UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES

CARACTERISATION DES TOPOS DE FAISCEAUX SUR UN SITE INTERNE A UN TOPOS

Dissertation doctorale
présentée par
Jean-Luc MOENS

Louvain-la-Neuve 1982

Introduction.

La théorie des topos est au confluent de deux courants de pensée mathématique, celle de l'école de A. Grothendieck orientée vers des problèmes de topologie et géométrie algébriques et celle de F. Lawvere préoccupé de trouver un fondement pour les mathématiques.

A la suite de Grothendieck [11], les topos sont considérés comme des structures généralisant les espaces topologiques - d'où leur nom de "topos" - et les morphismes géométriques entre eux constituent une généralisation des applications continues. Mais, dans ce cadre, c'est moins l'espace que les faisceaux définis sur cet espace et à valeurs dans la catégorie Ens des ensembles qu'on étudie. Il apparaît donc immédiatement que la catégorie Ens est privilégiée. Un important résultat, connu sous le nom de théorème de Giraud, donne des conditions d'exactitude nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie quelconque soit un topos, à savoir l'existence de limites à gauche finies, de sommes disjointes et universelles indexées par les ensembles et d'un ensemble de générateurs ainsi que le caractère localement petit et exact au sens de Barr [1].

Par ailleurs, dans sa recherche d'axiomatisation de la catégorie des ensembles, F.W. Lawvere aboutit à la notion de topos élémentaire, légèrement plus large que celle de Grothendieck. Sa démarche amène à penser les topos comme des généralisations de la catégorie des ensembles et ouvre la porte à la logique. Nombreux sont ceux qui s'engagent dans cette voie. Outre Lawvere lui-même, citons parmi d'autres les travaux de J. Benabou [2,3], M. Coste [7,8], H. Volger [16], G. Reyes [14,15], M. Fourman [10] qui font apparaître les topos comme des modèles de théories d'ordre supérieur construites dans certains langages multisortes. En particulier, on peut associer à toute théorie $\mathcal{T}$ d'ordre supérieur un topos modèle canonique $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ tel que, pour tout topos $\mathbb{E}$, il y ait une bijection entre l'ensemble des morphismes logiques de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ dans $\mathbb{E}$ et les modèles de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{E}$. De plus, à tout topos élémentaire $\mathbb{E}$, on associe un langage d'ordre supérieur $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ et une théorie $T(\mathbb{E})$ de manière telle que le modèle canonique de $T(\mathbb{E})$ soit $\mathbb{E}$ lui-même. Le langage $\mathcal{L}(\mathbb{E})$, dû à J. Bénabou et Mitchell, est appelé le langage interne à $\mathbb{E}$. Ces faits se trouvent brièvement rappelés dans le paragraphe 1 du chapitre 0.

Dès le début, Lawvere et Tierney ont introduit les définitions de topologie et faisceau dans le cadre élargi des topos élémentaires. Les progrès - en grande partie dûs à J. Bénabou - faits par la théorie des catégories internes ont permis rapidement de réitérer les constructions faites par Grothendieck mais cette fois-ci dans un topos élémentaire quelconque. Le rôle de $\mathbb{E}$ns dans les topos de faisceaux sur une catégorie interne était ainsi déprivilégié.

A ce stade du développement de la théorie, une question se pose : est-il possible de trouver une version interne du théorème de Giraud ? Plusieurs obstacles rendent la réponse à cette question mal aisée. Tout d'abord, on voit mal comment traduire de manière interne des conditions qu'utilise Giraud telles que le caractère localement petit. Ensuite la démonstration habituelle [11] fait usage de la technique des univers qui ne s'étend pas au cadre des topos élémentaires. Enfin Grothendieck disposait d'un langage maniable fondé sur celui des ensembles et permettant de parler de préfaisceau, transformation naturelle, topologie et faisceau. Rien de tel n'est possible ici. Certes, il y a bien le langage interne aux topos de préfaisceaux et de faisceaux mais les liens avec le langage interne du topos de base sont difficiles à dégager. En effet, les langages internes souffrent d'une grave infirmité : ils mènent naturellement à la notion de morphisme logique entre topos mais ne peuvent rendre compte des morphismes géométriques. Aussi le foncteur géométrique canonique - induit par le foncteur "section" - entre un topos de faisceaux et son topos de base ne semble pas, à première vue, pouvoir se décrire par le langage interne. Cette difficulté, signalée par P.T. Johnstone dans son livre "Topos Theory" [12], l'a poussé à n'introduire les langages internes qu'après le chapitre consacré aux morphismes géométriques.

En 1973, R. Diaconescu présente une version interne du théorème de Giraud. Sa solution repose sur les observations suivantes: d'une part, un topos de faisceaux sur un site interne à un topos $\mathbb{E}$ est toujours muni d'un morphisme géométrique vers $\mathbb{E}$ et d'autre part le théorème de Giraud peut se réduire à l'énoncé suivant: un topos $\mathbb{F}$ est un topos de Grothendieck sur Ens ssi il y a un morphisme géométrique de $\mathbb{F}$ dans Ens et $\mathbb{F}$ a un ensemble de générateurs. La version internalisée de la seconde partie de cet énoncé, fourni par la notion de morphisme géométrique borné, ouvre la porte à la généralisation attendue: un morphisme géométrique $f : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ entre deux topos est borné ssi il y a un site interne à $\mathbb{E}$ tel que $\mathbb{F}$ soit équivalente à la catégorie des faisceaux sur ce site (théorème de Diaconescu [9]). Cet important résultat utilise donc d'une manière prépondérante le fait que $\mathbb{F}$ soit un topos relié à $\mathbb{E}$ par un morphisme géométrique. Il ne permet pas encore de caractériser les propriétés que doit satisfaire une catégorie quelconque pour être un topos de faisceaux sur un site interne à un topos. Pour obtenir une telle caractérisation, on ne peut faire l'économie d'une internalisation de chacune des conditions intervenant dans le théorème de Giraud. Ce n'est qu'à ce prix qu'il sera possible d'éliminer l'hypothèse de l'existence d'un morphisme géométrique.

La solution de ces problèmes devaient jaillir des travaux de J. Bénabou sur les catégories fibrées [4, 5, 6]. Par son développement de la théorie des fibrations, J. Bénabou continue le mouvement déjà amorcé par l'étude des topos élémentaires, à savoir l'extension de techniques ensemblistes à des situations non ensemblistes. Dans ce cadre, un rôle central est joué par la notion de famille; l'exemple fondamental est celui de la fibration Ens($\mathcal{X}$) des familles indexées par les ensembles d'objets de la catégorie $\mathcal{X}$. C'est ainsi qu'on se permettra de penser les objets au-dessus d'un certain I de $\mathbb{E}$ dans une fibration sur $\mathbb{E}$ comme des familles - généralisées - indexées par I d'objets de la fibre en 1. Cette manière d'aborder les choses s'est révélée extrêmement fructueuse. Non seulement d'importants théorèmes initialement liés à un contexte ensembliste ont trouvé un cadre adéquat - citons, par exemple, les théorèmes d'adjonction de Freyd - mais aussi des problèmes non résolus ont trouvé une solution. Parmi eux, il faut souligner le résultat de J. Bénabou selon lequel la catégorie $\mathbb{E}_{fin}$ des objets finis dans un topos $\mathbb{E}$ avec objet des entiers naturels est elle-même un topos interne. La définition de topos interne fait hautement appel à des concepts introduits dans la théorie des catégories fibrées. Un certain nombre de ces définitions se trouvent rappelées dans le paragraphe 2 du chapitre 0 : parmi elles, les notions de sommes disjointes et universelles, de locale petitesse et de famille génératrice permettent d'aborder le problème du théorème de Giraud sous un jour nouveau. C'est ce qui est fait dans le présent travail.

Comme nous l'avons signalé plus haut, il apparaît nécessaire d'éliminer la supposition de l'existence d'un morphisme géométrique des hypothèses du théorème de Giraud relatif que nous avons en vue. Ceci implique une étude attentive de ces morphismes. Or J. Bénabou a associé à tout morphisme géométrique $f: \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ entre deux catégories à limites à gauche finies une catégorie fibrée $\mathbb{F}/f$ sur $\mathbb{E}$ dont la fibre en I est $\mathbb{F}/f^*I$. Par ailleurs, le morphisme géométrique (unique à isomorphisme près) d'un topos de Grothendieck $\mathbb{F}$ défini au-dessus des ensembles vers $\mathbb{E}ns$ a pour image directe le foncteur "section" qui associe à un objet X de $\mathbb{F}$ l'ensemble des morphismes de 1 vers X dans $\mathbb{F}$. Quant à son image réciproque, elle associe à un ensemble I la somme dans $\mathbb{F}$ de la famille constante 1 indexée par I. Ces constructions peuvent être menées à bien dans une fibration quelconque pourvu qu'elle ait des sommes et soit localement petite. Ceci nous conduit au théorème suivant : si C est une fibration sur $\mathbb{E}$ dont $\mathbb{F}$ est la fibre en 1, et si $\underline{C}$ possède des limites à gauche finies et des sommes disjointes universelles et est localement petite, alors il y a un morphisme géométrique $f: \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ tel que C soit équivalente à la catégorie fibrée $\mathbb{F}/f$. Ce résultat dissocie en quelque sorte les notions de morphisme géométrique et de topos : l'existence d'un morphisme géométrique de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$ n'est pas lié au fait que $\mathbb{F}$ soit un topos mais au fait que $\mathbb{F}$ soit convenablement défini au-dessus de $\mathbb{E}$. Un corollaire immédiat de ce résultat est que les conditions d'exactitude du théorème de Giraud assurent - dès le début - l'existence d'un morphisme géométrique.

Un autre problème est resté en suspend: y a-t-il moyen d'utiliser le langage interne à un topos $\mathbb{E}$ pour définir un topos de faisceaux sur un site interne à $\mathbb{E}$ et ce d'une manière semblable à celle utilisée dans le cas des topos définis au-dessus de $\mathbb{E}$ns. En fait, nous avons défini une extension du langage de $\mathbb{E}$ qui permet de parler de préfaisceau, transformation naturelle et faisceau et même de familles de tels objets. De même que le langage $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ avait rendu possible la transplantation des techniques de construction ensemblistes dans le topos élémentaire $\mathbb{E}$, son extension permet d'adapter les procédés valables pour les préfaisceaux et faisceaux ensemblistes à leurs homologues internes. En particulier, le lemme de Yoneda et la structure de topos de ces catégories trouvent ainsi une démonstration totalement parallèle à celle bien connue dans les ensembles. En outre, ce langage apparaît comme particulièrement adapté pour décrire les fibrations des familles de préfaisceaux et de faisceaux ainsi que leurs propriétés. Il fournit ainsi un joli exemple de langage associé à une catégorie fibrée et illustre ainsi l'espoir de J. Bénabou de construire un langage interne à une fibration.

Il est facile de voir que la fibration des familles de faisceaux sur un site interne à un topos $\mathbb{E}$ vérifie les conditions d'exactitude du théorème de Giraud, internalisées à une catégorie fibrée. Ceci conduit à penser qu'une catégorie quelconque est un topos de Grothendieck au-dessus de $\mathbb{E}$ ssi cette catégorie est la fibre en 1 d'une fibration vérifiant les conditions d'exactitude de Giraud. Ce résultat devient la version interne - indépendante de l'existence d'un morphisme géométrique - du théorème de Giraud, constitue un premier pas vers un résultat plus général - conjecturé par J. Bénabou - pour la théorie des catégories fibrées et est l'aboutissement du présent travail.

Les rappels nécessaires à la compréhension des notions introduites et à la fixation des notations ont été regroupés dans un chapitre zéro, comme cela a été signalé plus haut.

Le chapitre 1 comporte cinq paragraphes. Le premier d'entre eux s'intéresse aux fibrations géométriques, c'est-à-dire à celles qui sont équivalentes à $\mathbb{F}/f$ pour un certain morphisme géométrique $f : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$. Outre des lemmes techniques, on y démontre le théorème affirmant que toute fibration à limites à gauche finies, à sommes disjointes et universelles et localement petite est géométrique. Ce résultat sera la clef de la généralisation du théorème de Giraud que nous avons en vue. Le deuxième paragraphe est consacré à la démonstration du théorème de J. Bénabou selon lequel une fibration géométrique possède une famille génératrice ssi le morphisme géométrique qui lui est associé est borné. Le troisième paragraphe étudie les familles de générateurs et fournit des conditions qui permettent d'exprimer un objet quelconque d'une fibration comme limite à droite de générateurs. Le quatrième paragraphe met à profit un certain nombre de résultats de J. Bénabou pour arriver à déduire des sommes finies (externes) des sommes infinies (internes) dans une catégorie fibrée. En particulier, il s'ensuit qu'une fibration satisfaisant les conditions d'exactitude de Giraud a toujours des sommes finies. Enfin le dernier paragraphe de ce chapitre explore les propriétés des limites à droite filtrantes dans le cadre des fibrations.

Dans le chapitre 2, on peut distinguer en gros trois parties. La première rappelle quelques conventions d'écriture pour la composition dans une catégorie interne $\underline{C}$ à un topos $\mathbb{E}$ et définit les familles de préfaisceaux sur $\underline{C}$ indexées par une formule et les familles de transformations naturelles. On y voit également que ces nouvelles notions correspondent bien à leurs homologues, obtenues par la théorie des catégories internes. Dans la deuxième partie sont fixées les notations et abus qui donnent lieu au langage pour préfaisceaux. Ce langage est utilisé pour démontrer le lemme de Yoneda et mettre en évidence la structure de topos de la catégorie des préfaisceaux. Quant à la troisième partie, elle dégage les principales propriétés de la fibration des familles de préfaisceaux parmi lesquelles on retrouve évidemment les conditions d'exactitude de Giraud.

Le chapitre 3 commence par la définition de topologie de Grothendieck. On montre ensuite le résultat classique de coïncidence des deux notions de topologies de Grothendieck et de Lawvere-Tierney. Après avoir introduit les familles de faisceaux sur un site interne, on constate qu'elles forment encore une fibration vérifiant les conditions d'exactitude de Giraud. La fin du chapitre est consacrée à la mise au point d'une définition interne de faisceau grâce à l'extension du langage interne.

Le chapitre 4 est celui où est démontré le théorème central de ce travail : une catégorie $\mathbb{F}$ est un topos de faisceaux sur un site interne à un topos $\mathbb{E}$ ssi elle apparaît comme la fibre en 1 d'une fibration vérifiant les conditions d'exactitude de Giraud. Dans la démonstration de ce résultat, le théorème de caractérisation des fibrations géométriques du chapitre 1 joue un rôle prépondérant.

Pour terminer cette introduction, il est bon de considérer les perspectives de recherches ouvertes par ce travail. Tout d'abord, bien que le sujet abordé fasse pleinement partie de la théorie des topos élémentaires, les techniques utilisées pour l'étudier sont d'avantage empruntées à la théorie des catégories fibrées telle que J. Bénabou la développe. Ceci est motivé par une conviction profonde : la théorie des fibrations englobe et dépasse largement celle des topos élémentaires ; elle fournit de plus une manière meilleure et plus globale d'analyser les problèmes dans les topos. A titre d'exemple - simple - citons la fibration $E : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$ donnée par le foncteur "but". La fibre en I de $\mathbb{E}$ est $\mathbb{E}/I$. Voici donc une présentation de $\mathbb{E}$ qui regroupe avec $\mathbb{E}$ lui-même tous ses localisés. Ceci semble être une bonne façon de penser $\mathbb{E}$. En effet, on constate sans difficulté que la catégorie fibrée E vérifie toutes les hypothèses du théorème de Giraud relatif. Une analyse attentive (cfr [6]) montre que, dans beaucoup de cas, il n'est pas besoin que la catégorie de base $\mathbb{E}$ sur laquelle on travaille soit un topos. C'est un des mérites des catégories fibrées de le souligner. Aussi certains problèmes gardent-ils un sens dans un cadre plus large que celui de la théorie des topos. C'est le cas pour les deux questions étudiées dans ce travail : le théorème de Giraud et le langage pour préfaisceaux. Tous deux ont été conjecturés par J. Bénabou : ainsi le langage pour préfaisceaux n'est qu'un cas particulier de langage interne associé à une fibration. Peut-être certaines des techniques introduites ici aideront-elles à résoudre ces problèmes dans ce contexte plus large.

Au seuil de ce travail, je désire exprimer toute ma gratitude à monsieur le Professeur R. Lavendhomme qui a dirigé cette recherche, l'a suivie avec patience et n'a ménagé ni ses peines, ni son temps, ni ses conseils pour en permettre l'achèvement.

Mes remerciements s'adressent aussi aux participants du séminaire d'Algèbre Catégorique et en particulier à F. Borceux, Th. Lucas, J-R. Roisin et G. Van den Bossche, avec qui j'ai pu avoir de nombreuses et fructueuses discussions qui m'ont aidé à clarifier certains points de ce travail.

Enfin ma dette envers monsieur le Professeur J. Bénabou est évidente; qu'il me permette de dire ici le plaisir d'avoir pu bénéficier de son enseignement.

Table des matières :

Chapitre 0 : Rappels.

Le but de ce chapitre est de rappeler certaines notions relatives aux topos élémentaires et aux fibrations que nous utiliserons par la suite et de fixer ainsi les notations. C'est pourquoi les propriétés énoncées le seront sans démonstration.

0.1. Théories d'ordre supérieur et topos élémentaires.

On peut trouver des développements des faits évoqués dans ce paragraphe dans les textes de Coste [8], de Lavendhomme [13] ainsi que de Fourman [10]. Cependant notre approche de ces problèmes se référera d'avantage aux deux premiers auteurs.

0.11 Les langages d'ordre supérieur.

Un langage d'ordre supérieur $\mathcal{L}$ est déterminé par la donnée des éléments suivants :

a. une collection de sortes permettant par induction de construire la collection des types sachant que toute sorte est un type, et si $(i_1, \dots, i_n)$ est une suite de types, alors $\Omega^{i_1 \dots i_n}$ est également un type. La suite vide de type sera notée 0 et on écrira Ω au lieu de Ω^0.

b. pour toute suite de types $(i_1, \dots, i_n, j)$, un ensemble $Op(i_1 \dots i_n, j)$ de symboles opérationnels.

c. pour toute suite de types $(i_1, \dots, i_n)$, un ensemble $Rel(i_1 \dots i_n)$ de symboles relationnels. On supposera en outre avoir à notre disposition certains symboles relationnels distingués, à savoir

1. deux symboles $\top$ et $\perp$ de $Rel(0)$
2. un symbole $\asymp_i$ dans $Rel(i,i)$ pour chaque type i et
3. un symbole $\in_{i_1 \dots i_n}$ dans $Rel(i_1 \dots i_n \, \Omega^{i_1 \dots i_n})$ pour toute suite de types $(i_1, \dots, i_n)$.

On omettra généralement les indices relatifs aux deux derniers symboles si cela n'introduit pas de confusion.

d. Pour tout type i différent de 0, un ensemble $V(i) = \mathbb{N} \times \{i\}$ de variables de type i qui seront notées $x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$

e. Enfin la collection des symboles logiques $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, \{ | \}$.

0.12 Les expressions bien formées d'un langage d'ordre supérieur.

Nous allons définir par induction les expressions bien formées de $\mathcal{L}$ et en même temps signaler si ce sont des termes ou des formules, donner pour chaque terme t son type $\tau(t)$ et pour chaque expression E la suite finie $\sigma(E)$ de ses variables libres. Nous supposerons que la suite $\sigma(E)$ reprend les variables libres de E avec l'ordre naturel d'apparition des variables dans l'expression.

Chaque variable de $V(i)$ est un terme de type i dont la suite des variables libres se réduit à elle-même.

Si $t_1 \dots t_n$ sont des termes, f un symbole de $Op(\tau(t_1), \dots, \tau(t_n), j)$ et R un symbole de $Rel(\tau(t_1), \dots, \tau(t_n))$, $f(t_1 \dots t_n)$ est un terme de type j et $R(t_1 \dots t_n)$ est une formule. Ces deux expressions ont pour suite de variables libres $\sigma(t_1) \cup \dots \cup \sigma(t_n)$.

Si φ et ψ sont des formules, il en est de même de $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg\varphi$, $\exists x \varphi$ et $\forall x \varphi$. Les trois premières ont $\sigma(\varphi) \cup \sigma(\psi)$ comme suite de variables libres et les deux dernières $\sigma(\varphi) \setminus \{x\}$. Quant à $\neg\varphi$ elle a évidemment la même suite de variables libres que φ.

Notons aussi que $\top$ et $\perp$ sont des formules sans variable libre. De plus on écrira $t \asymp s$ et $t \in u$ au lieu de $\asymp(t,s)$ et $\in(t,u)$.

Enfin si φ est une formule et si $(x_1 \dots x_n)$ est une suite de variables distinctes (n pouvant être nul), alors $\{x_1 \dots x_n \mid \varphi\}$ est un terme

1. deux symboles $\top$ et $\perp$ de $Rel(0)$
2. un symbole $\asymp_i$ dans $Rel(i,i)$ pour chaque type i et
3. un symbole $\in_{i_1 \dots i_n}$ dans $Rel(i_1 \dots i_n\, \Omega^{i_1 \dots i_n})$ pour toute suite de types $(i_1, \dots, i_n)$.

On omettra généralement les indices relatifs aux deux derniers symboles si cela n'introduit pas de confusion.

d. Pour tout type i différent de 0, un ensemble $V(i) = \mathbb{N} \times \{i\}$ de variables de type i qui seront notées $x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$

e. Enfin la collection des symboles logiques $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, \{\,|\,\}$.

0.12 Les expressions bien formées d'un langage d'ordre supérieur.

Nous allons définir par induction les expressions bien formées de $\mathcal{L}$ et en même temps signaler si ce sont des termes ou des formules, donner pour chaque terme t son type $\tau(t)$ et pour chaque expression E la suite finie $\sigma(E)$ de ses variables libres. Nous supposerons que la suite $\sigma(E)$ reprend les variables libres de E avec l'ordre naturel d'apparition des variables dans l'expression.

Chaque variable de $V(i)$ est un terme de type i dont la suite des variables libres se réduit à elle-même.

Si $t_1 \dots t_n$ sont des termes, f un symbole de $Op(\tau(t_1), \dots, \tau(t_n), j)$ et R un symbole de $Rel(\tau(t_1), \dots, \tau(t_n))$, $f(t_1 \dots t_n)$ est un terme de type j et $R(t_1 \dots t_n)$ est une formule. Ces deux expressions ont pour suite de variables libres $\sigma(t_1) \cup \dots \cup \sigma(t_n)$.

Si φ et ψ sont des formules, il en est de même de $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg \varphi$, $\exists x \varphi$ et $\forall x \varphi$. Les trois premières ont $\sigma(\varphi) \cup \sigma(\psi)$ comme suite de variables libres et les deux dernières $\sigma(\varphi) \setminus \{x\}$. Quant à $\neg\varphi$ elle a évidemment la même suite de variables libres que φ.

Notons aussi que $\top$ et $\perp$ sont des formules sans variable libre. De plus on écrira $t \asymp s$ et $t \in u$ au lieu de $\asymp(t,s)$ et $\in(t,u)$.

Enfin si φ est une formule et si $(x_1 \dots x_n)$ est une suite de variables distinctes (n pouvant être nul), alors $\{x_1 \dots x_n \,|\, \varphi\}$ est un terme de type $\Omega^{\tau(x_1)\dots\tau(x_m)}$ et dont la suite de variables libres est $\sigma(\varphi)\setminus\{x_1,\dots x_m\}$.

0.13 Interprétation d'un langage d'ordre supérieur dans un topos.

Une interprétation d'un langage d'ordre supérieur $\mathcal{L}$ dans un topos élémentaire $\mathbb{E}$ consiste en la donnée d'une application I

- qui associe à chaque sorte de $\mathcal{L}$ un objet de $\mathbb{E}$ et qui s'étend aux types en posant $I(\Omega^{i_1\dots i_m}) = \Omega_{\mathbb{E}}^{Ii_1\times\dots\times Ii_m}$. En particulier $I(\Omega)$ est $\Omega_{\mathbb{E}}$, l'objet classifiant les monomorphismes dans $\mathbb{E}$.
- qui associe à chaque symbole f de $Op(i_1\dots i_m, j)$ un morphisme $If : Ii_1\times\dots\times Ii_m \longrightarrow Ij$ dans $\mathbb{E}$ et
- qui associe à chaque symbole R de $Rel(i_1\dots i_m)$ un morphisme $IR : Ii_1\times\dots\times Ii_m \longrightarrow \Omega_{\mathbb{E}}$ dans $\mathbb{E}$.

Il est aisé de voir qu'une telle interprétation s'étend naturellement à toutes les expressions bien formées du langage $\mathcal{L}$. Ainsi, par exemple, une formule donne lieu par interprétation à un morphisme de but $\Omega_{\mathbb{E}}$; souvent nous considérerons plutôt le sous-objet classifié par ce morphisme.

Si $\vec{x} = (x_1,\dots x_n)$ est une suite de variables, on pose $I\vec{x} = I\tau x_1\times\dots\times I\tau x_n$. On peut ainsi définir $I_{\vec{x}}\varphi$ pour une suite $\vec{x}$ de variables contenant la suite $\sigma(\varphi)$ des variables libres de φ comme le morphisme composé de $I\varphi$ et de la projection de $I\vec{x}$ dans $I\sigma(\varphi)$ induite par l'inclusion de $\sigma(\varphi)$ dans $\vec{x}$.

0.14 Le langage d'ordre supérieur d'un topos élémentaire $\mathbb{E}$.

On associe à tout topos $\mathbb{E}$ un langage $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ dont les sortes sont simplement les objets de $\mathbb{E}$. Les morphismes et les sous-objets fournissent quant à eux les symboles opérationnels et relationnels. Ce langage s'interprète donc naturellement dans $\mathbb{E}$ lui-même. Cette interprétation est notée $|-|$.

0.15 Théorie d'ordre supérieur.

Une *théorie d'ordre supérieur* $\mathcal{T}$ est un couple $(\mathcal{L}, \mathbb{A})$ où $\mathcal{L}$ est un langage d'ordre supérieur et $\mathbb{A}$ une collection de formules de $\mathcal{L}$ qu'on appelle axiomes.

On désigne par $Th(\mathcal{T})$ l'ensemble des théorèmes de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire le plus petit ensemble contenant $\mathbb{A}$ et fermé pour les règles de déduction suivantes.

(Les conventions d'écriture sont empruntées à Zucker [17]).

$$(\nu)\quad \frac{\varphi}{\nu} \qquad\qquad (Int)\quad \frac{\perp}{\varphi}$$

$$(\wedge E_1)\quad \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi} \qquad (\wedge E_2)\quad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi} \qquad (\wedge I)\quad \frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\wedge\psi}$$

$$(\vee E)\quad \frac{\varphi\vee\psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \Pi_1\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \Pi_2\\ \chi\end{array}}{\chi} \qquad (\vee I_1)\quad \frac{\varphi}{\varphi\vee\psi} \qquad (\vee I_2)\quad \frac{\psi}{\varphi\vee\psi}$$

$$(\to E)\quad \frac{\varphi \qquad \varphi\to\psi}{\psi} \qquad\qquad (\to I)\quad \frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \Pi\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}$$

$$(\forall E)\quad \frac{\forall x\varphi}{\varphi^t_x} \qquad\qquad (\forall I)\quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ \varphi\end{array}}{\forall x\varphi}$$

$$(\exists E)\quad \frac{\exists x\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]\\ \Pi\\ \psi\end{array}}{\psi} \qquad\qquad (\exists I)\quad \frac{\varphi^t_x}{\exists x\varphi}$$

$$(\asymp R)\quad \frac{\nu}{x\asymp x} \qquad (\asymp S)\quad \frac{x\asymp y}{y\asymp x} \qquad (\asymp T)\quad \frac{x\asymp y \qquad y\asymp z}{x\asymp z}$$

$$(\asymp Sub_1)\quad \frac{x_1\asymp y_1 \;\ldots\; x_n\asymp y_n \qquad R(x_1\ldots x_n)}{R(y_1\ldots y_n)} \qquad (\asymp Sub_2)\quad \frac{x_1\asymp y_1 \;\ldots\; x_n\asymp y_n}{f(x_1\ldots x_n)\asymp f(y_1\ldots y_n)}$$

$$(\{|\}E)\quad \frac{(t_1\ldots t_n)\in\{x_1\ldots x_n \,|\, \varphi(x_1\ldots x_n)\}}{\varphi(t_1\ldots t_n)} \qquad (\{|\}I)\quad \frac{\varphi(t_1\ldots t_n)}{(t_1\ldots t_n)\in\{x_1\ldots x_n \,|\, \varphi(x_1\ldots x_n)\}}$$

$$(\mathrm{Ext})\quad \dfrac{\dfrac{\varphi \qquad [(x_1\ldots x_n)\in t]}{(x_1\ldots x_n)\in s} \qquad \dfrac{\varphi \qquad [(x_1\ldots x_n)\in s]}{(x_1\ldots x_n)\in t}}{t\simeq s}$$

Remarques:

1. La variable x des dérivations $(\forall I)$ et $(\exists E)$ et les variables $x_1\ldots x_n$ de (Ext) sont appelées paramètres propres des dérivations respectives $(\forall I)$, $(\exists E)$ et (Ext). Dans $(\forall I)$ on suppose que x n'est pas libre dans φ; dans $(\exists E)$ on suppose que x n'est libre ni dans Γ ni dans ψ; enfin dans (Ext), aucune des variables $x_1\ldots x_n$ ne peut apparaître librement dans φ, t ou s. On demande en plus que dans toute dérivation, une variable soit paramètre propre d'au plus une règle d'inférence, que les paramètres propres d'une $(\forall I)$ et d'une (Ext) interviennent seulement au-dessus de la conclusion de l'inférence et ceux d'une $(\exists E)$ uniquement au-dessus de la prémisse mineure (en l'occurrence ici ψ) de l'inférence.
   Ainsi une variable ne peut être à la fois libre dans une dérivation et paramètre propre d'une inférence de cette dérivation.
2. Les inférences $(\{|\}E)$, $(\{|\}I)$ et (Ext) sont également acceptées dans le cas où $n=0$ avec la convention suivante: si $\langle\phi\rangle$ est la suite vide, $\langle\phi\rangle\in t$ est par définition la formule $t\simeq\{\phi|\varphi\}$.

0.16 Validité et modèles.

Une formule φ de $\mathcal{L}$ est <u>valide pour interprétation</u> I si $I_{\sigma(\varphi)}\varphi$ est le plus grand sous-objet de $I\sigma(\varphi)$.

Semblablement une dérivation Π ayant $\bar{x}$ comme suite de variables libres, $\varphi_1\ldots\varphi_n$ comme hypothèses et ψ comme thèse est <u>valide pour une interprétation</u> I si elle donne lieu à l'inclusion du sous-objet $I_{\bar{x}}\varphi_1\times\ldots\times I_{\bar{x}}\varphi_n$ dans le sous-objet $I_{\bar{x}}\psi$ au-dessus de $I\bar{x}$.

Si une formule de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ est valide pour l'interprétation $|-|$, on dira simplement qu'elle est valide. On note $T(\mathbb{E})$ la théorie du topos $\mathbb{E}$ formée par le langage $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ et la collection de toutes les formules valides de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

Un <u>modèle d'une théorie</u> $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathbb{A})$ est une interprétation I de $\mathcal{L}$ dans un topos $\mathbb{E}$ telle que tous les axiomes de $\mathcal{T}$ soient valides pour I.

On démontre que si I est un modèle de $\mathcal{T}$, alors tout théorème de $\mathcal{T}$ est valide pour I. Ainsi le système de déduction vu en 0.15 est correct.

0.17 Modèle canonique d'une théorie.

Considérons une théorie $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathbb{A})$. Nous allons construire une catégorie $\mathrm{For}_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$ dont les objets sont les formules de $\mathcal{L}$.
Soient φ et ψ deux formules de $\mathcal{L}$ et t un terme de type $\Omega^{(\tau\sigma\varphi, \tau\sigma\psi)}$, où $\tau\sigma\varphi$ est la suite des types des variables libres de φ.
On écrira $t(x) \sim y$ au lieu de $(x, y) \in t$.
On définit une équivalence sur les termes grâce à l'égalité à savoir t est équivalent à s ssi $t \simeq s$ est un théorème de $\mathcal{T}$. On note $\bar{t}$ la classe de t pour cette équivalence.
On dira que $\bar{t}$ est un morphisme de φ dans ψ si t n'a pas de variables libres et si les formules suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}$:

$$t(x) \sim y \rightarrow \varphi(x) \wedge \psi(y)$$
$$t(x) \sim y \wedge t(x) \sim y' \rightarrow y \simeq y'$$
$$\varphi(x) \rightarrow \exists y \, (t(x) \sim y)$$

On vérifie que cette définition fait de $\mathrm{For}_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$ un topos où $\mathcal{L}$ s'interprète naturellement. Cette interprétation est un modèle de $\mathcal{T}$; on l'appelle <u>le modèle canonique de</u> $\mathcal{T}$. Souvent par abus, on appellera encore $\mathrm{For}_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$ modèle canonique de $\mathcal{T}$.
Ceci permet de démontrer le théorème de complétude :
Une formule de $\mathcal{L}$ est un théorème de $\mathcal{T}$ ssi elle est valide dans tout modèle.
Le modèle canonique de $T(\mathbb{E})$ sera noté simplement $\mathrm{For}(\mathbb{E})$. L'interprétation canonique fournit un foncteur de $\mathrm{For}(\mathbb{E})$ dans $\mathbb{E}$. C'est une équivalence de catégories.
On peut aussi montrer qu'il y a un isomorphisme entre les modèles de $\mathcal{T}$ dans un topos $\mathbb{E}$ et les foncteurs logiques de $\mathrm{For}_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$ vers $\mathbb{E}$.

0.2. Les catégories fibrées.

Le texte auquel nous ferons référence pour ce paragraphe est le cours de J. Bénabou [6]. Dans la suite, nous supposerons que la catégorie $\mathbb{E}$ possède des limites à gauche finies.

0.21 Catégories fibrées, morphismes cartésiens.

On appelle *catégorie fibrée* (ou *fibration*) *sur* $\mathbb{E}$ un foncteur $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ vérifiant la condition suivante :
pour tout couple (X, u) formé d'un objet X de $\mathbb{F}$ et d'un morphisme $u : J \to I$ de $\mathbb{E}$ tels que $C(X) = I$, il existe dans $\mathbb{F}$ une flèche $f : Y \to X$ telle que $C(f) = u$ avec la propriété universelle que voici :
pour toute flèche $g : Z \to X$ telle que $C(g) = v$ se factorise en $v = u \circ w$, il existe une unique flèche $k : Z \to Y$ telle que $f \circ k = g$ et $C(k) = w$.

On dit que f est *un morphisme cartésien* au-dessus de u.
La situation décrite ci-dessus sera habituellement schématisée par un diagramme du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "k"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& Y \arrow[r, squiggly, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "w"'] \arrow[drr, "v"] & & \\
& J \arrow[r, "u"'] & I
\end{tikzcd}$$

La plupart du temps nous nous permettrons de désigner par $u^*X \rightsquigarrow X$ une flèche cartésienne au-dessus de u et de but X en omettant de lui donner un nom. L'objet u^*X est *une image réciproque de* X *par* u. Habituellement il n'y a pas égalité entre v^*u^*X et $(u \circ v)^*X$ mais seulement un isomorphisme. Si, dans une fibration, il est possible de choisir pour tout couple (X, u) une image réciproque u^*X telle que l'égalité ci-dessus soit vérifiée, on dit que la fibration est *scindée*. On verra dans [6] que toute catégorie fibrée est équivalente à une catégorie fibrée scindée.

0.22 Morphismes cocartésiens et bifibrations.-

La notion duale de morphisme cartésien au-dessus de u est celle de <u>morphisme cocartésien au-dessus</u> de u. La propriété universelle qui caractérise ces derniers est duale de la précédente et se schématise dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g"] & Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "v"] & I \arrow[r, "w"'] & K \end{tikzcd}$$

Souvent nous utiliserons la notation $X \longrightarrow \coprod_u X$ pour désigner un morphisme cocartésien au-dessus de u de source X et nous omettrons de lui donner un nom.

Si le foncteur $C : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ est tel qu'à tout couple (X, u) où $u : J \to I$ est un morphisme de $\mathbb{E}$ et $C(X) = J$, on peut associer un morphisme cocartésien f au-dessus de u de source X, on dira que C est <u>une catégorie cofibrée</u>. Une catégorie à la fois fibrée et cofibrée est appelée <u>catégorie bifibrée</u> (ou <u>bifibration</u>).

0.23 Fibres et foncteurs cartésiens.-

On appelle <u>fibre au-dessus de</u> I objet de $\mathbb{E}$ et on désigne par $C(I)$ la sous-catégorie de $\mathbb{F}$ dont les objets sont les X tels que $C(X) = I$ et les flèches les $f : X \to X'$ tels que $C(f) = 1_I$.
On utilisera aussi les expressions d'<u>objet au-dessus de</u> I ou de <u>famille d'objets indexés par</u> I pour désigner un objet de $C(I)$.

Un <u>foncteur cartésien</u> F entre deux fibrations $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ et $C' : \mathbb{F}' \to \mathbb{E}$ est un foncteur de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{F}'$ qui respecte le caractère cartésien des morphismes et tel que $C' \circ F = C$. Il donne lieu pour tout I de $\mathbb{E}$ à un foncteur $F_I : C(I) \longrightarrow C'(I)$.

0.24. <u>La catégorie fibrée</u> D^C.

Si $\underline{C}$ est une catégorie interne à $\mathbb{E}$, on lui associe une fibration que l'on continue de noter $\underline{C}$ dont la fibre en I est constituée des flèches de $\mathbb{E}$ de source I et de but C_0. Un morphisme de $X : I \to C_0$ vers $Y : J \to C_0$ au-dessus de $u : I \longrightarrow J$ est une flèche $f : I \longrightarrow C_1$ telle que $X = d_0 \circ f$ et $Y \circ u = d_1 \circ f$ (sachant que $d_0, d_1 : C_0 \to C_1$ sont les morphismes source et but de $\underline{C}$).

Si C et D sont deux catégories fibrées sur $\mathbb{E}$, on construit la catégorie fibrée D^C des foncteurs (cartésiens) de C vers D en prenant pour fibre en I la catégorie $\mathrm{Fonct}(C \times \underline{I}, D)$ où $\underline{I}$ est la catégorie discrète engendrée par I dans $\mathbb{E}$.

Dans le cas où C est petite, c'est-à-dire où C est du type $\underline{C}$ pour une certaine catégorie interne à $\mathbb{E}$ $(C_0, C_1, d_0, d_1, id, m)$, un objet F au-dessus de I dans $D^{\underline{C}}$ a la forme particulière suivante : c'est un couple (F_0, α) où F_0 est un objet de $D(C_0 \times I)$ et α un morphisme de $(d_0 \times I)^* F_0$ vers $(d_1 \times I)^* F_0$ tel que $(id \times I)^* \alpha \simeq 1_{F_0}$ et $(m \times I)^* \alpha \simeq \pi_2^* \alpha \circ \pi_1^* \alpha$ sachant que π_1 et π_2 sont les projections définies par le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
(C_1 \underset{C_0}{\times} C_1) \times I \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & C_1 \times I \arrow[d, "d_0 \times I"] \\
C_1 \times I \arrow[r, "d_1 \times I"'] & C_0 \times I
\end{tikzcd} .$$

Si I est un objet de $\mathbb{E}$ et $\underline{D}$ une catégorie dans $\mathbb{E}/_I$, on définit encore $C^{\underline{D}}$ en posant $C^{\underline{D}}(J) = (I^*C)^{\underline{D}}(p)$ où $p : I \times J \to I$ est la projection canonique et I^*C est la fibration de base $\mathbb{E}/I$ dont la fibre en $u : J \to I$ est $C(J)$.

0.25 <u>Les limites à gauche finies.</u>

Une catégorie fibrée $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est à <u>limites à gauche finies</u>

si $\mathbb{F}$ est à limites à gauche finies et le foncteur C les respecte.

On montre que cette condition est équivalente à l'existence de ces limites dans chaque fibre et à leur respect par image réciproque.

Par dualité, on obtient la définition de l'existence des colimites finies.

0.26 Les sommes infinies.

On dira qu'une catégorie fibrée C sur $\mathbb{E}$ possède des ($\mathbb{E}$-) sommes si C est une bifibration vérifiant la condition de Chevaley-Beck, c'est-à-dire que chaque fois qu'on a un produit fibré dans $\mathbb{E}$ comme indiqué, il y a un isomorphisme entre $v^* \coprod_u X$ et $\coprod_{u'} v'^* X$ pour tout objet X de $C(I)$.

$$\begin{tikzcd} I \times_K J \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & J \arrow[d, "v"] \\ I \arrow[r, "u"'] & K \end{tikzcd}$$

Supposons que la catégorie fibrée $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ possède des limites à gauche finies et des sommes. On dira que les sommes sont universelles dans C si les morphismes cocartésiens sont stables par produit fibré dans $\mathbb{F}$. Les sommes sont disjointes dans C si pour tout $u : I \to J$ et toute flèche cocartésienne $X \rightsquigarrow \coprod_u X$ la diagonale $\delta : X \to X \times_{\coprod_u X} X$ est encore cocartésienne.

0.27 Les petites limites à droite.

On dit qu'une fibration $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ admet des petites limites à droite si pour toute catégorie interne $\underline{D}$ à $\mathbb{E}$ le foncteur diagonal de C vers $C^{\underline{D}}$ admet un adjoint à gauche L.

Si $F = (F_0, \alpha)$ est un élément de $C^{\underline{D}}(I)$, on notera $\varinjlim_{\underline{D}} F$ l'objet de $C(I)$ image de F par L.

On appelle famille indexée par I de cônes inductifs de base F un morphisme $\gamma : F_0 \to X$ de $\mathbb{F}$ tel que $C(\gamma)$ soit la projection de $D_0 \times I$ vers I et faisant commuter dans $\mathbb{F}$ le pentagone ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
(d_0 \times I)^* F_0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\alpha"'] & F_0 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & X \\
(d_1 \times I)^* F_0 \arrow[r, squiggly] & F_0 \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

$$D_1 \times I \overset{d_0 \times I}{\underset{d_1 \times I}{\rightrightarrows}} D_0 \times I \xrightarrow{p} I \ .$$

L'objet X est le sommet du cône γ. On remarque que $\varinjlim_{D} F$ est en fait le sommet d'une famille indexée par I de cônes inductifs universels, c'est-à-dire que toute autre famille indexée par I de cônes inductifs se factorise de manière unique par $\varinjlim_{D} F$. Enfin si $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est une catégorie fibrée à sommes et à conoyaux (au sens des colimites finies 0.25), on vérifie que C a des petites limites à droite.

0.28 <u>Fibrations localement petites et well-powered.</u>

La fibration $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est <u>localement petite</u> si pour tout I de $\mathbb{E}$ et tout couple d'objets X, Y de $C(I)$, on peut trouver un morphisme $p : \mathrm{Hom}_I(X,Y) \to I$ et une flèche $\delta_{XY} : p^*X \to p^*Y$ qui soit universelle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : J \to I$ dans $\mathbb{E}$ et tout $g : u^*X \to u^*Y$ il y ait un unique $v : J \to \mathrm{Hom}_I(X,Y)$ pour lequel $u = pv$ et $v^*(\delta_{XY})$ soit égal à g.

Si C est localement petite, on peut construire pour tous X et Y dans $C(I)$ et $C(J)$ respectivement, un objet $\mathrm{Hom}(X,Y) \to I \times J$ de $\mathbb{E}/I \times J$ en posant $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{I \times J}(p_I^* X, p_J^* Y)$ sachant que p_I et p_J sont les deux projections de source $I \times J$.

Notons que si X et Y sont tous deux dans $C(I)$, il n'y a pas d'isomorphisme entre $\mathrm{Hom}(X,Y)$ et $\mathrm{Hom}_I(X,Y)$. Cependant si on remarque que le carré ci-dessous est un produit fibré pour tout

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_J(u^*X, u^*Y) \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{Hom}_I(X,Y) \arrow[d, "p"] \\
J \arrow[r, "u"'] & I
\end{tikzcd}$$

morphisme $u : J \to I$ de $\mathbb{E}$, on voit que $\mathrm{Hom}_I(X,Y)$ s'obtient en remontant

$\mathrm{Hom}(X,Y)$ par produit fibré le long de $\Delta_I : I \rightarrowtail I \times I$.

Une catégorie fibrée $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est <u>well-powered</u> si elle possède la propriété de représentabilité des sous-objets suivante : pour tout I de $\mathbb{E}$ et tout X de $C(I)$, il y a un objet $\varepsilon : \mathrm{Sub}X \to I$ de $\mathbb{E}/_I$ et un monomorphisme $k_X : S \rightarrowtail \varepsilon^* X$ de $C(\mathrm{Sub}X)$ qui soit universel, c'est-à-dire que pour tout $u : J \to I$ de $\mathbb{E}$ et tout monomorphisme $g : S' \rightarrowtail u^* X$ il y ait un unique $v : J \to \mathrm{Sub}X$ dans $\mathbb{E}/_I$ tel que $v^*(k_X)$ soit égal à g.

0.29 <u>Familles particulières.</u>

Fixons une catégorie fibrée $C : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$.

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathbb{F}$ au-dessus de u est une <u>famille (de flèches) collectivement épimorphique</u> si toutes flèches $g, h : Y \to Z$ de $\mathbb{F}$ vérifiant les conditions $gf = hf$ et $C(g) = C(h)$ sont nécessairement égales et si la même chose reste vraie chaque fois qu'on considère une famille déduite de f par image réciproque. Remarquons qu'une famille de cônes inductifs universels est toujours collectivement épimorphique.

Un objet G de $C(I)$ est <u>un objet de générateurs</u> ou <u>une famille génératrice</u> si pour tout J de $\mathbb{E}$ et pour tout couple (f,g) de flèches distinctes de X vers Y dans $C(J)$, il existe un objet K de $\mathbb{E}$ muni de flèches $\partial_0 : K \to I$ et $\partial_1 : K \to J$ et une flèche $h : \partial_0^* G \to X$ au-dessus de ∂_1 telle que $fh \neq gh$.

$$\begin{array}{c} G \leftsquigarrow \partial_0^* G \xrightarrow{h} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \\[1em] I \xleftarrow{\partial_0} K \xrightarrow{\partial_1} J \end{array}$$

0.210 <u>Quelques exemples importants.</u>

a. Si $\mathbb{E}$ est une catégorie possédant des limites à gauche finies, le foncteur but $\partial_1 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$ donne lieu à une fibration que l'on noté E. La fibre $E(X)$ n'est autre que $\mathbb{E}/_X$. Cette fibration possède toujours des sommes disjointes et universelles et l'objet 1 de la fibre en 1 est générateur.

b. Si $f = (f_*, f^*) : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est un morphisme géométrique entre deux catégories (non nécessairement des topos) possédant des limites à gauche finies, on lui associe une catégorie fibrée $\mathbb{F}/_f$ sur $\mathbb{E}$ dont la fibre en I est $\mathbb{F}/_{f^*I}$ et où l'image réciproque par u se calcule grâce au produit fibré le long de f^*u.

Il est facile de voir qu'une telle fibration a toujours des limites à gauche finies, des sommes disjointes et universelles. De plus le foncteur géométrique f s'étend en un foncteur géométrique cartésien $\bar{f}$ de $\mathbb{F}/_f$ dans E. Au niveau I, on définit le couple $((\bar{f}_*)_I, \bar{f}^*_I)$ en prenant pour $(\bar{f}_*)_I(X \xrightarrow{\alpha} f^*I)$ le produit fibré de $f_*\alpha$ le long de l'unité $\eta_I : I \longrightarrow f_* f^* I$ de l'adjonction et pour $\bar{f}^*_I(u)$ le morphisme $f^*(u)$.

c. Soient $\mathbb{E}$ un topos, $\underline{C}$ une catégorie interne à $\mathbb{E}$ et $f : \mathbb{E}^{\underline{C}} \to \mathbb{E}$ le morphisme géométrique dont l'image directe est le foncteur $\underrightarrow{\lim}$ (voir Johnstone [12]). On remarque que les fibrations $E^{\underline{C}}$ (définie grâce à 0.24 et 0.210.a) et $\mathbb{E}^{\underline{C}}/_f$ sont équivalentes.