstration.

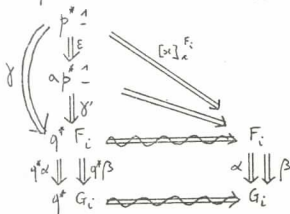
Cela découle directement de 3.4.1 et 3.4.2.

3.4.5. Proposition.

La fibration $\text{Fam}(\text{Fais}_E(\underline{C}, \mathcal{J}))$ possède une famille de générateurs indexée par C_0 .

démonstration.

Nous allons montrer que α^{\wedge} est la famille cherchée. Pour cela, considérons le diagramme que voici dans $\text{Fam}(\text{Prif}_E(\underline{C}))$ où α et β sont différents:



comme $[x]_c^{F_i}$ est un morphisme collectivement épimorphique, γ sépare q^{α} et q^{β} ; E étant bidenso, γ' les sépare également. Ainsi, α^{\wedge} est bien une famille génératrice.

$$C_0 \leftarrow P \xleftarrow{x \in F_i \cdot c} \xrightarrow{q} \varphi(i)$$

□

Tous ces résultats donnent lieu au théorème suivant:

3.4.6 Théorème.

La fibration $\text{Fam}(\text{Fais}_E(\underline{C}, \mathcal{J}))$ des familles de \mathcal{J} -faisceaux sur \underline{C} à valeurs dans E possède des limites à gauche finies, des sommes infinies disjointes et universelles, une famille génératrice indexée par C_0 , des coégalisateurs universels. Elle est en plus localement petite et exacte au sens de Barr.

□

3.5. Internalisation de la notion de \mathcal{J} -faisceau.

Dans ce paragraphe, nous voudrions à l'aide du langage interne construire une formule qui décrive adéquatement les conditions que doit remplir un préfaisceau pour être un faisceau.

Pour cela, débutons par des considérations générales sur les fibrations. Soient $C: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ une fibration localement petite et I un objet de \mathbb{E} . Si X_1 et X_2 sont des objets de $C(I)$, on sait que pour tout morphisme $f: X_1 \rightarrow X_2$ et tout Z de $C(I)$, il y a un morphisme $\bar{f}: \text{Hom}_I(X_2, Z) \rightarrow \text{Hom}_I(X_1, Z)$,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_I(X_2, Z) & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & \text{Hom}_I(X_1, Z) \\ p_2 \searrow & & \swarrow p_1 \end{array}$$

défini par $\bar{f}^*(\delta_{x_2, z}) = \delta_{x_2, z} \circ p_2^* f$ sachant que $\delta_{x_1, z}$ et $\delta_{x_2, z}$ sont les morphismes génériques.

3.5.1 Lemme.

Si les compositions par $p_1^* f$ et $p_2^* f$ fournissent des bijections ensemblistes, alors \bar{f} est un isomorphisme de \mathbb{E}/I .

démonstration.

Tout d'abord, remarquons que le carré ensembliste suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(p_1^* X_2, p_1^* Z) & \xrightarrow{- \circ p_1^* f} & \text{Hom}(p_1^* X_1, p_1^* Z) \\ \downarrow \bar{f}^* & & \downarrow \bar{f}^* \\ \text{Hom}(p_2^* X_2, p_2^* Z) & \xrightarrow{- \circ p_2^* f} & \text{Hom}(p_2^* X_1, p_2^* Z) \end{array}$$

est toujours commutatif car $p_2 = p_1 \circ \bar{f}$. Si α_1 et α_2 sont les inverses respectifs de $- \circ p_1^* f$ et $- \circ p_2^* f$, on a également que $\bar{f}^* \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \bar{f}^*$ (1).

On définit alors $\bar{f}^{-1}: \text{Hom}_I(X_2, Z) \rightarrow \text{Hom}_I(X_1, Z)$ comme étant l'unique morphisme déterminé par $\alpha_1(\delta_{x_2, z})$, i.e. $\bar{f}^{-1}(\delta_{x_2, z}) = \alpha_1(\delta_{x_2, z})$.

1. Il faut vérifier que $\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}$ est l'identité.

Pour cela, il suffit que $(\bar{f}^{-1})^* \bar{f}^*(\delta_{x_2, z}) = \delta_{x_2, z}$, ce qui apparaît grâce à la suite d'égalités $(\bar{f}^{-1})^* \bar{f}^*(\delta_{x_2, z}) = (\bar{f}^{-1})^*(\delta_{x_2, z} \circ p_2^* f) = (\bar{f}^{-1})^*(\delta_{x_2, z}) \circ (\bar{f}^{-1})^*(p_2^* f) = \alpha_1(\delta_{x_2, z}) \circ p_1^* f = \delta_{x_2, z}$.

2. Il faut aussi que $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f}$ soit l'identité, ou encore que

$\bar{f}^*(\bar{f}^{-1})^*(\delta_{x_2, z}) = \delta_{x_2, z}$. C'est la conséquence des égalités

$$\bar{f}^*(\bar{f}^{-1})^*(\delta_{x_2, z}) = \bar{f}^*(\alpha_1(\delta_{x_2, z})) = \alpha_2(\bar{f}^*(\delta_{x_2, z})) = \alpha_2(\delta_{x_2, z} \circ p_2^* f) = \delta_{x_2, z}.$$



3.5.2 Lemme.

Si $\bar{f}: \text{Hom}_{\mathbb{I}}(X_2, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{I}}(X_1, Z)$ est un isomorphisme,
Alors les ensembles $\text{Hom}_{C(\mathbb{I})}(X_1, Z)$ et $\text{Hom}_{C(\mathbb{I})}(X_2, Z)$ sont en bijection.

démonstration.

Si $g: X_1 \rightarrow Z$ est un morphisme de $C(\mathbb{I})$, on sait lui correspondre un unique $\tilde{g}: \mathbb{I} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{I}}(X_1, Z)$ tel que $\bar{f} \circ \tilde{g} = 1_{\mathbb{I}}$ et $\tilde{g}^*(\delta_{X_1, Z}) = g$.

On définit $\alpha: \text{Hom}_{C(\mathbb{I})}(X_1, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{C(\mathbb{I})}(X_2, Z)$ en prenant pour $\alpha(g)$ la flèche $(\bar{f}^{-1} \circ \tilde{g})^*(\delta_{X_2, Z})$. Nous allons voir que cet α est l'inverse de la composition par \bar{f} et donc qu'il fournit la bijection annoncée.

1. D'une part, il faut voir l'égalité $\alpha(g) \circ \bar{f} = g$. Celle-ci est une conséquence, par le caractère localement petit, de l'égalité $\widetilde{\alpha(g) \circ \bar{f}} = \tilde{g}$ qui est claire car $\widetilde{\alpha(g) \circ \bar{f}} = \bar{f} \circ \widetilde{\alpha(g)} = \bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ \tilde{g} = \tilde{g}$.

2. D'autre part, il s'agit de voir que $\alpha(g' \circ \bar{f}) = g'$. Si on remarque que $\widetilde{g' \circ \bar{f}} = \bar{f} \circ \tilde{g}'$, il vient que $\widetilde{\alpha(g' \circ \bar{f})} = (\bar{f}^{-1} \circ \bar{f} \circ \tilde{g}')^*(\delta_{X_2, Z}) = \tilde{g}'$.

□

3.5.3 Notations et remarques.

Nous voudrions définir la formule "α est un morphisme de φ(x) vers ψ(y) dans For(E)" pour un terme α de type Ω^{X,Y} avec τx = X et τy = Y.

Cette formule, notée α: φ(x) → ψ(y), est par définition la suivante:

$\forall x, y' \left[(\alpha(x) \sim y \rightarrow \varphi(x) \wedge \psi(y)) \wedge (\alpha(x) \sim y' \rightarrow y \sim y') \wedge (\varphi(x) \rightarrow \exists y (\alpha(x) \sim y)) \right]$,
 les notations étant celles fixées en 0.17.

La formule "α est un isomorphisme de φ(x) vers ψ(y)", notée

$\alpha: \varphi(x) \xrightarrow{\sim} \psi(y)$, s'écrit alors

$\alpha: \varphi(x) \rightarrow \psi(y) \wedge \forall x, y' \left[(\alpha(x) \sim y \wedge \alpha(x') \sim y' \rightarrow x \sim x') \wedge (\psi(y) \rightarrow \exists x (\alpha(x) \sim y)) \right]$

Nous savons par 3.1.8 que la collection des variables courantes est petite: la famille courante générique est notée $K_{R,E}$, indexée par $\underline{R} \in J_E$ et sous-objet de $q^* \mathbb{1}$, si $q: \underline{R} \in J_E \rightarrow C_0$ est la projection canonique.

Rappelons également que si F_i et G_i sont deux familles indexées par $\varphi(i)$, $\text{Hom}_{\varphi(i)}(F_i, G_i)$ est la formule "α: $F_i \Rightarrow G_i$ " (cf 2.11.1).

Ainsi si θ est l'inclusion de $K_{R,c}$ dans $q^* \mathbb{1}$, il est facile de voir que θ induit un morphisme $\bar{\theta}$ de $\text{Hom}(q^* \mathbb{1}, F_i)$ vers $\text{Hom}(K_{R,c}, F_i)$ dans $\text{For}(E)$ par composition.

Avec les conventions mises au point ci-dessus,

$\bar{\theta}: \text{Hom}(q^* \mathbb{1}, F_i) \longrightarrow \text{Hom}(K_{R,c}, F_i)$ est donc une formule valide de $\mathcal{A}(E)$.

Ces préliminaires nous permettent d'énoncer le théorème :

3.5.4 Théorème.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) La famille F_i de préfaisceaux indexée par $\varphi(i)$ est une famille de J -faisceaux.
- (2) Pour toute formule $\psi(k,c)$, tout $s: \psi(k,c) \rightarrow \varphi(i)$ et tout $R_{k,c}$ famille de cribles courants indexée par $\psi(k,c)$, on a l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\psi(k,c)}(R_{k,c}, s^* F) \cong \text{Hom}_{\psi(k,c)}(p^* \mathbb{1}, s^* F)$$
 avec p la projection canonique.
- (3) La formule $\bar{\theta}: \text{Hom}(q^* \mathbb{1}, F_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(K_{R,c}, F_i)$ est valide.

démonstration.

Voyons d'abord que (1) implique (2).

Si F_i est une famille de J -faisceaux, on sait qu'il y a une bijection naturelle entre $\text{Hom}(R_{k,c}, s^* F)$ et $\text{Hom}(p^* \mathbb{1}, s^* F)$. Le caractère courant étant stable par image réciproque (cfr 3.1.7), le lemme 3.5.1 assure l'implication désirée.

L'implication de (2) vers (1) est une conséquence directe de 3.5.2.

Pour voir que (2) implique (3), il suffit d'appliquer (2) à la situation où l'on a pris pour $\psi(k,c)$ la formule $R \in J_c$ et pour famille courante la famille générique $K_{R,c}$.

Enfin, (3) implique (2). En effet, si $R_{k,c}$ est une famille J -courante indexée par $\psi(k,c)$ s'envoyant par s dans $\varphi(i)$, on sait par 3.1.8 qu'il y a un (unique) morphisme $t: \psi(k,c) \rightarrow R \in J_c$ tel que $t^* K_{k,c} \cong R_{k,c}$. Etant donné que $\bar{\theta}$ est un isomorphisme au-dessus de $R \in J_c \times \varphi(i)$, si

on le remonte par produit fibre de long du couple (t, s) , on obtient un isomorphisme au-dessus de $\psi(k, c)$. C'est la condition désirée en vertu de la remarque faite en 0.28 sur les produits fibres d'un Hom interne et d'un morphisme de E .

□

Ce théorème donne donc bien une formule du langage interne à E décrivant adéquatement les conditions que doit remplir un préfaisceau pour être un faisceau.

Chapitre 4 :

Le théorème de Giraud.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la catégorie des faisceaux sur un site interne $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ vérifie toute une série de propriétés. La question se pose de savoir quelles sont, parmi ces propriétés, celles qui décrivent adéquatement la structure de topos au-dessus de \mathbb{E} dont est munie cette catégorie de faisceaux. Pour les catégories au-dessus de $\mathbb{E}ms$, la réponse est bien connue: c'est le théorème de Giraud. Ce théorème a été adapté par Diaconescu [9] au-dessus d'un topos quelconque. Le théorème de Diaconescu répond à la question: que doit satisfaire un topos au-dessus de \mathbb{E} pour être un topos de faisceaux sur une catégorie interne à \mathbb{E} . Subsiste cependant encore l'interrogation suivante: que doit satisfaire une catégorie quelconque pour être un topos de faisceaux sur une catégorie interne à \mathbb{E} . C'est à la réponse à cette question que ce chapitre est consacré.

4.1. Définitions.

- 4.1.1 Une catégorie \mathbb{F} est un \mathbb{E} -topos de Grothendieck s'il ya un site interne $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ à \mathbb{E} tel que \mathbb{F} soit équivalente à la catégorie $\text{Fais}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.
- 4.1.2 Une catégorie \mathbb{F} est exprimable au-dessus de \mathbb{E} s'il y a une fibration $\text{Fam}(\mathbb{F})$ sur \mathbb{E} dont la fibre en 1 est équivalente à \mathbb{F} , et qui soit localement petite et à limites à gauche finies. Une catégorie exprimable \mathbb{F} au-dessus de \mathbb{E} est donc munie d'une notion convenable, au sens de 1.4.1 par exemple, de "famille d'objets indexé par un objet de \mathbb{E} ". Nous avons vu au chapitre précédent

(cf. 3.4.1 et 3.4.3) que les catégories de faisceaux $\text{Fais}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}, \mathbb{J})$ sont exprimables au-dessus de \mathbb{E} .

4.2. Proposition.

Si \mathbb{F} est exprimable sur \mathbb{E} et

si la fibration $\text{Fam}(\mathbb{F})$ possède des sommes inférieures universelles, une famille de générateurs indexée par C_0 , des fibres où les relations d'équivalence sont effectives, où les épimorphismes sont des coégalisateurs et où les paires réflexives ont des coégalisateurs universels,

Alors $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est munie d'un plongement pleinement fidèle à valeurs dans la fibration des préfaisceaux définis sur la sous-catégorie pleine engendrée par les générateurs. Ce plongement admet un adjoint à gauche S .

démonstration.

Notons G l'objet des générateurs et $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, m, \text{id})$ la sous-catégorie pleine engendrée par ces générateurs.

4.2.1 Construction du plongement $T: \text{Fam}(\mathbb{F}) \longrightarrow \text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}))$.

Nous utilisons les notations du paragraphe 1.3: Soit X un objet de la fibre en I ; TX doit être une famille de préfaisceaux. On pose $TX = \mathcal{R}_X$; il est facile de voir que \mathcal{R}_X est une opfibration discrète sur la catégorie $\mathcal{C} \times I$ de \mathbb{E}/I et induit donc une famille de préfaisceaux. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de la fibre en I , le morphisme $q^*f: p^*G \rightarrow q^*Y$ donne lieu à un morphisme $Tf: \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y)$ au-dessus de $C_0 \times I$ qui

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\text{wavy}} & p^*G \\
 & \downarrow S & \\
 q^*X & \xrightarrow{\text{wavy}} & X \\
 \downarrow q^*f & & \downarrow f \\
 q^*Y & \xrightarrow{\text{wavy}} & Y \\
 \leftarrow p & \text{Hom}(G, X) & \xrightarrow{q} I
 \end{array}$$

fait de T un foncteur de la fibre en I de $\text{Fam}(\mathbb{F})$ dans la fibre en I de $\text{Fam}(\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\mathcal{C}))$.

Comme de plus le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(G, u^*X) & \longrightarrow & \text{Hom}(G, X) \\ \downarrow & & \downarrow (p, q) \\ C_0 X & \xrightarrow{C_0 u} & C_0 X \end{array}$$

est un produit fibre, nous obtenons un foncteur cartésien T de $\text{Fam}(F)$ dans $\text{Fam}(\text{Préf}_E(\mathcal{C}))$.

Remarquons enfin par 2.4.3 que TG est isomorphe à la famille des préfaisceaux représentables, i.e. que T respecte les familles génératrices.

4.2.2. T est fidèle.

Soient deux morphismes $X \xrightarrow{f} Y$ différents dans la fibre en I de $\text{Fam}(F)$.

$$\begin{array}{ccc} u^*G & \xrightarrow{\quad} & p^*G \\ \downarrow \beta & & \downarrow \delta \\ k^*X & \xrightarrow{\quad} & q^*X \\ \downarrow k^*f & & \downarrow q^*f \\ k^*Y & \xrightarrow{\quad} & q^*Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{m} & \text{Hom}(G, X) \\ \downarrow u & \searrow k & \downarrow q \\ C_0 & & I \\ \uparrow & \swarrow (p, q) & \uparrow \\ C_0 X & & \end{array}$$

Nous allons voir que Tf et Tg sont eux aussi différents.

En utilisant le caractère générateur de G , nous trouvons une flèche $(u, k): K \rightarrow C_0 X$ et un morphisme β de u^*G vers k^*X qui sépare k^*f et k^*g . Ce morphisme β est lui-même classifié par un morphisme $m: K \rightarrow \text{Hom}(G, X)$. Comme $qm = k$, le fait que $k^*f \neq \beta \neq k^*g \circ \beta$ entraîne que $q^*f \circ \delta \neq q^*g \circ \delta$;

ces dernières induisent donc des morphismes Tf et Tg différents.

4.2.3. T est plein.

Soit $\alpha: \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y)$ une transformation naturelle de TX dans TY . Cela implique l'existence dans la fibre en $\text{Hom}(G, X)$ d'un

$$\begin{array}{ccc} \partial_0^* p^*G & \xrightarrow{\quad} & p^*G \\ \downarrow \partial_1^* & & \downarrow \partial_0 \\ \partial_1^* p^*G & \xrightarrow{\quad} & p^*G \end{array}$$

morphisme $\bar{\alpha}: p^*G \rightarrow q^*Y$ rendant commutatif le pentagone ci-contre. Nous avons donc un cône inductif de sommet Y .

$$\text{Hom}(GX)_{C_0} \times \text{Hom}(G, X) \xrightarrow[\partial_1]{\partial_0} \text{Hom}(G, X)$$

Donc par le théorème 1.3.4, il y a une factorisation (unique) f de X vers Y telle que $q^* f \circ \delta = \bar{\alpha}$, ce qui entraîne que $Tf = \alpha$.

4.2.4 Construction de S adjoint à gauche de T .

Nous savons que toute famille de préfaisceaux F_i indexée par I est limite à droite de préfaisceaux représentables : $F_i \approx \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_{F_i}} \Phi_{F_i}$ où Φ_{F_i} est la composée de $\sigma_i: \mathcal{R}_{F_i} \rightarrow \mathcal{C}$ avec Y , le plongement de Yoneda (cf. 2.13.2). Or le plongement de Yoneda Y s'obtient à partir du plongement canonique \mathbb{I} de $\text{Fam}(\mathcal{F})^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ composé avec le foncteur T . En effet, le plongement \mathbb{I} est décrit par le diagramme de gauche ci-dessous; après application du foncteur T , on obtient celui de droite qui

$$\begin{array}{ccc} \delta & \xrightarrow{d_0^*} & G \\ \downarrow d_1^* & \searrow & \downarrow \\ \text{Hom}(G, G) & \xrightarrow[d_1]{d_0} & \mathcal{C}_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T\delta & \xrightarrow{d_0^*} & 1 \\ \downarrow d_1^* & \searrow & \downarrow \\ \text{Hom}(GG) & \xrightarrow[d_1]{d_0} & \mathcal{C}_0 \end{array}$$

qui décrit le plongement de Yoneda. Ceci suggère de poser

$$SF_i = \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_{F_i}} (P \circ \sigma_i).$$

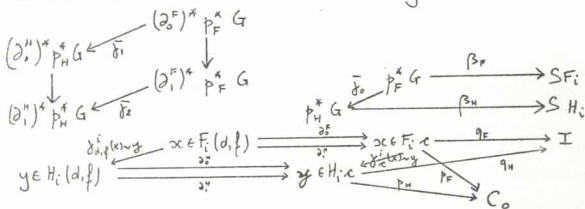
Autrement dit, SF_i est le coégalisateur de d_0 et d_1 dans la situation décrite ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} \partial_0^* p^* G & \xrightarrow{\quad} & \coprod_1 \partial_0^* p^* G \\ \downarrow \partial_1^* & \searrow & \downarrow \partial_1^* \\ \partial_1^* p^* G & \xrightarrow{\quad} & \coprod_1 p^* G \\ \downarrow \alpha \in F_i(d_1 f) & \xrightarrow[\partial_1]{\partial_0} & \downarrow \alpha \in F_i e \\ \mathcal{C}_0 & \xrightarrow[\partial_1]{\partial_0} & \mathcal{C}_0 \end{array}$$

d_0 et d_1 , étant les deux factorisations à travers $\coprod_1 \partial_0^* p^* G$ des deux morphismes de $\partial_0^* p^* G$ dans $\coprod_1 p^* G$.

Pour prolonger S aux transformations naturelles, remarquons que $\gamma: F_i \Rightarrow H_i$ induit une transformation naturelle (cartésienne) de Φ_{F_i} vers Φ_{H_i} par 1.3.6 et 2.13.2, et donc une transformation naturelle

\bar{y} de $P \circ \sigma_{F_i}$ vers $P \circ \sigma_{H_i}$ en vertu du caractère pleinement fidèle de T . Cette situation est résumée dans le diagramme ci-dessous.



Mais alors il est clair que $\beta_H \circ \bar{y}_0$ constitue un cône inductif et donc se factorise à travers β_F qui est le cône inductif universel. Cette factorisation est S_f .

Ainsi défini, S s'organise naturellement en un foncteur.

En outre S est cartésien. En effet, par 1.3.6 nous savons que la catégorie de représentation de $u^* F_i$ avec $u: J \rightarrow I$ n'est autre que $u^* \mathcal{R}_{F_i}$ et comme les limites à droite sont stables par image réciproque que $\lim_{\rightarrow u^* \mathcal{R}_{F_i}} P \circ \sigma_{u^* F_i} \cong u^* (\lim_{\rightarrow \mathcal{R}_{F_i}} P \circ \sigma_{F_i})$, autrement dit

$$u^* S F_i \cong S u^* F_i.$$

Enfin S est adjoint à gauche de T . En effet, il y a bijection entre les morphismes de $S F_i$ vers X et les cônes de base $P \circ \sigma_{F_i}$ et de sommets X par définition de $S F_i$. Ces derniers sont en bijection, vu le caractère pleinement fidèle de T , avec les cônes de base $Y \circ \sigma_{F_i}$ et de sommet $T X$ dans $\text{Fam}(\text{Pref}_{\mathbb{E}}(\underline{C}))$ et donc avec les morphismes de F_i vers $T X$ puisque F_i est $\lim_{\rightarrow \mathcal{R}_{F_i}} \Phi_{F_i}$. Ceci achève la démonstration. \square

Rappelons que si \mathbb{F} est une catégorie exacte au sens de Barr et \mathbb{D} une catégorie interne à \mathbb{F} , on peut définir pour tout diagramme interne (X, ξ) un foncteur $\otimes_X: \mathbb{F}^{\mathbb{D} \circ \mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{F}$ en associant au préfaisceau (F, α) l'objet $F \otimes_X$ coégalisateur des deux morphismes d'et ξ' de $d_0^* X \times d_1^* F$ vers $X \times F$ obtenus par factorisation dans le diagramme suivant où $d_0^* X$ et $d_1^* F$ sont les produits fibrés respectifs de X et F par d_0 et d_1 .

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_{D_0} F & \xleftarrow{\alpha'} & d_0^* X \times_{D_1} d_1^* F & \xrightarrow{\beta'} & X \times_{D_0} F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xleftarrow{\alpha} & d_1^* F & \xrightarrow{\beta} & F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D_0 & \xrightarrow{d_0} & D_1 & \xrightarrow{d_1} & D_0
 \end{array}$$

En faisant remarquer que $d_0^* X \times_{D_1} d_1^* F$ est le produit fibré de $X \times_{D_0} F$ par β' , Diacorescu [9] montre que $F \otimes_{\mathbb{D}} X \simeq \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_X^{\text{op}}} (X \times_{D_0} F, \alpha') \simeq \lim_{\rightarrow \mathcal{R}_X^{\text{op}}} (p^* p)^*(F, \alpha)$

si $p: \mathcal{R}_F \rightarrow \mathbb{D}$ est le foncteur canonique. En conséquence, $- \otimes_{\mathbb{D}} X$ est exact à gauche si $\mathcal{R}_X^{\text{op}}$ est filtrante ou encore si \mathcal{R}_X est cofiltrante. En particulier, $- \otimes_{\mathbb{D}} X$ respectera les produits fibrés si la catégorie de représentation de X est faiblement cofiltrante.

Nous allons utiliser ce résultat pour démontrer que S est exact à gauche sous de bonnes hypothèses.

Tout d'abord, si la catégorie \mathbb{F} est exprimable par une fibration géométrique, on peut caractériser S grâce au

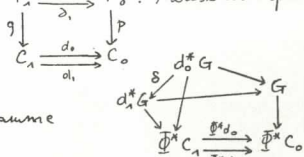
4.3. Lemme.

Si \mathbb{F} est exprimable au-dessus de \mathbb{E} et si la fibration $\text{Fam}(\mathbb{F})$ possède des sommes infinies disjointes et universelles, une famille de générateurs G indexé par C_0 , des fibres où les relations d'équivalence sont effectives, où les épimorphismes sont des cogénérateurs et où les paires réflexives ont des cogénérateurs,

Alors $S\mathbb{F} = \Phi^* F \otimes_{\mathbb{F}^{\text{op}}} \mathbb{D}$ si F est dans la fibre en 1, P est le plongement de la sous-catégorie pleine \mathbb{C} engendrée par les générateurs et Φ est le morphisme géométrique dont l'existence est garantie par 1.1.4.

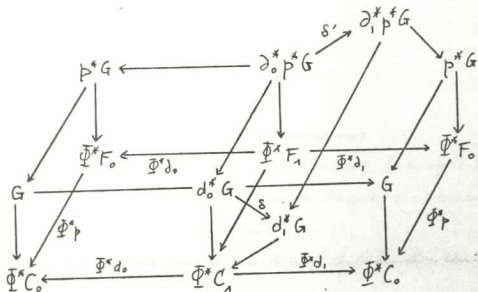
démonstration.

Soit F le préfaisceau décrit par $F_1 \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{matrix} F_0$. Nous savons que



P est quant à lui décrit par le diagramme dans la catégorie \mathbb{F} .

Comme Φ^* est exact à gauche, $\Phi^* F$ devient un préfaisceau interne à \mathbb{F} au-dessus de $\Phi^* \underline{C}$. En vertu de la structure géométrique de $\text{Fam}(\mathbb{F})$, il est clair que $\Phi^* F_0 \times G \simeq p^* G$ et $\Phi^* F_1 \times d_0^* G \simeq d_0^* p^* G$.



comme le manifeste le diagramme ci-dessus. Quant aux deux morphismes de $d_0^* p^* G$ vers $p^* G$, il s'agit bien des morphismes dont le cocycle est SF par construction.

□

En localisant, on montre sous les mêmes hypothèses que $SF_i \simeq \Phi^* F_i \otimes_{\Phi^* \underline{C}, \Phi^* \underline{I}} P \circ U$ où $U: \Phi^* \underline{C} \times \Phi^* \underline{I} \rightarrow \Phi^* \underline{C}$ est le foncteur de projection.

Nous avons maintenant rassemblé le matériel nécessaire pour démontrer le théorème de Giraud.

4.4. Théorème de Giraud.

Soient \mathbb{E} un topos et \mathbb{F} une catégorie quelconque.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) \mathbb{F} est un \mathbb{E} -topos de Grothendieck

(ii) la catégorie \mathbb{F} est exprimable au-dessus de \mathbb{E} et la fibration $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est exacte au sens de Barr et possède des sommes infinies disjointes et universelles, une famille génératrice G indexée par C_0 et des coégalisateurs universels de paires réflexives.

démonstration.

Dans un sens, l'implication est claire par 3.4.6.

Dans l'autre sens, il reste à montrer que le couple (S, T) de la proposition 4.2 définit un morphisme géométrique; autrement dit que S respecte les limites à gauche finies.

En utilisant le caractère pleinement fidèle et exact à gauche de T , on voit facilement que $S_1 \cong ST_1 \cong 1$.

Reste à voir que S respecte les produits fibrés. Par la théorème 1.5.3.(b), nous pouvons supposer que la famille génératrice G est cofiltrante. De plus, par le théorème 1.1.4, $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est géométrique. Appelons Φ le foncteur géométrique qui lui est associé.

Comme Φ^* est exact à gauche et à droite, $\Phi^* \mathcal{C}^{\text{op}}$ est filtrante, et donc la opfibration discrète \mathbb{P} associée au plongement \mathbb{E} de $\Phi^* \mathcal{C}^{\text{op}}$ dans \mathbb{F} est faiblement cofiltrante (voir [12], 2.56). En conséquence, le foncteur $-\otimes_{\Phi^* \mathcal{C}^{\text{op}}} \mathbb{P}$ respecte les produits fibrés.

Mais, par 4.3, S_2 est la composée $\mathbb{E} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\text{op}} \Phi^*} \mathbb{F} \xrightarrow{\Phi^* \mathcal{C}^{\text{op}} - \otimes_{\Phi^* \mathcal{C}^{\text{op}}} \mathbb{P}} \mathbb{F}$ où Φ^* défini par $\Phi^* F = (\Phi^* F_0, \Phi^* F_1, \Phi^* \partial_0, \Phi^* \partial_1)$ est exact à gauche. Puisque S_2 est la composée de foncteurs respectant les produits fibrés, il les respecte

également. On procède de même en chaque fibre.

Ainsi \mathbb{F} est une sous-catégorie exacte réflexive de $\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\underline{\mathcal{C}})$, il y a donc une topologie de Lawvere-Tierney sur $\text{Préf}_{\mathbb{E}}(\underline{\mathcal{C}})$ et donc par 3.2.5 une topologie de Grothendieck \mathbb{J} sur $\underline{\mathcal{C}}$ telle que

$$\mathbb{F} \approx \text{Fais}_{\mathbb{E}}(\underline{\mathcal{C}}, \mathbb{J})$$

□

4.5. Corollaires.

4.5.1 Le topos \mathbb{F} est borné sur \mathbb{E} ssi c'est un \mathbb{E} -topos de Grothendieck.

4.5.2 Si \mathbb{F} vérifie les hypothèses de 4.4,

Alors $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est well-powered.

démonstration.

1. \mathbb{F} est borné sur \mathbb{E} si la fibration géométrique qui lui est associée possède une famille génératrice par 1.2.5.

Comme de plus, cette fibration possède toujours les autres propriétés demandées en hypothèse dans le théorème de Giraud, on obtient le résultat annoncé.

2. Par le théorème de Giraud, chaque fibre de $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est un topos et de plus par 1.1.4, $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est géométrique. D'où $\text{Fam}(\mathbb{F})$ est well-powered par 1.1.2.

□

Bibliographie .

- [1] Barr M., "Exact categories" L.N. in Math. 236, Springer, 1971.
- [2] Bénabou J., "Catégories et logiques faibles" in Tagungsbericht 30, 1973, Oberwolfach.
- [3] Bénabou J., "The logic of categories - application to classifying toposes" in Tagungsbericht 33, 1975, Oberwolfach.
- [4] Bénabou J., "Théories relatives à un corpus" C.R. Acad. Sc. Paris Série A, t. 281 (17 nov. 1975)
- [5] Bénabou J., "Fibrations petites et localement petites", C.R. Acad. Sc. Paris, Série A., t. 281, (24 nov. 1975).
- [6] Bénabou J., "Cours sur les catégories fibrées" Louvain-la-Neuve 1980, à paraître.
- [7] Coste M., "Logique du 1^{er} ordre dans les topos élémentaires" Sem. de théorie des catégories dirigé par J. Bénabou, 1973-74.
- [8] Coste M., "Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires" Sem. de théorie des catégories dirigé par J. Bénabou nov. 1974.
- [9] Diaconescu R., "Change of base for toposes with generators" J. Pure and Applied Algebra 6 (1975)
- [10] Fourman M.P., "The logic of topoi", Handbook in Logic (Ed. J. Barwise) North-Holland, 1977.
- [11] Grothendieck A. et Verdier J.L., "Théorie des topos" (SGA 4) L.N. in Math 269, Springer, 1972.
- [12] Johnstone P.T., "Topos theory" Academic Press 1977.
- [13] Lavendhomme R., "Cours sur les topos" Louvain-la-Neuve 1978.
- [14] Makkai M. and Reyes G., "First order categorical logic" L.N. in Math 611, Springer, 1977.
- [15] Reyes G., "From sheaves to logic" in M.A.A. Studies in

- mathematics, vol. 9, Ed. A. Daigneault.
- [16] Volger H., "Logical categories, semantical categories and topoi",
in L.N. in Math 445, Springer, 1975.
- [17] Zucker J., "The correspondance between cut-elimination and
normalisation", *Annals of Math. Logic*, 1974.