Jean Benabou

Jan. 1973

Fibered Categories

CHAPITRE I

DRAFT of LECTURES at Louvain-la-neuve

LES NOTIONS GENERALES

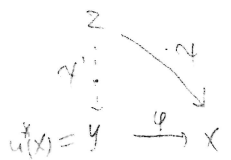
§ 1. RAPPELS ET NOTATIONS.

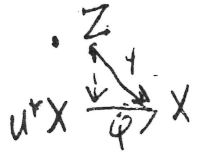
1.1. La 2-Catégorie des catégories fibrées sur B.

(1.1.1.) Catégories fibrées : Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un foncteur. Si $u : J \to I \in \mathcal{B}$, un objet X (resp. une flèche $\varphi : Y \to X$) de $\mathcal{C}$ est dit *au-dessus* de I (resp. de u) si $C(X) = I$ (resp. $C(\varphi) = u$). La *fibre* $\mathcal{C}(I)$ de $\mathcal{C}$ au-dessus de I est la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ ayant pour objets les X au-dessus de I, et pour flèches les φ au-dessus de I, i.e. au-dessus de id_I. Si $X \in \mathcal{C}(I)$ et $Y \in \mathcal{C}(J)$, on pose : $\mathrm{Hom}_u(Y,X) = \{\varphi : Y \to X \mid C(\varphi) = u\}$ si $u = id_I$, $\mathrm{Hom}_u(Y,X)$ est noté $\mathrm{Hom}_I(Y,X)$.

Une flèche φ de $\mathcal{C}$ est *verticale* ssi $C(\varphi)$ est une flèche identité. On note $\mathrm{Vert}(\mathcal{C}) = \cup \{\mathcal{C}(I) \mid I \in \mathcal{B}\}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ ayant les mêmes objets, et pour flèches les φ verticales.

Une flèche φ de $\mathrm{Hom}_u(Y,X)$ est *cartésienne* si pour tout $Z \in \mathcal{C}(J)$ et toute $\psi \in \mathrm{Hom}_u(Z,X)$, il existe $\psi' : Z \to Y \in \mathcal{C}(J)$ unique, telle que $\psi = \varphi\psi'$. On dit alors que φ, ou même par abus de langage que Y, est une *image inverse* de X par u, ce que l'on note : $Y = u^*(X)$, en omettant parfois la flèche φ. Cela est justifié par les remarques triviales suivantes :





(i) Si $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_u(Y_1, X)$ est cartésienne, il existe une unique flèche $\varphi' : Y_1 \to u^*(X) = Y$ de $C(J)$ telle que $\varphi_1 = \varphi\varphi'$, et φ' est alors un isomorphisme de $C(J)$.

(ii) Si $\varphi' : Y_1 \to u^*(X)$ est un isomorphisme de $C(J)$, $\varphi\varphi'$ est cartésienne.

Les images inverses sont donc définies "à isomorphisme *unique* dans la fibre près".
On dit que C est une *fibration*, ou *catégorie fibrée* sur B, ssi :

1) Pour toute flèche $u : J \to I$ de B et tout objet X de $C(I)$, il existe $Y \in C(J)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_u(Y, X)$ cartésienne.

2) Les flèches cartésiennes sont stables par composition.
En considérant le foncteur $C^{op} \to B^{op}$ associé à C, on obtient les notions "duales" de flèches *cocartésiennes* et de *cofibration*, que le lecteur explicitera. Si C est à la fois une fibration et une cofibration, on dit que C est une *bifibration*.

(1.1.2.) Foncteurs cartésiens : Soient $C : \mathcal{C} \to B$ et $D : \mathcal{D} \to B$ des foncteurs. Un *foncteur* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est *au-dessus de* B si $Df = C$. Si f et f' sont au-dessus de B, une transformation naturelle $\alpha : f \to f'$ est *au-dessus* de B ou *verticale* si : $D*\alpha = id_C$, ou encore : pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\alpha(X) : f(X) \to f'(X)$ est verticale. On note $\mathrm{Fonct}_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs au-dessus de B.
Tout $f \in \mathrm{Fonct}_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ induit des foncteurs sur les fibres, notés $f_I : C(I) \to D(I)$. On note de même $\alpha_I : f_I \to f'_I$ la transformation naturelle induite par α.
On dit que f, au-dessus de B, est *cartésien* ssi pour toute φ cartésienne, $f(\varphi)$ est cartésienne. On note $\mathrm{Cart}_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ainsi déterminée.

Nous n'utiliserons ces catégories que lorsque C et D sont des fibrations. La notation $f : C \to D$ signifiera : "C et D fibrées et $f : C \to D$ cartésien". Pour $\mathcal{B}$ fixée, on abrègera parfois $Cart_{\mathcal{B}}(C,D)$ en $Cart(C,D)$.
Si C, D, E sont des fibrations sur $\mathcal{B}$, on a un bifoncteur évident :

$$Cart(C,D) \times Cart(D,E) \to Cart(C,E).$$

D'où la 2-*Catégorie des catégories fibrées sur* $\mathcal{B}$, notée $\underline{Fib(\mathcal{B})}$.

(1.1.3.) Remarque : L'objet de ce travail étant l'étude des 2-catégories $Fib(\mathcal{B})$ et des changements de base $Fib(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B}')$, l'utilisation des 2-catégories est inévitable. Par souci de rester élémentaire, on ne fera appel qu'aux rudiments que l'on trouvera dans l'appendice, quitte à perdre en concision et parfois même en généralité. Dans les exercices cependant, nous utiliserons plus librement les 2-catégories.

1.2. Pseudo-foncteurs et fibrations. [Gr]

(1.2.1.) Un pseudo-foncteur ϕ de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat est défini par les données suivantes :

(i) Pour tout objet I de $\mathcal{B}$, une catégorie $\phi(I)$.

(ii) Pour tout $u : J \to I \in \mathcal{B}$, un foncteur $u^* : \phi(I) \to \phi(J)$.

(iii) Pour tout couple (u,v) de flèches composables de $\mathcal{B}$, un isomorphisme de foncteurs $\varphi_{(u,v)} : v^*u^* \xrightarrow{\sim} (uv)^*$.

(iv) Pour tout objet I de $\mathcal{B}$, un isomorphisme $\varphi_I : id_{\phi(I)} \xrightarrow{\sim} (id_I)^*$.

Les $\varphi_{(u,v)}$ et φ_I étant soumises à des conditions de cohérence "bien connues".

On peut associer à ϕ une catégorie fibrée sur $\mathcal{B}$, notée $\int_{\mathcal{B}}\phi$. Les objets au-dessus de $I \in \mathcal{B}$ sont les couples (I,X) où $X \in \phi(I)$. Un morphisme de (J,Y) vers (I,X) au-dessus de $u : J \to I$ est un couple (u,θ) où $\theta : Y \to u^*(X) \in \phi(J)$.

La composition est donnée par $(u,\theta)\circ(v,\psi) = (uv, v^*(\theta)\psi)$.

La flèche unité $id_{(I,X)}$ est $(id_I, \varphi_I(X))$.

Les conditions de cohérence *équivalent au fait que l'on a bien ainsi une catégorie, ce qui dispense de les expliciter.*

Une flèche (u,θ) est cartésienne ssi θ est un isomorphisme.

En particulier, pour tout couple $(u : J \to I,\ X \in \phi(I))$ on a une image réciproque privilégiée $(u, id_{u^*(X)})$.

Tout foncteur $\phi : \mathcal{B}^{op} \to Cat$ s'identifie à un pseudo-foncteur en posant $u^* = \phi(u)$, les φ_I et $\varphi_{(u,v)}$ étant alors des identités.

(1.2.2.) Inversement, soit C fibrée sur $\mathcal{B}$. Un *clivage* Γ de C est un choix pour tout $(u : J \to I,\ X \in C(I))$ d'une image inverse $\varphi_u(X) : u^*(X) \to X$.

Si $\varphi : X' \to X \in C(I)$ il existe une flèche unique $u^*(\varphi) : u^*(X') \to u^*(X)$ dans $C(J)$, telle que $\varphi\circ\varphi_u(X') = \varphi_u(X)\circ u^*(\varphi)$. D'où un foncteur $u^* : C(I) \to C(J)$.

Si $v : K \to J$, il existe une flèche unique dans $C(K)$, $\varphi_{(u,v)}(X) : v^*u^*(X) \to (uv)^*(X)$, rendant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} v^*u^*(X) & \xrightarrow{\quad\varphi_v(u^*(X))\quad} & u^*(X) \\ {\scriptstyle \varphi_{(u,v)}(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_u(X)} \\ (uv)^*(X) & \xrightarrow[\quad\varphi_{uv}(X)\quad]{} & X \end{array}$$

5.

Les u^*, $\varphi_{(u,v)}$ et φ_I définissent alors un pseudo-foncteur Φ et un isomorphisme de catégories fibrées $C \simeq \int_B \Phi$.
Le pseudo-foncteur Φ est un foncteur ssi les φ_I et $\varphi_{(u,v)}$ sont des identités. On dit alors que les $\varphi_u(X)$ sont un *scindage* de C.

(1.2.3.) L'axiome du choix (sur les "classes") garantit l'existence de clivages pour toute fibration, mais des fibrations très simples n'admettent aucun scindage. Voir par exemple l'exercice 3. Par contre il est toujours possible pour une fibration C, de choisir un *clivage normalisé*, i.e. tel que pour tout objet I de B on ait : $(id_I)^* = id_{C(I)}$.

(1.2.4.) Remarques :
(i) Dans quelques rares questions, l'utilisation de pseudo-foncteurs, i.e. le choix de clivages permet une formulation rapide. Nous nous astreindrons toutefois régulièrement à donner des formulations intrinsèques, i.e. en termes de catégories fibrées seulement, sans choix de clivages particuliers. Elles sont presque toujours plus courtes, et *toujours plus précises* que les formulations non intrinsèques (la géométrie différentielle *n'est pas* le calcul tensoriel!). Même dans le cas d'une fibration $\int_B \Phi$, on s'intéressera à la fibration elle-même, et pas à Φ. (?)

(ii) Il arrive parfois que la définition d'une fibration C soit évidente dès qu'on a défini les fibres. On utilisera alors des abus de langage du genre : "Soit C fibrée sur B, de fibre C(I)". Les mêmes abus vaudront pour les foncteurs cartésiens et les morphismes.

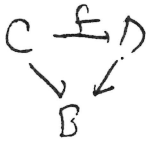
1.3. Adjoints et équivalences.

(1.3.1.) Adjoints : Soient : $C : C \to B$ et $D : \mathcal{D} \to B$ des foncteurs, et $f : C \to \mathcal{D}$ un foncteur au-dessus de B. On dit

que f a un *adjoint à gauche au-dessus de* B, s'il existe un foncteur $g : D \to C$ et des morphismes $\eta : 1_D \to fg$ et $\varepsilon : gf \to 1_C$ au-dessus de B tels que : $(g*\eta)\circ(\varepsilon*g) = id_g$ et $(f*\varepsilon)\circ(\eta*f) = id_f$. Quand C et D sont des fibrations, et f est cartésien, on dit que f a un *adjoint à gauche dans* Fib(B), si en outre il existe un tel g cartésien. Cela implique pour tout $I \in B$ que f_I a un adjoint à gauche g_I. Mais l'existence des adjoints g_I permet seulement de construire un adjoint à gauche g de f au-dessus de B, sans assurer que g est cartésien. Sauf mention expresse, la notion d'adjoint de f cartésien, sera toujours prise au sens de Fib(B). En dualisant, on obtient la notion d'adjoint à droite dans Fib(B).

(1.3.2.) Equivalences : Avec les notations ci-dessus, si η et ε sont des isomorphismes, on dit que f est une *équivalence au-dessus de* B. Si C et D sont des fibrations et f est cartésien, g est aussi cartésien. On dit alors que f est une *équivalence dans* Fib(B) et on note $f : C \xrightarrow{\sim} D$. Cela se reconnaît fibre à fibre. On a en effet la proposition plus complète suivante, [Gi] (1.5.1.) et (1.5.2.) :

(1.3.3.) PROPOSITION : *Soient* $C : C \to B$ *et* $D : D \to B$ *des fibrations et* $f : C \to D$ *un foncteur cartésien.*



(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f *est fidèle (resp. pleinement fidèle, conservatif, une équivalence).*

2) *Pour tout objet* I *de* B, *le foncteur* f_I *est fidèle (resp. etc ...).*

3) *Pour toute fibration* E *sur* B, *le foncteur de composition*

Cart(E,f) : Cart(E,C) → Cart(E,D) *est fidèle (resp. etc ...).*

(ii) *Si* f *est une équivalence, c'est une équivalence dans* Fib(B).

Bien que l'adjonction dans Fib(B) ne se reconnaisse pas fibre à fibre, c'est une notion "2-catégorique". En effet, on vérifie sans peine que :

(1.3.4.) PROPOSITION : *Si* f : C → D ∈ Fib(B), *les conditions* (i) *et* (ii) *sont équivalentes* :

(i) f *a un adjoint à gauche (resp. à droite) dans* Fib(B).

(ii) *Pour toute* E ∈ Fib(B), Cart(E,f) *a un adjoint à gauche (resp. à droite).*

1.4. Sous-fibrations.

Soient C : C → B une fibration, et C' une sous-catégorie de C. Notons C',C' → B la restriction de C à C'.

(1.4.1.) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) C' est une fibration et l'inclusion C' ⊂ C est un foncteur cartésien.

(ii) Si u : J → I ∈ B et X' ∈ C'(I), il existe φ' : Y' → X' ∈ C' cartésienne au-dessus de u pour la fibration C.

(1.4.2.) On dit que C' est une *sous-fibration de* C et on note C' ⊂ C si on a les conditions équivalentes plus fortes ci-dessous :

(i) Si $X' \in C'$ et $\varphi : Y \to X' \in C$ est cartésienne, alors $\varphi \in C'$.

(ii) C' est une fibration, l'inclusion est un foncteur cartésien $C' \to C$ et, si $X' \in C'(I)$ et $\varphi : Y \to X' \in C(I)$ est un isomorphisme, alors $\varphi \in C'(I)$.
L'intérêt des sous-fibrations tient, notamment, aux assertions (1.4.3.) à (1.4.5.), qui sont toutes fausses si on suppose seulement les conditions de (1.4.1).

(1.4.3.) Si C' est une sous-fibration de C, tout clivage (resp. scindage) Γ de C se restreint en un clivage (resp. scindage) Γ' de C', noté $\Gamma_{|C'}$.

(1.4.4.) Si $(C'_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de sous-catégories de C définissant des sous-fibrations C'_α de C, alors $\bigcap_\alpha C' = C'$ définit une sous-fibration de C, notée $\bigcap_\alpha C'$.
On peut donc construire la sous-fibration engendrée par une sous-catégorie arbitraire de C. En particulier, si C' vérifie (1.4.1.), il suffit de saturer C' dans C par les isomorphismes pour obtenir la sous-fibration, notée $\overline{C}'$, engendrée par C'.

(1.4.5.) PROPOSITION : *Soient* $D : \mathcal{D} \to B \in \mathrm{Fib}(B)$, $C' \subset C$ *une sous-fibration, et* $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(B)$. *La sous-catégorie* $\mathcal{D}' = f^{-1}(C')$ *de* $\mathcal{D}$ *définit une sous-fibration de* D, *notée* $f^{-1}(C')$, *et le diagramme évident ci-dessous :*

$$\begin{array}{ccc} D' = f^{-1}(C') & \xrightarrow{f_{|D'}} & C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

est un produit fibré dans $\mathrm{Fib}(B)$.

Notons à ce sujet que les produits fibrés n'existent pas toujours dans Fib($\mathcal{B}$). Ils n'existent même pas si on suppose que l'une des flèches est une inclusion $C' \rightarrowtail C$ où C' vérifie (1.4.1.).

1.5. Cribles et co-cribles.

Soit $C' \subset C$ une sous-fibration.

(1.5.1.) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) C' est un crible de C.

(ii) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, $C'(I)$ est un crible de $C(I)$.

On dit alors que C' est un *crible de* C.

(1.5.2.) On dit que C' est un *co-crible de* C, si pour tout $I \in \mathcal{B}$, $C'(I)$ est un co-crible de $C(I)$ (i.e. si $X' \in C'$ et $\varphi : X' \to Y \in \mathcal{C}$ est verticale, alors $\varphi \in C'$). La construction de la duale $\mathcal{C}^{op}$ de $\mathcal{C}$ (Chap. II) ramènera les co-cribles de C aux cribles de $\mathcal{C}^{op}$, mais il n'y a pas, dans $\mathcal{C}$, de condition "globale" analogue à (1.5.1.)(i).

1.6. Fibrations en groupoïdes.

Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration.

(1.6.1.) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Toutes les flèches de $\mathcal{C}$ sont cartésiennes.

(ii) Toutes les fibres de C sont des groupoïdes.

On dit alors que C est *fibrée en groupoïdes* ou que $\mathcal{C}$ est un

groupoïde fibré.

(1.6.2.) Pour un groupoïde fibré, on a les conditions équivalentes :
C' sous-fibration de C $\iff$ C' crible de C $\iff$ C' co-crible de C.

1.7. Fibrations discrètes et élémentaires.

(1.7.1.) On dit que C est *discrète* si toutes les fibres de C sont des catégories discrètes. Si C est équivalente à une catégorie discrète, on dit que C est *élémentaire*. C est alors un groupoïde fibré.

(1.7.2.) Pour une fibration discrète, on peut rajouter aux conditions équivalentes de (1.6.2.) : C' vérifie (1.4.1.).

1.8. Bifibrations.

(1.8.1.) PROPOSITION : *Soit* $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *une fibration. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $u : J \to I$, *et tout foncteur image inverse* $u^* : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(J)$ *il existe un foncteur* $\coprod_u : \mathcal{C}(J) \to \mathcal{C}(I)$ *adjoint à gauche de* u^*.

(ii) C *est une bifibration.*

Explicitons pour les notations. Soit $\eta_u : id(\mathcal{C}(J)) \to u^* \circ \coprod_u$ le morphisme d'adjonction. Si $Y \in \mathcal{C}(J)$, on a une flèche cartésienne au-dessus de u, $\varphi : u^* \coprod_u Y \to \coprod_u Y$, déterminée par u^*. Une flèche cocartésienne au-dessus de u, $\psi : Y \to \coprod_u Y$ est obtenue en prenant $\psi = Y \xrightarrow{\eta_Y} u^* \coprod_u Y \xrightarrow{\varphi} \coprod_u Y$. Inversement si C est une cofibration, on a par dualité des foncteurs $\coprod_u$, $\mathcal{C}(J) \to \mathcal{C}(I)$; ils sont adjoints à gauche des u^* car pour $X \in \mathcal{C}(I)$ et

$Y \in C(J)$ on a des bijections évidentes :

$$\mathrm{Hom}_{C(I)}(\coprod_u Y, X) \simeq \mathrm{Hom}_u(Y,X) \simeq \mathrm{Hom}_{C(J)}(Y, u^*(X)).$$

(1.8.2.) Il en résulte que si C est une bifibration, les foncteurs u^* préservent les $\varprojlim$ arbitraires, et les foncteurs $\coprod_u$ préservent les $\varinjlim$.

(1.8.3.) Noter que (ii) est une propriété intrinsèque (i.e. indépendante de tout choix de foncteurs u^* ou $\coprod_u$). Il en est donc de même pour (i).

1.9. Changement de base.

Soit $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ un foncteur. Si $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ est une fibration, dans le produit fibré de catégories ci-dessous, le foncteur $F^*(C)$ est une fibration, dite *image inverse de* C *par* F.

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathcal{C}) & \xrightarrow[C^*(F)]{} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle F^*(C)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C} \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow[F]{} & \mathcal{B}. \end{array}$$

La correspondance $C \longmapsto F^*(C)$ s'étend clairement en un 2-foncteur $F^* : \mathrm{Fib}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Fib}(\mathcal{B}')$ appelé *changement de base*. Les propriétés des changements de base et de leurs adjoints seront étudiées en détail. Notons seulement ici que :

(1.9.1.) Si $I' \in \mathcal{B}'$, la fibre $F^*(C)(I')$ s'identifie canoniquement à $C(F(I'))$. Donc si toutes les fibres de C ont certaines propriétés (par exemple certains types de limites) il en est de même pour $F^*(C)$.

(1.9.2.) Si $u' : J' \to I' \in \mathcal{B}'$, un foncteur image inverse

u'^* s'identifie à $F(u')^*$. Donc, si tous les foncteurs image inverse de C ont certaines propriétés, il en est de même pour $F^*(C)$. Par exemple : comme F^* est un 2-foncteur, il résulte de (1.3.) que si $f : C \to D \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ admet un adjoint, ou est fidèle, pleinement fidèle, conservatif ou une équivalence, il en est de même pour $F^*(f) : F^*(C) \to F^*(D)$.

(1.9.3.) Une flèche de $F^*(C)$ est cartésienne ssi son image par $C^*(F)$ l'est. Donc, si Γ est un clivage (resp. scindage) de C défini par des foncteurs u^*, les foncteurs $F(u')^*$ définissent un clivage (resp. scindage) $F^*(\Gamma)$ de $F^*(C)$.

(1.9.4.) Si Φ est un pseudo-foncteur de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat, par composition avec F, on définit un pseudo-foncteur, noté $\Phi \circ F$ de $\mathcal{B}'^{op}$ dans Cat. On a alors un isomorphisme de fibrations : $\int_{\mathcal{B}'} \Phi \circ F \xrightarrow{\sim} F^*(\int_{\mathcal{B}} \Phi)$.

(1.9.5.) Si D est une sous-fibration (resp. un crible) de C, $F^*(D)$ est une sous-fibration (resp. un crible) de $F^*(C)$.

(1.9.6.) En remplaçant $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}^{op}$, tout ce qui précède reste vrai pour les cofibrations. En particulier, si C est une bifibration, il en est de même pour $F^*(C)$.

(1.9.7.) Soit $C' : C' \to \mathcal{B}'$ une fibration. Un foncteur $G : C' \to C$ est dit *cartésien au-dessus de* F ssi pour toute $\varphi' \in C'$ cartésienne au-dessus de $u' \in \mathcal{B}'$, $G(\varphi')$ est cartésienne au-dessus de $F(u')$.
Avec les morphismes évidents, on obtient une catégorie notée $\mathrm{Cart}_F(C', C)$. Le foncteur $C^*(F) : F^*(C) \to C$ est cartésien au-dessus de F, et pour toute $C' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ on obtient par composition avec $C^*(F)$ un isomorphisme de catégories; naturel en C et C' :

$$\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}', F^*(\mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cart}_{F}(\mathcal{C}'\mathcal{C}).$$

(1.9.8.) Soient F_o et F_1 deux foncteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, et $\lambda : F_o \to F_1$ une transformation naturelle. Pour toute $\mathcal{C} \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ on définit un foncteur cartésien dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B}')$, $\lambda^*(\mathcal{C}) : F_1^*(\mathcal{C}) \to F_o^*(\mathcal{C})$ (attention au sens) de la façon suivante. Soit Γ un clivage de $\mathcal{C}$. Pour tout $I \in \mathcal{B}$ on définit, à partir de Γ, les λ_I^* et on a :

$$\lambda^*(\mathcal{C})_I : F_1^*(\mathcal{C})(I) \simeq \mathcal{C}(F_1(I)) \xrightarrow{\lambda_I^*} \mathcal{C}(F_o(I)) \simeq F_o^*(\mathcal{C}(I)).$$

Noter que $\lambda^*(\mathcal{C})$ n'est pas, et ne peut pas être, indépendant d'un clivage : en prenant $\mathcal{B}' = 1$, λ s'identifie à une flèche $u : I_o \to I_1$ de $\mathcal{B}$ et $\lambda^*(\mathcal{C})$ à un foncteur $u^* : \mathcal{C}(I_1) \to \mathcal{C}(I_o)$.

§ 2. QUELQUES FIBRATIONS IMPORTANTES.

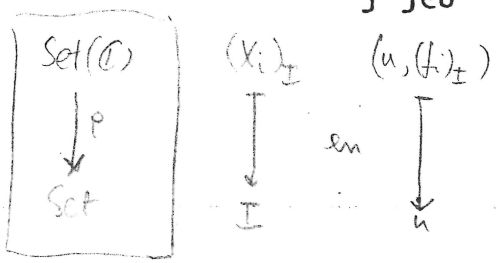
2.1. Le cas trivial.

Toute catégorie X s'identifie à une fibration sur la catégorie finale 1, et on a un isomorphisme de 2-catégories : $\mathrm{Fib}(1) \simeq \mathrm{Cat}$.

2.2. Les fibrations Ens(X).

Cet exemple sera essentiel dans la suite pour la motivation et la compréhension.

(2.2.1.) Toute catégorie X détermine un foncteur $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$, $I \mapsto X^I$, d'où une fibration scindée, notée $\mathrm{Ens}(X) : \mathrm{Ens}(X) \to \mathrm{Ens}$.
La fibre au-dessus de l'ensemble I a pour objets les familles $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de X. Un morphisme au-dessus de l'application $u : J \to I$ de $(Y_j)_{j \in J}$ vers $(X_i)_{i \in I}$ est un couple formé



de u et d'une famille $(f_j : Y_j \to X_{u(j)})$ de flèches de X. Il est cartésien ssi toutes les f_j sont des isomorphismes. Le scindage associe à tout couple $(u : J \to I, (X_i)_{i\in I})$ le couple $(u, (id(X_{u(j)}))_{j\in J})$. La fibre au-dessus de I s'identifie canoniquement à X^I; en particulier on retrouve X elle-même comme fibre au-dessus de l'objet final 1 de Ens.

(2.2.2.) Tout foncteur $f : X \to Y$ définit un foncteur cartésien, noté $Ens(f) : Ens(X) \to Ens(Y)$, et cette correspondance définit un foncteur
$Ens(\ ) : Y^X \to Cart_{Ens}(Ens(X), Ens(Y))$, qui est une équivalence de catégories, mais pas, sauf dans le cas trivial, un isomorphisme.

(2.2.3.) La correspondance $f \mapsto Ens(f)$ est compatible avec la composition et définit un 2-foncteur
$Ens(-) : Cat \to Fib(Ens)$.

(2.2.4.) On a un 2-foncteur d'évaluation en 1,
$(-)(1) : Fib(Ens) \to Cat$ associant à toute C fibrée sur Ens la fibre $C(1)$; c'est une rétraction de $Ens(-)$.

(2.2.5.) Considérations heuristiques : Pour une fibration $C : C \to B$ arbitraire, on "pensera" les objets et les flèches d'une fibre $C(I)$ comme des "familles" d'objets et de flèches, indexées par les "éléments de I", de la "fibre au-dessus de l'objet final de B". Il convient cependant de noter que :

(i) On ne suppose pas que B est à objet final (voir Exercice 16).

(ii) Même si B est à objet final 1, la fibre $C(1)$ est très loin de déterminer la fibration C. En particulier, même

pour $\mathcal{B} = Ens$, une fibration C peut être très différente de $Ens(C(1))$.
Cependant, on "fera comme si" toute base de fibrations $\mathcal{B}$ était identique à Ens, et toute fibration $C : C \to \mathcal{B}$ était du type $Ens(X)$.
Pour cela, nous traduirons toute "propriété usuelle" P des catégories (existence de sommes ou produits infinis, locale petitesse, ensemble de générateurs, etc ...) en une "propriété" Fib(P) de catégories fibrées sur une base arbitraire $\mathcal{B}$. La traduction devra satisfaire *au moins* la condition suivante : une catégorie X vérifie P ssi la fibration $Ens(X)$ vérifie Fib(P). Nous montrerons alors que, sous des hypothèses très faibles sur $\mathcal{B}$, les théorèmes fondamentaux de la théorie des catégories s'étendent aux catégories fibrées. L'intérêt d'une telle extension réside, notamment, dans la remarque suivante. On rencontrera des exemples importants de catégories X très loin de vérifier P, donc telles que $Ens(X)$ ne vérifie pas Fib(P), mais qui seront "la fibre au-dessus de 1" d'une fibration $C : C \to \mathcal{B}$ vérifiant Fib(P). Intuitivement, X "comparée à Ens" n'a pas de bonnes propriétés, mais, "comparée à une catégorie $\mathcal{B}$ convenable", peut en avoir d'excellentes.

2.3. Les fibrations B, S et B*.

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie. Notons $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des flèches de $\mathcal{B}$, et $B : \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{B}$ le foncteur but.

(2.3.1.) Si $\mathcal{B}$ est à produits fibrés, B est une fibration, dite *fondamentale*. La fibre B(I) est la catégorie $\mathcal{B}/I$ des objets de $\mathcal{B}$ au-dessus de I. Si $u : J \to I \in \mathcal{B}$ et $\xi : X \to I$, une flèche cartésienne $(u,\varphi) : \eta \to \xi$ au-dessus de u est donnée par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\xi} \\ J & \xrightarrow[u]{} & I. \end{array}$$

Dans le cas $\mathcal{B} = Ens$, la correspondance $\xi \mapsto (\xi^{-1}(i))_{i\in I}$ définit une équivalence de catégories fibrées $B \sim Ens(Ens)$. Ainsi B joue, comme objet de $Fib(\mathcal{B})$, le même rôle, fondamental, que Ens comme objet de Cat. Il n'est donc pas surprenant que B, en tant que fibration, ait de très bonnes propriétés. On verra que B est toujours une fibration à $\varprojlim$ finies (bien que $\mathcal{B}$ n'aie pas d'objet final) et à sommes "infinies, disjointes et universelles" (même si $\mathcal{B}$ n'a ni sommes ni objet initial).
En retournant les choses, cela revient à dire que l'existence de sommes infinies disjointes et universelles dans Ens est une tautologie! Cela tient à ce que l'on "compare Ens avec elle-même". Par contre, d'autres propriétés de Ens ne sont pas tantologiques, i.e. vérifiées par $B : \mathcal{B}^Z \to \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est arbitraire.

(2.3.2.) Sans aucune hypothèse sur $\mathcal{B}$, le foncteur B est une cofibration munie d'un co-scindage canonique. Explicitons pour les notations. Si $\eta : Y \to J \in \mathcal{B}(J)$ et $u : J \to I \in \mathcal{B}$, le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & \mathrm{id} & \downarrow{\scriptstyle u\eta} \\ J & \xrightarrow[u]{} & I \end{array}$$

définit la flèche cocartésienne canonique de source η, au-dessus de u. On note "classiquement" $u\eta = \coprod_u \eta$, abrégé en $\coprod_u Y$, et la flèche cocartésienne : $(u, id_Y) : {}^u\eta \to \coprod_u \eta$ s'abrège en $u : Y \to \coprod_u Y$.

§

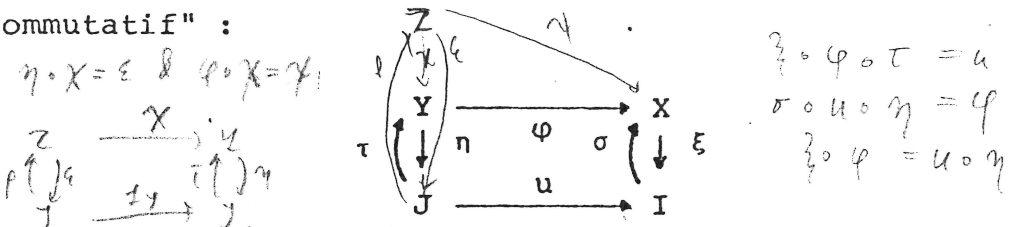
(2.3.3.) En dualisant, le foncteur source $S : \mathcal{B}^{\mathcal{Z}} \to \mathcal{B}$ est toujours une fibration, canoniquement scindée, dite *universelle*.
C'est une bifibration ssi $\mathcal{B}$ est à sommes amalgamées.

$\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}_*$

(2.3.4.) On note $\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}_*$ la catégorie dont les objets sont les diagrammes de $\mathcal{B}$

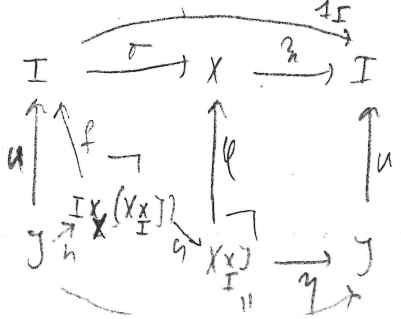
$$I \underset{\xi}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} X \text{ où } \xi\sigma = id_I, \text{ notés } (\sigma,\xi) : I \rightleftarrows X \text{ ou même } (\sigma,\xi).$$

Un morphisme $(u,\varphi) : (\tau,\eta) \to (\sigma,\xi)$ est un diagramme "commutatif" :



si $\mathcal{B}$ est à produits fibrés, le foncteur $B_* : \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}_* \to \mathcal{B}$, $(\sigma,\xi) \mapsto I$, est une fibration, appelée catégorie fibrée des *objets pointés de* $\mathcal{B}$.
Le foncteur $\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}_* \to \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$, $(\sigma,\xi) \mapsto \xi$ est fidèle et préserve et reflète les flèches cartésiennes. Il définit donc un foncteur de $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, appelé foncteur *d'oubli des points base*, et noté $|\ | : B_* \to \mathcal{B}$, qui est fidèle.
Pour $\mathcal{B} = Ens$, soient Ens_* la catégorie des ensembles pointés, et $|\ | : Ens_* \to Ens$ le foncteur d'oubli. La correspondance $(\sigma,\xi) \mapsto (\sigma(i), \xi^{-1}(i))_{i\in I}$ détermine une équivalence canonique de catégories fibrées $[Ens(Ens)]_* \overset{\simeq}{\to} Ens(Ens_*)$.
Par cette équivalence $|\ |_{Ens}$ se transforme en $Ens(|\ |)$, (notations de (2.2.)), ce qui justifie les notations et explique le rôle de la fibration B_*.
Le foncteur $\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}_* \to \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$, $(\sigma,\xi) \mapsto \sigma$, n'est pas très intéressant. C'est bien un foncteur au-dessus de $\mathcal{B}$ de B_* vers S, mais il n'est pas cartésien.

η can easily be constructed by taking pullback; as to τ, draw



the two pull-backs form one pull back again, so there is a unique $h : J \to I \times_X (X \times_I Y)$ with $\eta \circ (\underbrace{\zeta \circ h}_{=\tau}) = 1_J$ □

2.4. Fibrations discrètes; plongement de Yoneda.

(2.4.1.) Soit C fibrée sur $\mathcal{B}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) C est une fibration discrète.

(ii) Pour toute D fibrée sur $\mathcal{B}$, la catégorie $\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(D,C)$ est discrète.

(iii) Si $u : J \to I$ et $X \in C(I)$, il existe $\varphi : Y \to X$ unique au-dessus de u.

On note $\mathcal{D}\mathrm{isc}(\mathcal{B})$ la sous 2-catégorie pleine de $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ ayant pour objets les fibrations discrètes. C'est en fait une catégorie d'après (ii).
Toute fibration discrète C admet un scindage unique, donc définit un foncteur canonique : $\mathcal{B}^{op} \to \mathcal{D}\mathrm{isc}(1)$ noté encore C.

(2.4.2.) Si $F : \mathcal{B}^{op} \to \mathrm{Ens} \subset \mathcal{D}\mathrm{isc}(1)$ est un préfaisceau, la fibration $\int_{\mathcal{B}} F$ est discrète. Tout $f : F \to G \in \hat{\mathcal{B}}$ détermine un foncteur cartésien

$$\int_{\mathcal{B}} f : \int_{\mathcal{B}} F \to \int_{\mathcal{B}} G \text{ par } (\int_{\mathcal{B}} f)_I = f_I : F(I) \to G(I).$$

On a ainsi une bijection de $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{B}}}(F,G)$ sur $\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(\int_{\mathcal{B}} F, \int_{\mathcal{B}} G)$, qui définit un isomorphisme de $\hat{\mathcal{B}}$ sur la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}\mathrm{isc}(\mathcal{B})$ ayant pour objets les fibrations discrètes à fibres petites.

(2.4.3.) Si I est un objet de $\mathcal{B}$, le foncteur source $\mathcal{B}/I \to \mathcal{B}$ est une fibration discrète, dite *associée à* I, et notée encore I. Si $u : J \to I \in \mathcal{B}$ on note encore $u : J \to I \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, le foncteur cartésien : $v \mapsto uv$.
On obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle de $\mathcal{B}$ dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ appelé *plongement de Yoneda*. Ces notations sont

justifiées, car :

(i) si $\mathcal{B} = Ens$, la fibration associée à I s'identifie à Ens(I), où I est considéré comme catégorie discrète et petite;

(ii) si $\mathcal{B}$ est localement petite, I est la fibration associée au préfaisceau Hom(-,I), et on retrouve le plongement de Yoneda usuel.

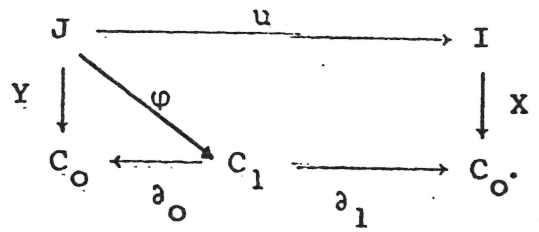
$\int Hom(-,I) = \mathcal{B}/I$

$p \searrow = \mathcal{B}/dom_I$

2.5. Catégories internes.

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie à produits fibrés.

(2.5.1.) Toute catégorie C interne à $\mathcal{B}$ détermine un foncteur $Hom(-,C) : \mathcal{B}^{op} \to Cat$, d'où une fibration scindée $\int_{\mathcal{B}} Hom(-,C)$ que nous noterons $C : \mathcal{B}(C) \to \mathcal{B} \in Fib(\mathcal{B})$.
Explicitons pour fixer les notations et préciser quelques points importants.
On notera C_o et C_1 l'objet des objets et l'objet des flèches de C, $\partial_o : C_1 \to C_o$ et $\partial_1 : C_1 \to C_o$ les morphismes source et but, $\eta : C_o \to C_1$ et $\mu : C_1 \underset{C_o}{\times} C_1 \to C_1$ les morphismes unité et composition.
Un objet de C(I) est une flèche $X : I \to C_o$ de $\mathcal{B}$. Si $u : J \to I \in \mathcal{B}$, et $Y : J \to C_o \in \mathcal{C}(J)$, un morphisme au-dessus de u de Y dans X est un couple (u,φ), où $\varphi : J \to C_1$ rend commutatif le diagramme



La composition dans $\mathcal{B}(C)$, laissée en exercice, utilise μ.

Le *scindage canonique* de C associe à tout couple $(u : J \to I,\ X : I \to C_o)$, l'objet $u^*(X) = X \circ u$ et la flèche cartésienne $u^*(X) \to X$ définie par le couple $(u, \eta \circ X \circ u)$. L'objet id_{C_o} de $C(C_o)$ est dit *objet générique* de C et abrégé en C_o. Tout objet X de $\mathcal{B}(C)$ est image réciproque de C_o car $X = X^*(C_o)$.
La *flèche* $(id_{C_1}, id_{C_1}) : \partial_o^*(C_o) \to \partial_1^*(C_o) \in C(C_1)$ est dite *générique*, et abrégée en id_{C_1}. Toute flèche $(id_I, \varphi) : Y \to X \in C(I)$ est image réciproque de id_{C_1}, car $(id_I, \varphi) = \varphi^*(id_{C_1}) : \partial_o^*(X) \to \partial_1^*(X)$. On notera $Cat(\mathcal{B})$ la 2-catégorie des catégories internes à $\mathcal{B}$. Si C et $D \in Cat(\mathcal{B})$, la catégorie des foncteurs internes de C dans D sera notée $Cat_{\mathcal{B}}(C,D)$, et abrégée en $Cat(C,D)$ si $\mathcal{B}$ est fixé.

(2.5.2.) Tout foncteur interne $f : C \to D$ détermine un foncteur cartésien, noté encore f, entre les fibrations $\mathcal{B}(C) \to \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}(D) \to \mathcal{B}$, défini par : $f_I = Hom(I,f)$ $(I \in \mathcal{B})$. Toute transformation naturelle interne $\alpha : f \to f'$ définit un morphisme de foncteurs cartésiens, noté encore $\alpha : f \to f'$, où $\alpha_I = Hom(I,\alpha)$. On définit ainsi un foncteur $Cat(C,D) \to Cart(C,D)$, et par suite un 2-foncteur $Cat(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B})$ appelé *plongement canonique*.
Les notations sont cohérentes car :

(i) Pour $\mathcal{B} = Ens$ l'inclusion canonique associée à chaque petite catégorie X, la fibration $Ens(X) \to Ens$.

(ii) Pour I objet de $\mathcal{B}$, identifié à une catégorie interne discrète, on retrouve le plongement de Yoneda.

Le plongement $Cat(C,D) \to Cart(C,D)$ n'est pas un isomorphisme. C'est faux même pour $\mathcal{B} = Ens$. Cependant :

(2.5.3.1) PROPOSITION : *Le plongement* Cat(C,D) → Cart(C,D) *est une équivalence de catégories, injective, qui identifie* Cat(C,D) *à la sous-catégorie pleine de* Cart(C,D) *ayant pour objets les foncteurs cartésiens qui respectent les scindages canoniques.*

Preuve sommaire.: Soit f : C → D un foncteur cartésien, où C et D ∈ Cat(B). L'image par f de l'objet générique de C est un objet de $D(C_o)$, i.e. une flèche $C_o \to D_o$ de B, notée f_o. L'image de la flèche générique de C est une flèche de $D(C_1)$, i.e. un couple (id_{C_1}, f_1) où $f_1 : C_1 \to D_1 \in B$. On vérifie sans peine que le couple (f_o, f_1) définit un foncteur interne de C dans D, appelé *partie générique* de f et noté G(f). Il existe alors un unique morphisme de foncteurs cartésiens ε(f) : G(f) → f qui induit l'identité sur l'objet et la flèche générique, et ε(f) est alors un isomorphisme.
D'où l'équivalence, G : Cart(C,D) → Cat(C,D), rétraction du plongement canonique.
Les vérifications, longues mais directes, sont laissées en exercice. On identifiera Cat(C,D) et Cat(B) à leurs images dans Cart(C,D) et Fib(B), au moyen du plongement canonique.

2.6. Diagrammes.

Un *graphe* G dans une catégorie X est un couple de flèches de X, de même source et de même but. On note $G = (\partial_o, \partial_1) : G_1 \rightrightarrows G_o$.

(2.6.1.) Soit G un graphe de B. Si C : C → B est une fibration, un *diagramme de type* G *dans* C est un graphe $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1) : F_1 \rightrightarrows F_o$ de C tel que α_1 est au-dessus de ∂_1, et α_o est cartésienne au-dessus de ∂_o. Avec la définition évidente de morphisme, on obtient la *catégorie* Diag(G,C)

des *diagrammes de type* G *dans* C.

(2.6.2.) Si $d \in \mathcal{D}iag(G,C)$ et $f \in Cart(C,D)$, le diagramme $(fd_o, fd_1) : fF_1 \rightrightarrows fF_o \in \mathcal{D}iag(G,D)$ est noté $f \circ d$ ou $f(d)$. On obtient ainsi un bifoncteur : $Cart(C,D) \times \mathcal{D}iag(G,C) \to \mathcal{D}iag(G,D)$. Ces bifoncteurs sont compatibles en un sens évident avec la composition des foncteurs cartésiens, d'où un 2-foncteur :

$$\mathcal{D}iag(G,-) : Fib(\mathcal{B}) \to Cat.$$

2.7. Foncteurs d'une catégorie interne dans une catégorie fibrée.

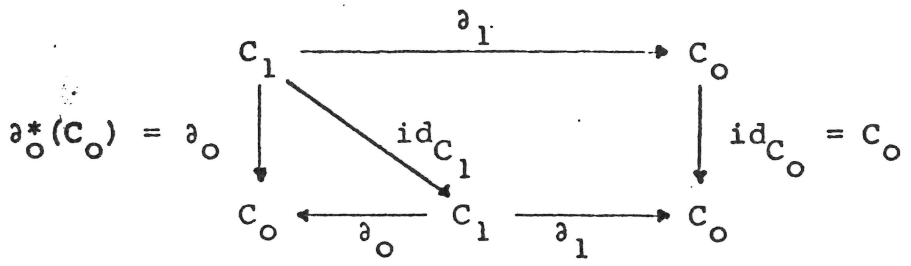
Soit $C \in Cat(\mathcal{B})$. Le graphe $(\partial_o, \partial_1) : C_1 \rightrightarrows C_o$ de $\mathcal{B}$ est dit *sous-jacent* à C et noté G(C).

(2.7.1.) On reprend les notations de (2.5.1.).

(i) La commutativité du diagramme ci-dessous fournit une flèche $d_o = (\partial_o, \eta\partial_o) : \partial_o^*(C_o) \to C_o$, cartésienne au-dessus de ∂_o. (de type 2 ou 1)

$$\begin{array}{ccccc} & & C_1 & \xrightarrow{\partial_o} & C_o \\ \partial_o^*(C_o) = \partial_o & & \downarrow & \searrow^{\eta\partial_o} & \downarrow\, id_{C_o} = C_o \\ & & C_o & \xleftarrow[\partial_o]{} C_1 \xrightarrow[\partial_1]{} & C_o \end{array}$$

(ii) La commutativité du diagramme ci-dessous fournit une flèche $d_1 = (\partial_1, id_{C_1}) : \partial_o^*(C_o) \to C_o$, au-dessus de ∂_1;



Le diagramme $(d_o,d_1) : \partial_o^*(C_o) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} C_o$ de type G(C) dans C est dit *générique* et noté d(C).

(2.7.3.) Si $f \in Cart(C,D)$, le diagramme $f \circ d(C)$ est appelé *restriction de* f *ou diagramme générique de* C et noté G(f). La correspondance $f \longmapsto G(f)$ définit un foncteur $G : Cart(C,D) \to Diag(G(C),D)$.

(2.7.4.) PROPOSITION : *Le foncteur* G *est pleinement fidèle. La vérification, directe, est laissée en exercice.*

(2.7.5.) Comme G est pleinement fidèle, son image est une sous-catégorie pleine de Diag(G(C),D), notée Fonct(C,D), et G induit une équivalence *surjective sur les objets*, notée encore G, de Cart(C,D) vers Fonct(C,D). Un *foncteur* F *de* C *vers* D, i.e. un objet de Fonct(C,D), est donc un diagramme $(d_o,d_1) : F_1 \overset{\rightarrow}{\rightarrow} F_o$ de type G(C) dans D, qui peut se prolonger en un foncteur cartésien de C vers D.
Cette définition est intrinsèque, i.e. indépendante de tout clivage. Par contre un prolongement, non unique, dépendra en général d'un clivage de D. Plus formellement, il n'y a pas d'équivalence réciproque de G qui soit canonique.

(2.7.6.) On peut évidemment exprimer de manière élémentaire la propriété, pour un diagramme $(d_o,d_1) : F_1 \overset{\rightarrow}{\rightarrow} F_o$, d'être un foncteur. Soit Γ un clivage de D. (Les considérations de (2.7.5.) montrent que le résultat est indépendant du choix de Γ). Notons $\varphi : \partial_o^* F_o \to \partial_1^* F_o$ la flèche de $D(C_1)$ dé-

finie par d_1.

Les égalités : $\partial_1 p_1 = \partial_0 p_0$, $\partial_1 \mu = \partial_1 p_0$, $\partial_0 \mu = \partial_0 p_1$, où p_0 et p_1 sont définis par le produit fibré ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 & \xrightarrow{p_0} & C_1 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_1} \\ C_1 & \xrightarrow{\partial_0} & C_0 \end{array}$$

définissent les isomorphismes du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mu_1^* \partial_0^* F_0 & \xrightarrow{p_1^* \varphi} & p_1^* \partial_1^* F_0 & \xrightarrow[\sim]{(\partial_1 p_1 = \partial_0 p_0)} & p_0^* \partial_0^* F_0 \\ {\scriptstyle (\partial_0 \mu = \partial_0 p_1)}\downarrow \wr & & & & \downarrow{\scriptstyle p_0^* \varphi} \\ \mu^* \partial_0^* F_0 & \xrightarrow[\mu^* \varphi]{} & \mu^* \partial_1^* F_0 & \xrightarrow[(\partial_1 \mu = \partial_1 p_0)]{\sim} & p_0^* \partial_1^* F_0 \end{array}$$

dont la commutativité exprime : "$F(f_0 f_1) = F(f_0) \circ F(f_1)$" Nous laissons au lecteur le plaisir d'exprimer de manière analogue "$F(id_C) = id_{F(C)}$", et s'il est suffisamment masochiste, de vérifier que ces propriétés ne dépendent pas du choix du clivage Γ. Il faudrait même pour être complet, définir la catégorie Cart(C,D) à partir de Γ, puis voir que le foncteur G est indépendant du choix de Γ. Bien entendu, les tenants de "catégories indexées" se lavent les mains de ces "nuances". /N.

L'usage systématique que nous faisons de notions intrinsèques permet, entre autres choses, d'éviter de pareilles horreurs.

(2.7.7.) Quand D est aussi interne, on retrouve les notations de (2.5.) et Fonct(C,D) s'identifie *canoniquement* à Cat(C,D).

(2.7.8.) La correspondance $(C,D) \mapsto G$ est clairement fonctorielle : i.e. si C' et $C \in Cat(\mathcal{B})$ et D et $D' \in Fib(\mathcal{B})$, on a des bifoncteurs canoniques :

$$Cat(C',C) \times Fonct(C,D) \to Fonct(C',D), \text{ et}$$

$$Fonct(C,D) \times Cart(D,D') \to Fonct(C,D')$$

définissant un 2-bifoncteur :
$Fonct(-,-) : Cat(\mathcal{B}) \times Fib(\mathcal{B}) \to Cat$; et la correspondance $(C,D) \mapsto G$ est une transformation naturelle de 2-bifoncteurs : $Cart(-,-) \to Fonct(-,-)$.
(Le mot "2-bifoncteur" est affreux, mais pratiquement imposé!).

2.8. Le lemme de Yoneda.

(2.8.1.) Soient $C \in Cat(\mathcal{B})$ et $D \in Fib(\mathcal{B})$. Si $F = (d_o,d_1) : F_1 \rightrightarrows F_o$ est un foncteur de C dans D, l'objet $F_o \in D(C_o)$ est dit *valeur de F en l'objet générique* de C, et noté $F(C_o)$. La correspondance $F \mapsto F(C_o)$ définit un foncteur canonique : $Fonct(C,D) \to D(C_o)$.
En composant avec l'équivalence : $Cart(C,D) \to Fonct(C,D)$, on obtient le foncteur d'*évaluation en l'objet générique* :

$$Cart(C,D) \to D(C_o); \; f \mapsto f_{C_o}(C_o).$$

(2.8.2.) Si I est un objet de $\mathcal{B}$, la catégorie discrète associée a pour graphe générique : $G(I) = (id_I,id_I) : I \rightrightarrows I$.
Donc $Fonct(I,D) \to D(I)$ est une équivalence canonique.
L'équivalence réciproque, elle aussi canonique, associe à $X \in D(I)$ le foncteur $(id_X,id_X) : X \rightrightarrows X$ de I dans D.
On déduit alors de (2.7.) :

(2.8.3.) LEMME de Yoneda : *Soient I un objet de $\mathcal{B}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ une fibration.*

(i) *Le foncteur d'évaluation* : $\mathrm{Cart}(I,D) \to D(I)$
$f \mapsto f(id_I)$ *est une équivalence de catégories, surjective sur les objets.*

(ii) *Cette équivalence dépend fonctoriellement de* $I \in \mathcal{B}$ *et* $D \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

(2.8.4.) Remarques :
(i) Le fait que "l'équivalence de Yoneda" soit *surjective* sera utilisé de manière *essentielle* dans la suite.

(ii) Le lemme de Yoneda s'interprète sous la forme : Un foncteur d'une petite catégorie discrète I dans une catégorie D, "est" une "famille d'objets de D indexés par I". Hors du cadre des fibrations, il n'y a pas d'interprétation analogue du lemme de Yoneda classique.

(iii) Il n'y a pas, en général, d'équivalence réciproque de l'équivalence de Yoneda qui soit canonique, ni fonctorielle en I et D.

(iv) La correspondance $I \mapsto \mathrm{Cart}(I,D)$ est un foncteur $\mathrm{Cart}(-,D)$ de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat, qui définit une fibration scindée. La fonctorialité de l'équivalence de Yoneda montre que l'on a un foncteur cartésien $\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Cart}(-,D) \to D$, qui d'après (1.3.3.) est une équivalence de fibrations.

(2.8.5.) Corollaire : Pour toute D-fibrée sur $\mathcal{B}$, il existe une fibration scindée D' et une équivalence canonique $D' \xrightarrow{\approx} D$ de fibrations. Cette équivalence est en outre fonctorielle pour $D \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, et surjective. On dit que $\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Cart}(-,D)$ est la *fibration scindée engendrée* par D.

2.9. Fibrations constantes.

(C'est un rappel, destiné à fixer des notations).

(2.9.1.) Pour toute catégorie X, la projection $X : \mathcal{B}\times X \to \mathcal{B}$ est une bifibration, dite constante de base $\mathcal{B}$ et de fibre X, et notée $K_{\mathcal{B}}(X)$, ou $K(X)$ pour $\mathcal{B}$ fixé.
Si $\varphi = (\xi,u) : (Y,J) \to (X,I) \in X\times\mathcal{B}$, on a :
φ cartésienne $\iff$ φ cocartésienne $\iff$ ξ isomorphisme. En particulier, les (id_X,u) définissent un scindage et un coscindage de $K(X)$, appelés canoniques.

(2.9.2.) La correspondance $X \longmapsto K_{\mathcal{B}}(X)$ est un 2-foncteur de Cat dans $Fib(\mathcal{B})$, et si $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ est un foncteur on a un isomorphisme naturel : $K_{\mathcal{B}'}(X) \xrightarrow{\sim} F^*(K_{\mathcal{B}}(X))$.

(2.9.3.) Pour $X = 0$ on obtient la fibration $0 \to \mathcal{B}$, notée $0_{\mathcal{B}}$ ou 0. Pour $X = 1$, la fibration $K_{\mathcal{B}}(1)$ est identifiée à $id_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ et notée $1_{\mathcal{B}}$ ou 1.

(2.9.4.) Si $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ est une fibration, on a les propriétés caractéristiques :

$Cart_{\mathcal{B}}(C,1) \simeq 1 \simeq Cart_{\mathcal{B}}(0,C)$, et $Cart_{\mathcal{B}}(C,0) = 0$ si $C \neq 0$.

(2.9.5.) Conformément à [Gi] on notera $\underrightarrow{Lim}\ C$ la catégorie de fractions de C obtenue en inversant les flèches cartésiennes, et $\underleftarrow{Lim}\ C = Cart(1,C)$. Elles sont caractérisées à isomorphisme près par les propriétés suivantes, valables pour toute catégorie X :

(i) $Cart_{\mathcal{B}}(K(X),C) \simeq Cat(X,\underleftarrow{Lim}\ C)$

(ii) $Cart_{\mathcal{B}}(C,K(X)) \simeq Cat(\underrightarrow{Lim}\ C,X) \simeq Cart_{\varepsilon(\mathcal{B})}(C,X)$ (où $\varepsilon(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \to 1$).

(2.9.6.) Si X est un groupoïde, on a en outre :
$\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(C, X(X)) \simeq \mathrm{Cat}(C, X)$.

2.10. La fibration Ω.

On fixe $\mathcal{B}$ dans ce qui suit.

(2.10.1.) Soient C et D fibrées sur $\mathcal{B}$ et $C' \subset C$ une sous-fibration (cf. 1.4.).
On vérifie trivialement (i) à (iii) ci-dessous :

(i) Si C' est un crible (resp. un co-crible) de C, pour tout $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ $f^{-1}(C')$ est un crible (resp. un co-crible) de D.

↳ see p 9. (it has to be a multifibration and its fibers are cocribles in $\mathcal{C}$)

(ii) Si f_o et $f_1 : D \to C$ sont isomorphes dans $\mathrm{Cart}(C, D)$, $f_o^{-1}(C') = f_1^{-1}(C')$.

(iii) Si $f : D \to C$ est une équivalence, pour toute équivalence réciproque $g : C \to D$ on a $C' = g^{-1}(f^{-1}(C'))$.

(2.10.2.) Pour toute C fibrée sur $\mathcal{B}$ on note $\Omega(C)$ la catégorie ordonnée par inclusion des co-cribles de C. Si $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, la correspondance $C' \mapsto f^{-1}(C')$ définit un foncteur, noté $\Omega(f) : \Omega(C) \to \Omega(D)$. Notons $\mathcal{O}rd$ la 2-catégorie des catégories ordonnées. La correspondance $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B}) \mapsto \Omega(C) \in \mathcal{O}rd$ définit un 2-foncteur contravariant $\Omega(-) : \mathrm{Fib}(\mathcal{B}) \to \mathcal{O}rd$.
En composant $\Omega(-)$ avec l'inclusion canonique $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, on obtient un foncteur de $\mathcal{B}^{op}$ dans $\mathcal{O}rd$, d'où une fibration scindée sur $\mathcal{B}$, notée Ω. (Noter que Ω est une fibration ordonnée; donc le scindage est unique).

(2.10.3.) Pour $I \in \mathcal{B}$, $\Omega(I)$ est la catégorie ordonnée des co-cribles de $I \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. Mais I étant ~~discrète~~, les co-

ie $\mathcal{B}/I$ and I

cribles sont les sous-fibrations i.e. les sous-foncteurs de $\mathrm{Hom}(-,I)$; et la fibration Ω est "celle de tout le monde". ||
Notons $v(I)$ le co-crible $I \subset I \in \Omega(I)$; la correspondance $I \mapsto v(I)$ définit un foncteur cartésien $v : 1 \to \Omega$, qui identifie 1 à un co-crible de la fibration Ω, noté encore v.

(2.10.4.) Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration. A tout co-crible C' de $\mathcal{C}$ on associe son *foncteur caractéristique* $\chi_{C'} : \mathcal{C} \to \Omega \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ défini comme suit :
si $X \in \mathcal{C}(I)$, $\chi_{C'}(X) \in \Omega(I)$ est le co-crible de I défini par : $u : J \to I \in \chi_{C'}(X)$ ssi il existe $Y' \in C'$ et $\varphi : Y' \to X \in \mathcal{C}$, cartésienne au-dessus de u. Inversement, si $\chi : \mathcal{C} \to \Omega \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, il définit un co-crible $C' = \chi^{-1}(v)$ de $\mathcal{C}$.

(2.10.5.) THEOREME : *Les correspondances* $C' \mapsto \chi_{C'}$ *et* $\chi \mapsto \chi^{-1}(v)$ *définissent des isomorphismes de catégories ordonnées*

$$\Omega(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cart}(\mathcal{C},\Omega) \text{ et } \mathrm{Cart}(\mathcal{C},\Omega) \xrightarrow{\sim} \Omega(\mathcal{C}).$$

Ces isomorphismes sont réciproques l'un de l'autre et dépendent fonctoriellement de $\mathcal{C} \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

Ainsi, malgré les apparences, la *fibration* Ω *classifie* non pas les cribles mais *les co-cribles* dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. Habituellement on reste dans $\hat{\mathcal{B}}$ i.e. dans $\mathrm{Disc}(\mathcal{B})$ et pour les fibrations discrètes, cribles et co-cribles coïncident, d'où l'apparente confusion. Le *co-crible* $v \subset \Omega$ est dit *universel*.

(2.10.6.) Remarque : On ne peut faire mieux, i.e. il n'y a pas de fibration Σ classifiant les sous-fibrations, même à équivalence près, au sens suivant. Pour toute $\mathcal{C} \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, notons $\Sigma(\mathcal{C})$ la catégorie ordonnée des sous-fibrations de $\mathcal{C}$, et supposons qu'il existe $\Sigma \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ telle que les catégories $\mathrm{Cart}(\mathcal{C},\Sigma)$ et $\Sigma(\mathcal{C})$ soient équivalentes,

naturellement par rapport à C. L'inclusion évidente $\Omega(C) \hookrightarrow \Sigma(C)$ définirait un foncteur $Cart(C,\Omega) \to Cart(C,\Sigma)$, naturel en C, donc un morphisme de fibrations $f : \Omega \to \Sigma$. D'après le lemme de Yoneda (en particulier (ii)), pour tout $I \in \mathcal{B}$, f_I serait équivalent à l'inclusion $\Omega(I) \hookrightarrow \Sigma(I)$, laquelle est un isomorphisme, car I est discrète. Donc f serait une équivalence de fibrations d'après (1.3.3.), ce qui est absurde, car les catégories $\Sigma(C)$ et $\Omega(C)$ ne sont pas en général équivalentes.

2.11. La fibration ω.

On suppose $\mathcal{B}$ à produits fibrés.

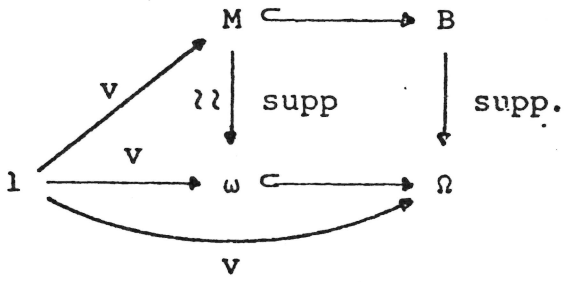
(2.11.1.) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, on note $\omega(I)$ la catégorie ordonnée des sous-objets de I, i.e. des classes d'équivalence de monomorphismes $m : I' \rightarrowtail I$. Si $u : J \to I \in \mathcal{B}$ on note $u^* : \omega(I) \to \omega(J)$ le foncteur image inverse évident. On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{B}^{op} \to \mathcal{O}rd$, d'où une fibration ordonnée, notée ω.

(2.11.2.) A tout $s \in \omega(I)$ on associe un co-crible de I, noté encore s, défini par $u : J \to I \in s$ ssi u se factorise par un représentant $m : I' \rightarrowtail I$ de s. On définit ainsi un foncteur cartésien $\omega \to \Omega$, pleinement fidèle, et injectif, qui identifie ω à la sous-fibration pleine de Ω ayant pour objets les co-cribles représentables au sens suivant.
Un co-crible C de I est représentable s'il existe $m_o : I_o \to I \in C(I_o)$ tel que :
$\forall J \in \mathcal{B} \quad \forall u : J \to I \in C(J) \quad \exists! u_o : J \to I_o$ tel que $u = m_o u_o$.
Un tel m_o est alors un monomorphisme et sa classe dans $\omega(I)$ détermine C, et est déterminée par C, de manière évidente.
On identifiera ω à cette sous-fibration, et on notera $\omega \subset \Omega$.

(2.11.3.) Le foncteur $v : 1 \to \Omega$ se factorise par ω. On notera encore $v : 1 \to \omega$ cette factorisation.

(2.11.4.) On définit un foncteur cartésien $supp : B \to \Omega$ comme suit :
Si $\xi : X \to I \in \mathcal{B}(I)$, son support est le co-crible $supp(\xi) \in \Omega(I)$ défini par $u : J \to I \in supp(\xi)$ si u se factorise par ξ.

(2.11.5.) La sous-catégorie pleine $Mono(\mathcal{B})$ de $\mathcal{B}^2$ ayant pour objets les monomorphismes de $\mathcal{B}$ définit une sous-fibration pleine de $\mathcal{B}$, notée $M \subset B$. La restriction de supp à M se factorise par ω et définit une équivalence de fibrations, notée encore $supp : M \xrightarrow{\sim} \omega$. Le foncteur $v : 1 \to \omega$ se factorise par M en un foncteur noté encore $v : 1 \to M$, associant à tout $I \in \mathcal{B}$ le monomorphisme $id_I \in M(I)$. Toutes les notations et considérations précédentes se résument dans le diagramme commutatif ci-dessous, où le carré de droite est un produit fibré dans $Fib(\mathcal{B})$.



(2.11.6.) L'importance de la fibration ω résulte des remarques suivantes :

(i) Toutes les propriétés de la logique interne du premier ordre de $\mathcal{B}$ s'expriment très simplement en termes de la fibration ω.

(ii) Pour toute catégorie $\mathcal{B}$, la catégorie $\hat{\mathcal{B}}$ est un topos,

donc admet un objet $\Omega_{\hat{\mathcal{B}}}$ classifiant les sous-objets, la fibration $\int_{\mathcal{B}}\Omega_{\hat{\mathcal{B}}}$ est Ω dont on a vu d'ailleurs qu'elle classifiait bien plus que les sous-objets de $\hat{\mathcal{B}}$.
Mais $\mathcal{B}$ elle-même pourrait avoir un objet $\Omega_{\mathcal{B}}$ classifiant les sous-objets de $\mathcal{B}$ (par exemple si $\mathcal{B}$ est un topos élémentaire). Dans ce cas, la fibration ω s'identifie à : $\int_{\mathcal{B}}\mathrm{Hom}(-,\Omega_{\mathcal{B}})$. Mais ω existe toujours comme fibration, on peut, et on doit même d'après (i), étudier ses propriétés. L'existence de $\Omega_{\mathcal{B}}$ signifie simplement que ω est isomorphe à une fibration interne.

(iii) La fibration ω classifie les co-cribles définissables, (2.11.7.) et nous verrons au Chapitre IV le rôle fondamental de la définissabilité.

Notons en passant que, bien que ω soit scindée et supp : $M \to \omega$ soit une équivalence dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, ω n'est pas la fibration scindée associée à M par le lemme de Yoneda, qui est beaucoup plus grosse que ω.

(2.11.7.) Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration. Un *co-crible* $C' : \mathcal{C}' \to \mathcal{B}$ de C est *définissable* ssi pour tout $X \in \mathcal{C}$ il existe $X' \in \mathcal{C}'$ et $\varphi_X : X' \to X \in \mathcal{C}$ cartésienne, universels au sens suivant : Si $Y' \in \mathcal{C}'$ et $\psi : Y' \to X \in \mathcal{C}$ est cartésienne, il existe une unique flèche $\psi' : Y' \to X'$ cartésienne telle que : $\psi = \varphi_X \circ \psi'$.

(2.11.8.) THEOREME : *La fibration ω classifie les co-cribles définissables, i.e. si $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, un co-crible C' de C est définissable ssi son foncteur caractéristique $\chi_{C'} : \mathcal{C} \to \Omega$ se factorise par ω.*

Preuve : Soit C' définissable. Pour $X \in \mathcal{C}(I)$, notons $m_X : I' \to I$ l'image par C de φ_X. On a $m_X \in M(I)$, car si

u'_o et u'_1 : $J \to I'$ sont telles que $m_X\, u'_o = m_X\, u'_1 = u$, on prend ψ : $Y' \to X$ cartésienne au-dessus de u, elle se factorise à travers φ en deux flèches ψ'_i : $Y' \to X'$ cartésiennes au-dessus de u_i, i=0,1. Comme C' est une sous-fibration, $Y' \in C'$ et l'unicité de ψ' donne $\psi'_o = \psi'_1$ donc $u'_o = u'_1$.
Le support de m_X est donc le co-crible de I engendré par m_X, élément de $\omega(I)$. Montrons que $\chi_{C'}(X) = \mathrm{supp}(m_X)$ ce qui prouvera la nécessité.
Si $u : J \to I \in \mathrm{supp}(m_X)(J)$, u se factorise en $m_X \circ u'$.
Soit $\psi' : Y' \to X'$ cartésienne au-dessus de u'. On a $Y' \in C'$ et $\psi = \varphi \circ \psi'$ cartésienne au-dessus de u, donc $u \in \chi_{C'}(X)$. D'où $\mathrm{supp}(m_X)(J) \subset \chi_{C'}(X)(J)$.
Si $u : J \to I \in \chi_{C'}(X)(J)$, il existe $Y' \in C'$ et $\psi : Y' \to X$ cartésienne au-dessus de u. Alors ψ se factorise par φ_X donc u par m_X, et $u \in \mathrm{supp}(m_X)(J)$. D'où l'égalité voulue.
Réciproquement soit $f : C \to \omega$, alors $C' = f^{-1}(1)$ est définissable : Si $X \in C(I)$, $f(X) \in \omega(I)$ est représenté par un monomorphisme m_X : $I' \to I$, et on prend φ_X : $X' \to X$, cartésienne au-dessus de m_X. L'universalité de φ_X est laissée en exercice.

(2.11.9.) Pour toute $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ notons $\omega(C)$ la catégorie ordonnée des co-cribles définissables de C. On déduit trivialement de (2.11.7.)

(i) Si $f : C \to D \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ et $D' \in \omega(D)$, $f^{-1}(D') \in \omega(C)$. La correspondance $C \mapsto \omega(C)$, $f \mapsto f^{-1}$ définit un 2-foncteur contravariant $\omega(\ )$: $\mathrm{Fib}(\mathcal{B}) \to \mathcal{O}rd$.

(ii) Les isomorphismes de (2.10.5.) induisent par restriction des isomorphismes de 2-foncteurs : les correspondances $C' \mapsto \chi_{C'}$ et $\chi \mapsto \chi^{-1}(v)$ induisent les isos

$$\omega(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cart}(C,\omega) \text{ et } \mathrm{Cart}(C,\omega) \xrightarrow{\sim} \omega(C).$$

(2.11.10.) Remarque : Si un 2-foncteur contravariant $C(\ ) : Fib(\mathcal{B}) \to Cat$ est *représentable* (resp. *2-représentable*), i.e. s'il existe $C \in Fib(\mathcal{B})$ telle que $C(\ )$ soit isomorphe (resp. équivalent) à $Cart(-,C)$, le lemme de Yoneda permet de déterminer C à isomorphisme (resp. équivalence) près dans $Fib(\mathcal{B})$ par $C(I) = \Sigma(I)$.
De façon précise, en composant $C(\ )$ avec l'inclusion canonique $\mathcal{B} \hookrightarrow Fib(\mathcal{B})$ on obtient un foncteur de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat, et C est la fibration, scindée, associée à ce foncteur.
On rencontrera de très nombreux exemples de cette situation, mais les critères généraux de représentabilité, qui existent, ne seront pas abordés dans ce travail, car ils mettent en jeu des aspects de la théorie des 2-catégories beaucoup plus complexes que les rudiments auxquels nous nous restreignons. Noter que, pour tout $C(\ )$, la fibration scindée C existe toujours, mais ne représente pas forcément $C(\ )$, (cf. (2.10.6.)).

§ 3. QUELQUES PROPOSITIONS GENERALES.

Compte tenu de leur importance, les résultats de ce paragraphe seront utilisés dans la suite sans référence, sauf pour rappeler des notations.

3.1. Sommes et produits de fibrations de bases variables.

Si $(C_\alpha : C_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fibrations indexée par un ensemble A, les foncteurs évidents ci-dessous sont des fibrations, notées $\bigotimes_\alpha C_\alpha$ et $\bigoplus_\alpha C_\alpha$.

$$\prod_\alpha C_\alpha \to \prod_\alpha \mathcal{B}_\alpha \quad \text{et} \quad \coprod_\alpha C_\alpha \to \coprod_\alpha \mathcal{B}_\alpha .$$

(Les notations $\prod_\alpha C_\alpha$ et $\coprod_\alpha C_\alpha$ seront introduites au paragraphe 4, pour des fibrations sur une base fixe).

3.2. "Relèvement cartésien des homotopies".

Si $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ est une fibration et X une catégorie, le foncteur de composition : $C^X \to \mathcal{B}^X$ est une fibration, notée $C^{\otimes X}$, (même remarque que ci-dessus pour la notation C^X).

(3.2.1.) Si $\alpha : F' \to F$ est une flèche de $\mathcal{B}^X$, et $G : X \to \mathcal{C}$ est un relèvement de F, un relèvement $\beta : G' \to G$, $\in \mathcal{C}^X$, cartésien au-dessus de α, s'obtient en choisissant pour tout objet X de X une flèche β_X de but $G(X)$, cartésienne au-dessus de α_X. Il existe alors un unique foncteur $G' : X \to \mathcal{C}$ tel que $C \circ G' = F'$ et que les β_X définissent une transformation naturelle $\beta : G' \to G$.

(3.2.2.) Il en résulte que tout clivage (resp. scindage) Γ de C définit un clivage (resp. scindage) de $C^{\otimes X}$, noté $\Gamma^{\otimes X}$.

(3.2.3.) Pour X fixé, la correspondance $C \mapsto C^{\otimes X}$ définit un 2-foncteur $(\ )^{\otimes X} : Fib(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B}^X)$.

3.3. Composition des fibrations. Catégories fibrées sur une catégorie fibrée.

Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration. Pour tout foncteur $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, notons $\coprod_C f = D$ le foncteur composé $C \circ f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$. On définit ainsi un 2-foncteur

$$\coprod_C : Cat/\mathcal{C} \to Cat/\mathcal{B}.$$

(3.3.1.) Si f est une fibration, $D = \coprod_C f$ est une fibration. Une flèche ψ de $\mathcal{D}$ est cartésienne pour D ssi ψ est cartésienne pour f et $f(\psi)$ est cartésienne pour C. Il en résulte que si Γ et Φ sont des clivages (resp. scindages) de C et f, on obtient un clivage (resp. scindage) de D noté $\Delta = \coprod_\Gamma \Phi$. En outre le 2-foncteur $\coprod_C$ induit par restriction un 2-fonc-

teur, noté encore $\coprod_C$: Fib(C) → Fib(B). Enfin le foncteur f est cartésien, i.e. $f \in \mathrm{Cart}_B(D,C)$ et la correspondance $f \in \mathrm{Fib}(B) \mapsto f : \coprod_C f \to C$ définit un 2-foncteur : Fib(C) → Fib(B)/C que nous allons préciser.

(3.3.2.) Pour toute fibration $E : E \to B \in \mathrm{Fib}(B)$, le foncteur $\mathrm{Cart}_B(E,f) : \mathrm{Cart}_B(E,D) \to \mathrm{Cart}_B(E,C)$ est une fibration. En effet, si $\alpha : F' \to F \in \mathrm{Cart}_B(E,C)$ et $G : E \to D \in \mathrm{Cart}_B(E,D)$ est un relèvement de F, soit $\beta : G' \to G$ un relèvement cartésien de α; il résulte de (3.3.1.) que $G \in \mathrm{Cart}_B(E,D)$ et $\beta : G' \to G$ est une flèche de $\mathrm{Cart}_B(E,D)$, qui est cartésienne au-dessus de α.

(3.3.3.) (i) Pour tout $I \in B$, $f_I : D(I) \to C(I)$ est une fibration. En effet, notons F_I le foncteur d'inclusion $C(I) \hookrightarrow C$. Alors f_I s'identifie trivialement à la fibration $F_I^*(f)$. On prouve de même :

(ii) Soit $u : J \to I \in B$. Notons $u_C^* : C(I) \to C(J)$ et $u_D^* : D(I) \to D(J)$ des foncteurs image réciproque pour les fibrations C et D, rendant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D(I) & \xrightarrow[u_D^*]{} & D(J) \\ {\scriptstyle f_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_J} \\ C(I) & \xrightarrow[u_C^*]{} & C(J). \end{array}$$

Alors u_D^* est cartésien au-dessus de u_C^* (cf. 1.9.7.) (Il existe toujours de tels u_D^* et u_C^*. Prendre Γ et Φ clivages arbitraires de C et f et $\Delta = \coprod_\Gamma \Phi$ alors les u* associés à Δ et Γ ont la propriété voulue). Les propriétés (3.3.2.) et (3.3.3.) sont caractéristiques au sens suivant.

(3.3.4.) PROPOSITION : *Soient* $C : C \to B$ *et* $D : D \to B$ *des*

fibrations et $f : D \to C \in \mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(D,C)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur* $f : \mathcal{D} \to C$ *est une fibration.*

(ii) *Pour toute* $E \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, *le foncteur :*
$\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,f) : \mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,D) \to \mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,C)$ *est une fibration.*

(iii) a) *Pour tout* $I \in \mathcal{B}$, $f_I : D(I) \to C(I)$ *est une fibration.*
b) *Pour tout* $u : J \to I \in \mathcal{B}$, *et tout foncteur image inverse* $u_C^* : C(I) \to C(J)$ *il existe un foncteur image inverse* $u_D^* : D(I) \to D(J)$, *cartésien au-dessus de* u_C^*.

Preuve sommaire :
(i) $\Rightarrow$ (ii) a été vu.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte d'une application très précise du lemme de Yoneda. Cf. Exercice 17.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\varphi : X_1 \to X \in C$, et $Y \in \mathcal{D}$ tel que $f(Y) = X$. Notons $u : I_1 \to I \in \mathcal{B}$ l'image de φ par C. On factorise φ en : $X_1 \xrightarrow{\theta} X_1' \xrightarrow{\varphi_1} X$, où $\theta \in C(I_1)$ et φ_1 est cartésienne au-dessus de u. Soit $\psi_1 : Y_1' \to Y$, cartésienne au-dessus de u pour la fibration D. On a : $Y_1' \in D(I_1)$. Soit $\tau : Y_1 \to Y_1' \in D(I_1)$ cartésienne au-dessus de θ pour la fibration f_{I_1}. On vérifie, en utilisant b) que la flèche $\psi : Y \xrightarrow{\tau} Y_1' \xrightarrow{\psi_1} Y$ est cartésienne au-dessus de φ pour le foncteur f.

Quand $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ vérifie ces conditions, on dit que f est une *fibration sur* C, et on note $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(C)$. Soient $D' : \mathcal{D}' \to \mathcal{B} \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, et $f' : D' \to C \in \mathrm{Fib}(C)$. Si $g : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ est un foncteur cartésien au-dessus de $\mathcal{B}$, une preuve analogue donne :

(3.3.5.) PROPOSITION : *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) g est cartésien au-dessus de C, i.e.
$g : f' \to f \in \mathrm{Cart}_C(f',f)$.

(ii) Pour toute $E \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, le foncteur :
$\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,g) : \mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,D') \to \mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,D)$ est cartésien au-dessus de $\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}}(E,C)$.

(iii) a) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, le foncteur $g_I : D'(I) \to D(I)$ est cartésien au-dessus de $C(I)$.
b) Pour tout $u : J \to I \in \mathcal{B}$ et tous foncteurs images inverses $u_C^* : C(I) \to C(J)$, $u_D^* : D(I) \to D(J)$ rendant commutatifs les diagrammes :

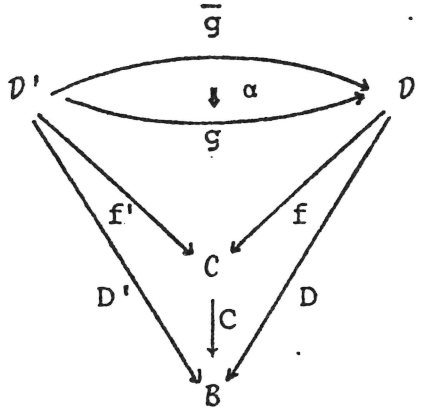
$$\begin{array}{ccc} D'(I) & \longrightarrow & D'(J) \\ {\scriptstyle f'_I}\downarrow & {\scriptstyle u_{D'}^*} & \downarrow{\scriptstyle f'_J} \\ C(I) & \xrightarrow[u_C^*]{} & C(J) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} D(I) & \longrightarrow & D(J) \\ {\scriptstyle f_I}\downarrow & {\scriptstyle u_D^*} & \downarrow{\scriptstyle f_J} \\ C(I) & \xrightarrow[u_C^*]{} & C(J), \end{array}$$

La propriété a) permet de définir une transformation naturelle "évidente" $\gamma : g_J \circ u_{D'}^* \to u_D^* \circ g_I$. On demande que γ soit un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} D'(I) & \longrightarrow & D'(J) \\ {\scriptstyle g_I}\downarrow & {\scriptstyle u_{D'}^*}\ \swarrow\gamma & \downarrow{\scriptstyle g_J} \\ D(I) & \xrightarrow[u_D^*]{} & D(J). \end{array}$$

Quand g vérifie ces conditions, on dit que g est un *foncteur cartésien au-dessus de* C, de f' vers f, et on note :
$g \in \mathrm{Cart}_C(f',f)$.

Pour les morphismes entre foncteurs cartésiens au-dessus de C la situation est plus simple. Soient g et $\bar{g} \in \mathrm{Cart}_C(f',f)$ et $\alpha : \bar{g} \Rightarrow g$ au-dessus de B. Voir diagramme ci-dessous :



Hypothèses :
$D = \coprod_C f$, $D' = \coprod_C f'$,
C, f et f' sont des fibrations,
$D*\alpha = id_{D'}$,
g et $\bar{g}$ sont cartésiens au-dessus de C.

(3.3.6.) PROPOSITION : *Avec les notations et hypothèses précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\alpha : \bar{g} \Rightarrow g$ est au-dessus de C, i.e. $f*\alpha = id_{f'}$.

(ii) Pour toute $E \in \mathrm{Fib}(B)$, $\mathrm{Cart}_B(E,\alpha) : \mathrm{Cart}_B(E,g) \Rightarrow \mathrm{Cart}_B(E,g)$ est au-dessus de $\mathrm{Cart}_B(E,C)$.

(iii) Pour tout $I \in B$, $\alpha_I : \bar{g}_I \Rightarrow g_I$ est au-dessus de C(I).

On dit alors que α *est au-dessus de* C et on note $\alpha : \bar{g} \Rightarrow g \in \mathrm{Cart}_C(f',f)$. Pour toute fibration $C : C \to B$, on obtient ainsi une sous-2-catégorie de Fib(B)/C, notée Fib(C) et appelée 2-catégorie des catégories fibrés sur C. Récapitulant en partie les trois propositions précédentes, on a :

(3.3.7.) THEOREME : *Le 2-foncteur* Fib(C) → Fib(B)/C *induit un isomorphisme de 2-catégories* :

$\mathrm{Fib}(C) \tilde{\to} \mathrm{Fib}(C) \subset \mathrm{Fib}(B)/C$.

(3.3.8.) Remarques :
(i) Insistons sur le fait que les objets, flèches et 2-cellules de Fib(C) sont des foncteurs et transformations naturelles *ordinaires*, munis des compositions ordinaires, *vérifiant des propriétés très simples* (cf. 3.3.6.), et pas des "catégories indexées de catégories indexées" qu'il serait d'ailleurs à peu près impossible de définir.

(ii) Le théorème (3.3.7.) n'est pas une tautologie. Voir dans l'Exercice 17 ce qu'il donne dans un cas très particulier.

(iii) L'isomorphisme de (3.3.7.) permet de transporter toutes les notions définies pour des fibrations, dans des notions définies pour des catégories fibrées sur B et fibrées au-dessus de $C \in \mathrm{Fib}(B)$. Par exemple de dire ce qu'est une catégorie fibrée sur C à fibres discrètes, ou ordonnées, ou des groupoïdes, ou constantes, etc ... (Voir Exercice 18, et aussi (3.4.)).

(iv) L'importance, pour $C \in \mathrm{Fib}(B)$, de considérer les fibrations sur C tient notamment au théorème (5.4.9.) ci-dessous, et au fait que quand $C : C \to B$ est une fibration, le foncteur de changement de base (1.9.), $C^* : \mathrm{Fib}(B) \to \mathrm{Fib}(C)$ a des propriétés très "agréables".

3.4. Fibrations X×C.

(3.4.1.) Soient $C : C \to B$ une fibration, et X une catégorie. La projection $\mathrm{pr}_2 : X \times C \to C$ est une fibration, donc le foncteur composé $C \circ \mathrm{pr}_2 : X \times C \to C \to B$ est une fibration notée X×C. Pour tout $I \in B$, on a : $(X \times C)(I) = X \times C(I)$ donc tout clivage (resp. scindage) Γ de C détermine un cli-

vage (resp. scindage) de $X\times C$, noté $X\times\Gamma$ et si ϕ est un pseudo-foncteur de B^{op} dans Cat, on a un isomorphisme de fibrations : $X\times\int_B\phi \simeq \int_B X\times\phi$.

(3.4.2.) Pour $X \in$ Cat et $C \in$ Fib(B) la correspondance $(X,C) \longmapsto X\times C$ détermine un 2-bifoncteur covariant : Cat $\times$ Fib(B) $\to$ Fib(B); et si $F : B' \to B$ et un foncteur on a un isomorphisme, naturel en X et C, de fibrations sur B' : $X\times F^*(C) \xrightarrow{\sim} F^*(X\times C)$.

(3.4.3.) D'après (3.3.) le foncteur pr_2 est cartésien au-dessus de B pour les fibrations $X\times C$ et C, et est même une fibration sur C. On dit que $pr_2 : X\times C \to C$ est la *fibration constante de fibre X et de base la fibration* C, et on la note $K_C(X)$.
Pour C fixée, la correspondance $X \longmapsto K_C(X)$ est un 2-foncteur de Cat dans Fib(C).

(3.4.4.) Dans le cas particulier où $C = 1_B$, on retrouve la fibration $K_B(X)$ constante de base B et de fibre X, et les notations sont cohérentes.

§ 4. OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES FIBRATIONS.

4.1. Produits.

Soit $(C_\alpha : C_\alpha \to B)$ une famille de fibrations, indexée par un ensemble A. D'après (3.1.) on a une fibration $\otimes_\alpha C_\alpha : \prod_\alpha C_\alpha \to B^A$. Notons $\Delta : B \to B^A$ le foncteur diagonal. Par changement de base $\Delta^*(\otimes_\alpha C_\alpha)$ est une fibration sur B, appelée *produit*, dans Fib(B), *des fibrations* C_α et notée $\prod_\alpha C_\alpha : \prod_\alpha C_{\alpha/B} \to B$.

(4.1.1.) Les projections $\prod_\alpha C_{\alpha/\mathcal{B}} \to C_\alpha$ sont des foncteurs cartésiens au-dessus de $\mathcal{B}$, donc définissent des flèches de $Fib(\mathcal{B})$ notées $pr_\alpha : \prod_\alpha C_\alpha \to C_\alpha$.

(4.1.2.) Pour toute $C \in Fib(\mathcal{B})$ on a un isomorphisme évident :

$$Cart_{\mathcal{B}}(C, \prod_\alpha C_\alpha) \xrightarrow{\sim} \prod_\alpha Cart_{\mathcal{B}}(C, C_\alpha).$$

(4.1.3.) Pour tout objet I de $\mathcal{B}$, on a un isomorphisme $(\prod_\alpha C_\alpha)(I) \xrightarrow{\sim} \prod_\alpha C_\alpha(I)$, ce qui permet immédiatement :

(i) d'associer à toute famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ de clivages (resp. scindages) des C_α un clivage (resp. scindage) de $\prod_\alpha C_\alpha$, noté $\prod_\alpha \Gamma_\alpha$.

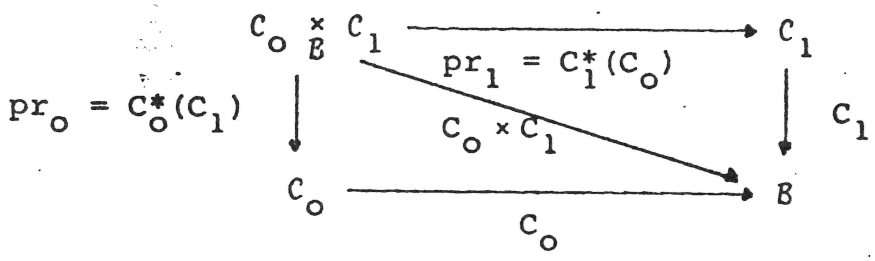
(ii) de définir le produit $\prod_\alpha \phi_\alpha$ d'une famille de pseudo-foncteurs de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat, et l'isomorphisme $\int_{\mathcal{B}} \prod_\alpha \phi_\alpha \xrightarrow{\sim} \prod_\alpha \int_{\mathcal{B}} \phi_\alpha$.

(iii) dans le cas $\mathcal{B} = Ens$ et $C_\alpha = Ens(X_\alpha)$, d'avoir un isomorphisme de fibrations sur Ens : $\prod_\alpha Ens(X_\alpha) \simeq Ens(\prod_\alpha X_\alpha)$.

(4.1.4.) Les isomorphismes de (4.1.2.) et (4.1.3.) sont compatibles avec les équivalences du lemme de Yoneda.

(4.1.5.) Si toutes les fibrations C_α sont égales à $C : C \to \mathcal{B}$, le produit $\prod_\alpha C$ est noté $C^A : C^A/\mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Le foncteur $C \to C^A/\mathcal{B}$ est cartésien au-dessus de $\mathcal{B}$, et définit donc une flèche de $Fib(\mathcal{B})$, dite *diagonale* : $C \to C^A$. (Voir l'Exercice 19).

(4.1.6.) Si $A = \{0,1\}$, le produit est noté $C_0 \times C_1 : C_0 \underset{\mathcal{B}}{\times} C_1 \to \mathcal{B}$. L'examen du diagramme commutatif ci-dessous :



montre que le foncteur pr_1 est une fibration, donc dans $Fib(B)$, la flèche $pr_1 : C_o \times C_1 \to C_1$ est une fibration au sens de (3.3.). l'objet $pr_1 \in Fib(C_1)$ est la *fibration constante* de base C_1 et de fibre C_o.

(4.1.7.) Remarque : Même quand C_o n'est pas une fibration constante, pr_1 se comporte "au sens de $Fib(C_1)$" comme une fibration constante. Par contre, ceci n'a plus aucun sens si on remplace $Fib(C_1)$ par $Fib(C_1)$ qui lui est pourtant canoniquement isomorphe. Ceci tient au fait que le passage à $Fib(C_1)$ fait "oublier" que C_1 était fibrée sur B.

(4.1.8.) Si $C : C \to B$ est une fibration, et X une catégorie on a un isomorphisme de fibrations : $K_B(X) \times C \simeq X \times C$ et toutes les notations sont cohérentes.

4.2. Sommes.

Soit $(C_\alpha : C_\alpha \to B)_{\alpha \in A}$ une famille de fibrations. On identifie l'ensemble A à une catégorie discrète, donc $\coprod_{\alpha \in A} B$ à $A \times B$. Les foncteurs $\otimes_\alpha C_\alpha : \coprod_\alpha C_\alpha \to A \times B$ et $pr_2 : A \times B \to B$ sont des fibrations, donc leur composé est une fibration, notée $\coprod_\alpha C_\alpha : \coprod_\alpha C_\alpha \to B$ et appelée *somme des* C_α, dans $Fib(B)$.

(4.2.1.) Les injections définissent des flèches $\gamma_\alpha : C_\alpha \to \coprod_\alpha C_\alpha$ de $Fib(B)$.

(4.2.2.) Pour $C \in Fib(B)$, on a : $Cart(\coprod_\alpha C_\alpha, C) \simeq \prod_\alpha Cart(C_\alpha, C)$.

(4.2.3.) Pour $I \in \mathcal{B}$, on a : $(\coprod_\alpha C_\alpha)(I) \simeq \coprod_\alpha C_\alpha(I)$ d'où on déduit des conséquences analogues à (4.1.3.) (i) à (iii).

(4.2.4.) Les j_α sont injectifs, pleinement fidèles et identifient les C_α à des sous-fibrations de $\coprod_\alpha C_\alpha$ qui sont à la fois des cribles et des co-cribles. Par cette identification, $C_\alpha \cap C_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$.

(4.2.5.) Si toutes les C_α sont égales à C, on a dans $Fib(\mathcal{B})$ un isomorphisme : $\coprod_\alpha C \xrightarrow{\sim} A \times C$ (notation de (3.4.), pour A discrète) et un morphisme *co-diagonal* $\coprod_\alpha C \to C$, correspondant à $pr_2 : A \times C \to C$ par l'isomorphisme ci-dessus, donc qui est une fibration constante.

4.3. Fibrations C^X.

Soient $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration et X une catégorie. D'après (3.2.) on a une fibration $C^{\otimes X} : \mathcal{C}^X \to \mathcal{B}^X$. Notons δ_X ou même δ le foncteur diagonal $\mathcal{B} \to \mathcal{B}^X$. Par changement de base, $\delta^*(C^{\otimes X})$ est une fibration sur $\mathcal{B}$, notée $C^X : \mathcal{C}^X/\mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

(4.3.1.) Pour X discrète, on retrouve $\coprod_\alpha C$ et les notations sont compatibles avec celles de (4.1.5.).

(4.3.2.) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a un isomorphisme canonique entre la fibre $C^X(I)$ et la catégorie $C(I)^X$, d'où évidemment :

(i) Tout clivage (resp. scindage) Γ de C définit un clivage (resp. scindage) de C^X noté Γ^X.

(ii) Si ϕ est un pseudo-foncteur de $\mathcal{B}^{op}$ dans Cat, on a un pseudo-foncteur ϕ^X et un isomorphisme $\int_{\mathcal{B}} \phi^X \xrightarrow{\sim} (\int_{\mathcal{B}} \phi)^X$.

(4.3.3.) La correspondance qui à $C \in Fib(\mathcal{B})$ et $X \in Cat$ associe C^X est un 2-bifoncteur : $Cat \times Fib(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B})$,

contravariant en X et covariant en C. Explicitions partiellement les notations : si $f : C \to D \in \mathrm{Fib}(B)$, on note $f^X : C^X \to D^X \in \mathrm{Fib}(B)$. Si $g : Y \to X \in \mathrm{Cat}$, on note $C^g : C^X \to C^Y \in \mathrm{Fib}(B)$.

(4.3.4.) On a un isomorphisme trivial $C \xrightarrow{\sim} C^1$ dans $\mathrm{Fib}(B)$. Notons $\varepsilon_X : X \to 1$ l'unique foncteur. On appelle *foncteur diagonal* et on note $\delta_X(C)$, ou même δ le composé :

$$C \xrightarrow{\sim} C^1 \xrightarrow{C^{\varepsilon_X}} C^X \in \mathrm{Cart}_B(C, C^X).$$

(4.3.5.) On appelle *évaluation* et on note $\mathrm{ev}_X(C)$, ou même ev la flèche $X \times C^X \to C$ de $\mathrm{Fib}(B)$, définie pour tout $I \in B$ par $\mathrm{ev}_I(X,f) = f(X)$ $(X \in X$ et $f \in C(I)^X \simeq C^X(I))$.

(4.3.6.) THEOREME : *Si* $C : C \to B$ *et* $D : \mathcal{D} \to B$ *sont des fibrations, et* X *une catégorie, on a des isomorphismes canoniques, naturels pour* C *et* $D \in \mathrm{Fib}(B)$ *et* $X \in \mathrm{Cat}$:

$$\mathrm{Cart}(D, C^X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cart}(X \times D, C) \xrightarrow{\sim} [\mathrm{Cart}(D,C)]^X.$$

Preuve : Dans Cat, on a les isomorphismes évidents.

$$(C^X)^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} C^{X \times \mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} (C^{\mathcal{D}})^X.$$

Chacune des catégories du théorème s'identifie canoniquement à une sous-catégorie de la catégorie correspondante dans Cat. En explicitant les définitions, on a en effet :

(i) $C^X : C^X/B \to B$, et $C^X/B \hookrightarrow C^X$, d'où $\mathrm{Cart}(D, C^X) \hookrightarrow (C^X)^{\mathcal{D}}$.

(ii) $X \times D : X \times \mathcal{D} \to B$, d'où $\mathrm{Cart}(X \times D, C) \hookrightarrow C^{X \times \mathcal{D}}$.

(iii) $\mathrm{Cart}(D,C) \subset C^{\mathcal{D}}$, d'où $[\mathrm{Cart}(D,C)]^X \hookrightarrow (C^{\mathcal{D}})^X$.

On vérifie immédiatement que les isomorphismes dans Cat se restreignent bien aux sous-catégories désirées.

(4.3.7.) Comme il se doit, le premier isomorphisme du théorème, qui exprime que le 2-foncteur $X\times(\ ) : Fib(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B})$; $C \mapsto X\times C$ est adjoint à gauche, *au sens strict*, du 2-foncteur $(\ )^X : Fib(\mathcal{B}) \to Fib(\mathcal{B})$; $C \mapsto C^X$, s'exprime au moyen de l'évaluation : il associe à $f : D \to C^X \in Cart(D,C^X)$ le composé : $X\times D \xrightarrow{X\times f} X\times C^X \xrightarrow{ev} C \in Cart(X\times D, C)$.

(4.3.8.) "Corollaire" : Tous les isomorphismes canoniques dans Cat "se fibrent" en un sens évident. Citons par exemple :

$$(\prod_\alpha C_\alpha)^X \simeq \prod_\alpha (C_\alpha^X),\quad C^{(\coprod_\alpha X_\alpha)} \simeq \prod_\alpha C^{X_\alpha},\quad C^0 \simeq 1 \simeq 1^X,$$

où les C_α et $C \in Fib(\mathcal{B})$ et les X_α et $X \in Cat$.
Beaucoup plus intéressants sont par contre les deux corollaires suivants :

(4.3.9.) Corollaire : Soient X une catégorie, C et $D \in Fib(\mathcal{B})$, et $f : D \to C$ une fibration dans $Fib(\mathcal{B})$ (i.e. $f \in Fib(C)$). Alors $f^X : D^X \to C^X$ est une fibration dans $Fib(\mathcal{B})$.

Preuve : D'après (3.3.4.), il suffit de voir que pour toute $E \in Fib(\mathcal{B})$ $Cart(E,f^X) : Cart(E,D^X) \to Cart(E,C^X)$ est une fibration ou encore que $Cart(E,D)^X \to Cart(E,C)^X$ est une fibration, ce qui est évident par (3.3.4.) et le relèvement des homotopies.

(4.3.10.) Corollaire : Soient $g : Y \to X$ un foncteur, et $C \in Fib(\mathcal{B})$. Si g est une fibration, $g\times C : Y\times C \to X\times C$ est une

fibration dans Fib(B).

(4.3.11.) Remarques :

(i) Le théorème (4.3.6.) et ses conséquences seront complétés au Chapitre III. Sa démonstration est très facile. Il serait par contre horriblement compliqué à prouver en termes de pseudo-foncteurs. Le plus long serait de définir avec précision les catégories du type $Cart_B(D,C)$ quand $D = \int_B \Psi$ et $C = \int_B \Phi$, en *termes de* Ψ *et* Φ, mais de façon que la *définition ne dépende pas de* Ψ *et* Φ. (Définir une application linéaire en termes de bases d'espaces vectoriels, quand on ne veut pas savoir ce qu'est un espace vectoriel!).

(ii) La chose devient *impossible* dans le cadre des "catégories indexées" où les "foncteurs indexés" sont définis *à des isomorphismes canoniques près* (et *mal définis* de surcroît, cf. Exercices 12 et 19). N'oublions pas que (4.3.5.) donne des *isomorphismes* de catégories et non des *équivalences*.

(iii) Quant à la fonctorialité de ces isomorphismes ... Essayer de dire que l'application $(E,F) \mapsto L(E,F)$ est un bi-foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même, uniquement en termes de bases.

(iv) Les corollaires eux mettraient en jeu la notion de pseudo-foncteur fibré sur un pseudo-foncteur, sans parler des prétendus isomorphismes canoniques.

(v) Les fibrations et leurs morphismes sont de vrais foncteurs et transformations naturelles, donc très maniables. Ils vérifient en outre des *propriétés très fortes*, ce qui est un *avantage et non un handicap*. Par exemple : si $f : Y \to X$ est une fibration, le foncteur de changement de

base f^* : $Cat/X \to Cat/Y$ a un adjoint à droite $\prod_f$ [Gi. II. (4.2.) et (4.3.)].
Il est donc aberrant de remplacer les fibrations par des notions très compliquées comme les pseudo-foncteurs, ou encore plus compliquées, et mal définies, comme les catégories indexées. D'autant qu'il est très facile, si on le désire, de garder en mémoire les différents clivages ou scindages que l'on peut rencontrer (de même qu'on peut le faire en algèbre linéaire pour certaines bases privilégiées), l'essentiel étant bien entendu les fibrations.

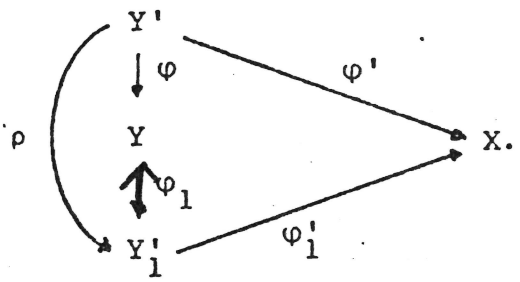
(vi) La dualité dans Cat peut être utilisée complètement avec les fibrations, mais pas avec les autres notions. (Voir notamment Exercice 20).

4.4. Duale d'une catégorie fibrée.

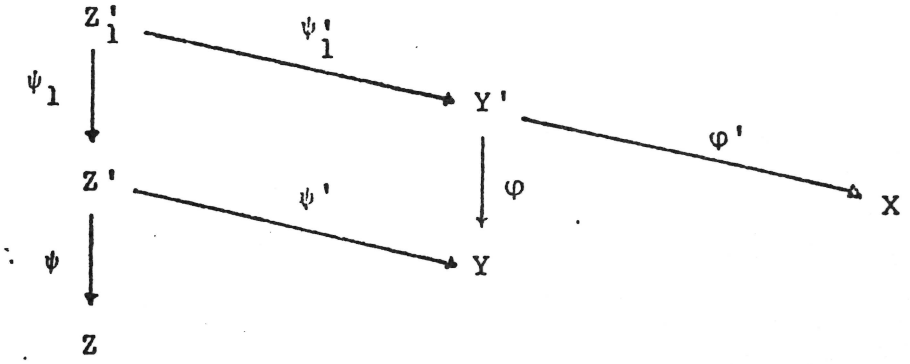
Soit X une catégorie, et X^{op} la duale de X. La bonne notion de duale de la fibration $Ens(X) \to Ens$ doit être la fibration : $Ens(X^{op}) \to Ens$. Or il est clair que $Ens(X^{op})$ est très différente de $[Ens(X)]^{op}$, laquelle n'est même pas fibrée sur Ens en général. Donc si $C : C \to B$ est une fibration, pour définir sa duale dans $Fib(B)$ il ne faudra pas passer par C^{op}.
Cependant pour tout ensemble I on a $(X^{op})^I \simeq (X^I)^{op}$, donc les fibrations $Ens(X)$ et $Ens(X^{op})$ sont duales "fibre à fibre". Ceci suggère de décrire la duale de $C \in Fib(B)$ à partir d'un pseudo-foncteur ϕ de B^{op} dans Cat tel que $C = \int_B \phi$, en notant ϕ^{op} le composé de ϕ avec le foncteur de dualisation $(\ )^{op} : Cat \to Cat$ et en posant $C^{op} = \int_B \phi^{op}$.
Outre le fait que cette définition fait dépendre C^{op} d'un clivage de C, elle pose un petit problème de "variance" car le 2-foncteur $(\ )^{op}$ est covariant pour les flèches de Cat, et contravariant pour les 2-cellules. (Pour les 2-catégories il y a 3 sortes de "duales". Nous allons don-

ner une définition intrinsèque évitant ces ennuis. Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration.

(4.4.1.) On note $\mathcal{C}^{op}/\mathcal{B}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$, et où une flèche de Y vers X est une classe d'équivalence de couples (φ', φ) où $\varphi' : Y' \to X \in \mathcal{C}$ est cartésienne, et $\varphi : Y' \to Y \in \mathcal{C}$ est verticale. Un couple (φ'_1, φ_1) étant équivalent à (φ', φ) s'il existe $\rho : Y' \to Y'_1$ verticale rendant commutatif le diagramme ci-dessous :



La flèche ρ est alors unique et est un isomorphisme, ce qui prouve qu'on a bien une équivalence. La classe d'équivalence de (φ', φ) sera notée $\varphi' \circ \varphi^*$.
La composition est donnée par : $(\varphi' \circ \varphi^*) \circ (\psi' \circ \psi^*) = (\varphi' \psi'_1) \circ (\psi \psi_1)^*$, avec ψ_1 verticale et ψ'_1 cartésienne, rendant commutatif :



Un tel couple (ψ_1, ψ'_1) existe toujours : si on choisit ψ'_1 cartésienne arbitraire ayant même image que ψ' par C, alors ψ_1 existe et est unique. On vérifie trivialement que la

composition est indépendante des choix faits, et qu'on a bien une catégorie.

(4.4.2.) Si (φ',φ) et (φ'_1,φ_1) sont équivalentes, φ et φ_1 ont même image par C, d'où un foncteur, noté $C^{op} : C^{op}/\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ coïncidant avec C sur les objets.

(4.4.3.) Une flèche $\varphi' \circ \varphi^*$ est cartésienne pour C^{op} ssi φ est un isomorphisme de C. Il en résulte que :

(i) C^{op} est une fibration.

(ii) Tout clivage (resp. scindage) Γ de C définit un clivage (resp. scindage) Γ^{op} de C^{op}. Si $\varphi : Y \to X \in \Gamma$, la flèche $\varphi \circ id_Y^*$ est dans Γ^{op}.

(4.4.4.) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la correspondance $X \longmapsto X$, $\varphi \longmapsto id \circ \varphi^*$ définit un isomorphisme de $C(I)^{op}$ sur $C^{op}(I)$. L'isomorphisme réciproque associe à la classe de (φ',φ) la flèche $\varphi\varphi'^{-1}$. (La flèche φ' est ici verticale et cartésienne, donc inversible).

(4.4.5.) Si $f : C \to D \in \mathrm{Cart}(C,D)$, on définit $f^{op} : C^{op} \to D^{op} \in \mathrm{Cart}(C^{op},D^{op})$ par $f^{op}(X) = f(X)$ et $f^{op}(\varphi',\varphi^*) = f(\varphi'),f(\varphi)^*$.

(4.4.6.) Si $\alpha : f \Rightarrow f' \in \mathrm{Cart}(C,D)$ on définit $\alpha^{op} : f'^{op} \Rightarrow f^{op} \in \mathrm{Cart}(C^{op},D^{op})$ par $\alpha^{op}_X = (\alpha_X)^*$. On définit ainsi un isomorphisme : $\mathrm{Cart}(C,D)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cart}(C^{op},D^{op})$.

(4.4.7.) On a un *isomorphisme* canonique, naturel en $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, $C \xrightarrow{\sim} (C^{op})^{op}$ défini comme suit : Si $\varphi : Y \to X \in C$ on écrit φ comme : $Y \xrightarrow{\psi} X_1 \xrightarrow{\varphi'} X$ où ψ est

verticale et φ' cartésienne, et on associe à φ la flèche $\varphi'.(\psi^*)^*$. On laisse en exercice la définition de l'isomorphisme réciproque. Voir l'Exercice 20 pour une définition 2-catégorique de C^{op}.

(4.4.8.) Toutes les propriétés de la dualité dans Cat sont encore vraies dans Fib(B) et se démontrent formellement à partir des isomorphismes de (4.4.6.) et (4.4.7.). On a notamment des isomorphismes naturels :

(i) $$(\prod_\alpha C_\alpha)^{op} \xrightarrow{\sim} \prod_\alpha C_\alpha^{op} \quad ; \quad \coprod_\alpha C_\alpha^{op} \xrightarrow{\sim} (\prod_\alpha C_\alpha)^{op}.$$

(ii) $$(X\times C)^{op} \xrightarrow{\sim} X^{op} \times C^{op} \quad ; \quad (C^X)^{op} \xrightarrow{\sim} (C^{op})^{X^{op}}.$$

En outre, si $F : B' \to B$, on a un isomorphisme naturel :

(iii) $$(F^*(C))^{op} \xrightarrow{\sim} F^*(C^{op}).$$

(4.4.9.) Toutes les notions et définitions qui dans Cat utilisent la dualité se prolongent à Fib(B). Citons un exemple important.
Une flèche $f : C \to D$ de Fib(B) est une *cofibration* ssi $f^{op} : C^{op} \to D^{op}$ est une fibration.
Noter que c'est un objet assez compliqué, car $C : C \to B$ et $D : \mathcal{D} \to B$ sont des fibrations, $f : C \to \mathcal{D}$ est cartésien au-dessus de B, et pour tout $I \in B$, $f_I : C(I) \to D(I)$ est une cofibration, et on a encore une propriété pour les u^* (dualé de (3.3.3.) (ii)).
Ces propriétés seraient très lourdes à exprimer en termes de pseudo-foncteurs, et encore plus si l'on introduisait les "isomorphismes canoniques" des catégories indexées.
La définition (4.4.9.) et les propriétés de $C \mapsto C^{op}$ en font des objets maniables, qui jouent d'ailleurs un rôle important.

Par exemple, la projection : $D\times C \to D$ est une bifibration, ou encore, en dualisant (5.4.12.) ci-dessous, toute $f : C \to D \in Fib(\mathcal{B})$ où D est une fibration discrète, est une bifibration de $Fib(\mathcal{B})$.

4.5. Remarque.

Toutes les opérations sur les fibrations introduites dans ce paragraphe se font essentiellement fibre à fibre. (Ce qui justifie le nom d'"élémentaires"). Il en résulte qu'elles sont préservées par changement de base : $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, i.e. qu'on a des isomorphismes naturels :

(i) $\quad F^*(\prod_\alpha C_\alpha) \simeq \prod_\alpha F^*(C_\alpha) \qquad \coprod_\alpha F^*(C_\alpha) \simeq F^*(\coprod_\alpha C_\alpha)$

(ii) $\quad F^*(X\times C) \simeq X\times F^*(C) \qquad F^*(C^X) \simeq F^*(C)^X.$

Ce ne sera plus vrai pour les "opérations" $C \longmapsto Fam(C)$ (cf. § 6), ni même, en général pour les produits fibrés dans $Fib(\mathcal{B})$ (cf. § 5).

§ 5. PRODUITS FIBRES DANS $Fib(\mathcal{B})$.

5.1. Introduction.

Jusqu'ici, pour toute catégorie $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $Fib(\mathcal{B})$ a les mêmes propriétés formelles que $Cat \simeq Fib(1)$. Pour les produits fibrés par contre, il apparaît des différences très importantes.

(i) En général, $Fib(\mathcal{B})$ n'a pas de produits fibrés, au sens strict.

(ii) Certains produits fibrés qui existent peuvent être "mauvais", i.e. pas absolus, ni même universels au sens de (5.1.4.).
L'introduction "d'isomorphismes canoniques" peut embrouiller ou maquiller ces faits, elle ne peut pas les changer. Elle masque par contre des faits essentiels.

(iii) Les produits fibrés absolus existent dans des cas particuliers importants.

(iv) Fib(B) a des 2-produits fibrés.

(5.1.1.) On note Cat/B la 2-catégorie des catégories au-dessus de B, et $j : Fib(B) \hookrightarrow Cat/B$ l'inclusion canonique. Les catégories déduites de Cat/B et Fib(B) par oubli des 2-cellules sont notées Cat_1/B et $Fib_1(B)$. Si $C, D, C_1, \ldots$ sont des objets de Cat/B, on note $C, \mathcal{D}, C_1, \ldots$ les sources des foncteurs $C, D, C_1 \ldots$.

(5.1.2.) On dit que le diagramme (Δ) ci-dessous de Fib(B) est un produit fibré (strict) ssi c'est un produit fibré dans $Fib_1(B)$.

$$(\Delta) : \quad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_1} & D \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C_1 & \xrightarrow{f} & C. \end{array}$$

L'existence et les propriétés formelles des fibrations $X \times E$, impliquent que (Δ) est un produit fibré ssi pour toute $E \in Fib(B)$ le diagramme $Cart(E, \Delta)$ ci-dessous est un produit fibré de catégories.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cart}(E,D_1) & \longrightarrow & \mathrm{Cart}(E,D) \\ {\scriptstyle \mathrm{Cart}(E,\Delta)\ \mathrm{Cart}(E,g_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cart}(E,g)} \\ \mathrm{Cart}(E,C_1) & \longrightarrow & \mathrm{Cart}(E,C) \end{array}$$

$\mathrm{Cart}(E,f_1)$; $\mathrm{Cart}(E,f)$

(Il suffit de "tester" (Δ) par les objets ~~$2\times E$ et $3\times E$~~ $2\times\mathcal{B}$, $3\times\mathcal{B}$ de $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$).

(5.1.3.) La propriété pour (Δ) d'être un produit fibré, n'exclut pas de nombreuses pathologies :

(i) Elle n'est pas stable par changement de base, i.e. si $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ est un foncteur, $F^*(\Delta)$ n'est pas un produit fibré dans $\mathcal{B}'$.

(ii) C'est faux même pour $\mathcal{B}' = 1$, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D_1(I) & \xrightarrow[f_{1I}]{} & D(I) \\ {\scriptstyle g_{1I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_I} \\ C_1(I) & \xrightarrow[f_I]{} & C(I) \end{array} \qquad (\Delta_I)$$

(I objet de $\mathcal{B}$)

n'est pas forcément un produit fibré de catégories.

(iii) Elle n'implique pas non plus que le diagramme (Δ) ci-dessous soit un produit fibré de catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \xrightarrow[f_1]{} & \mathcal{D} \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{C}. \end{array} \qquad (\Delta)$$

Un contre-exemple est donné dans (5.2.).

(5.1.4.) Un diagramme (Δ) de $Fib(\mathcal{B})$ est appelé :

(i) *produit fibré universel* si, pour tout $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, $F^*(\Delta)$ est un produit fibré. C'est donc en particulier un produit fibré dans $Fib(\mathcal{B})$;

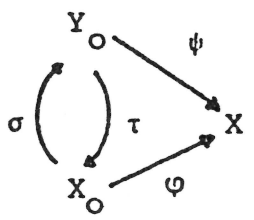
(ii) *produit fibré absolu* si (Δ) est un produit fibré dans Cat.

(5.1.5.) Une flèche $f : C_1 \to C$ de $Fib(\mathcal{B})$ est dite *quarrable* ssi pour tout $g : D \to C \in Fib(\mathcal{B})$ il existe un produit fibré (Δ). Si en outre (Δ) est universel (resp. absolu) on dit que f est *universellement* (resp. *absolument*) *quarrable*.

(5.1.6.) Tout ce qui a été dit dans (5.1.2.) et (5.1.4.) se transpose clairement pour les noyaux dans $Fib(\mathcal{B})$. On pourra donc parler de noyaux (stricts), noyaux universels et noyaux absolus. D'ailleurs $Fib(\mathcal{B})$ est à objet final et produits finis (stricts), les foncteurs changement de base F^* et inclusion $Fib(\mathcal{B}) \hookrightarrow Cat/\mathcal{B}$ préservent l'objet final et les produits finis, donc toutes les notions relatives aux noyaux ou aux produits fibrés sont équivalentes.

5.2. Le contre-exemple générique.

Notons $u : 0 \to 1$ l'unique flèche non triviale de $\mathbb{2}$, et $\mathcal{C}$ la catégorie définie par le diagramme :



avec $\begin{cases} \sigma\tau = id_{Y_o} & \tau\sigma = id_{X_o} \\ \varphi\tau = \psi & \psi\sigma = \varphi. \end{cases}$

L'unique foncteur $C : C \to 2$ tel que $C(\varphi) = C(\psi) = u$ est une fibration, i.e. un objet de Fib(2). Soient $f : 2 \to C$ et $g : 2 \to C$ les foncteurs définis par $f(u) = \varphi$ et $g(u) = \psi$. Ils sont cartésiens au-dessus de 2, et définissent donc des flèches $f : 1 \to C$ et $g : 1 \to C$ de Fib(2).

(5.2.1.) Le diagramme (Δ) ci-dessous est un produit fibré dans Fib(2).

$$(\Delta) \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 1 & \xrightarrow[f]{} & C . \end{array}$$

Preuve : Si $E \in$ Fib(2) et $f' : E \to \not{B}$, $g' : E \to \not{B}$ sont des flèches de Fib(B) telles que $gf' = fg'$ on a : $g_o f'_o = f_o g'_o$ donc $E_o = 0$, et comme E est une fibration, $E_1 = 0$ donc $E = 0$.
Ceci justifie (5.1.3.) (i), (ii) et (iii), mais en outre on voit que

(i) C est une bifibration, ayant un co-scindage unique, et deux scindages Γ_φ et Γ_ψ définis par φ et ψ.

(ii) 1 est une bifibration ayant un unique scindage et co-scindage.

(iii) $f : 1 \to C$ est cartésien et cocartésien, et est une équivalence de bifibrations respectant les co-scindages et les scindages (si on prend sur C le scindage Γ_φ).

(5.2.2.) Malgré toutes ces propriétés de f, le produit fibré (Δ) n'est ni absolu, ni universel et ne vérifie même pas : (Δ_1) est un produit fibré. Donc f n'est ni ab-

solument ni universellement quarrable. Il est clair que de tels produits fibrés ne seront pas très utiles, d'où l'intérêt attaché dans la suite à montrer l'existence de "beaucoup" de produits fibrés absolus.

(5.2.3.) L'universalité de cet exemple signifie que : pour toute fibration $C' : \mathcal{C}' \to \mathcal{B}'$ telle qu'il existe deux flèches φ' et ψ' de $\mathcal{C}'$ cartésiennes de même but et de même projection, il existe deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}'$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ uniques tels que : G est cartésien au-dessus de F, et $G(\varphi) = \varphi'$ et $G(\psi) = \psi'$. Noter que seules les fibrations C' ordonnées ne font pas apparaître de tels couples (φ', ψ').

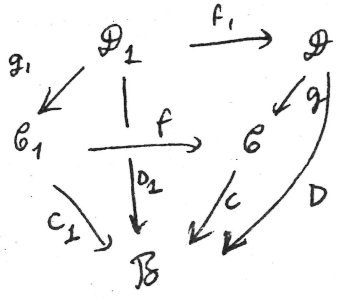
5.3. Produits fibrés absolus.

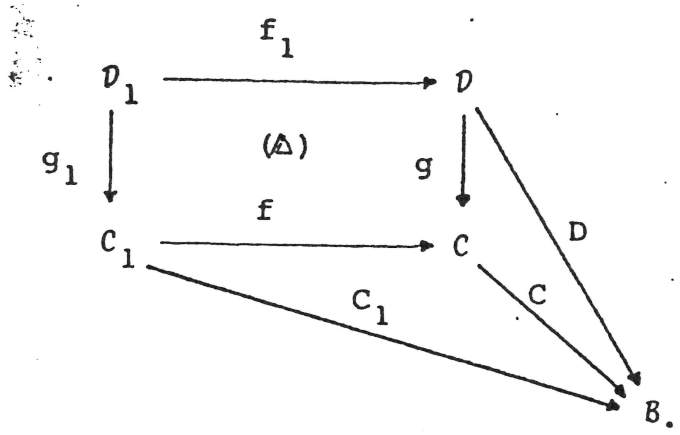
Soient $f : C_1 \to C$ et $g : D \to C$ deux flèches de $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. Comme on aura à faire quelques "chasses au diagramme cartésiennes", les notations suivantes seront utilisées systématiquement.
Le produit fibré de f et g dans $\mathrm{Cat}/\mathcal{B}$ sera noté (Δ) :

$$(\Delta) = \quad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_1} & D \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C_1 & \xrightarrow[f]{} & C. \end{array}$$

On notera $(\Delta/\mathcal{B})$ le diagramme commutatif dans Cat représentant (Δ), dans lequel le carré (Δ) est un produit fibré, et $D_1 = C_1 g_1 = D f_1$.

$\Delta/\mathcal{B}$:





Si $\psi_1 = \overline{Y}_1 \to Y_1$ est une flèche de $\mathcal{D}_1$, on notera :

$D_1(\psi_1) = u : \overline{I} \to I \in \mathcal{B}$, $f_1(\psi_1) = \psi : \overline{Y} \to Y \in \mathcal{D}$,

$g_1(\psi_1) = \varphi_1 : \overline{X}_1 \to X_1 \in \mathcal{C}_1$ et $f(\varphi_1) = g(\psi) = \varphi : \overline{X} \to X \in \mathcal{C}$.

En général D_1 ne sera pas une fibration, ou bien, même si $D_1 \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, l'un des foncteurs f_1 ou g_1 ne sera pas cartésien au-dessus de $\mathcal{B}$. Donc (Δ) ne sera pas un diagramme dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

(5.3.1.) LEMME : *Si φ_1 et ψ sont hypercartésiennes (exercice 1) au-dessus de* u, *il en est de même de ψ_1.*

Preuve : Soient $\psi_1' : \overline{Y}_1' \to Y_1 \in \mathcal{D}_1$ et $u'' : \overline{I}' \to \overline{I} \in \mathcal{B}$ telles que $uu'' = u'$. Comme φ_1 (resp. ψ) est cartésienne, il existe une unique factorisation :

$g_1(\psi_1') = \varphi_1' : \overline{X}_1' \xrightarrow[\varphi_1'']{} \overline{X}_1 \xrightarrow[\varphi_1]{} X_1$ (resp. $f_1(\psi_1') =$

$\psi' : \overline{Y}' \xrightarrow[\psi'']{} \overline{Y} \to Y$) telle que $C_1(\varphi_1'') = u''$ (resp. $D(\psi'') = u''$).

On a alors $\varphi \circ f(\varphi_1'') = \varphi \circ g(\psi'')$ avec φ cartésienne et $f(\varphi'')$, $g(\psi'')$ au-dessus de la même flèche u"; donc $f(\varphi_1'') = g(\psi'')$, d'où l'existence d'une unique flèche $\psi_1'' : \overline{Y}_1' \to \overline{Y}_1$ de $\mathcal{D}_1$, telle que $g_1(\psi_1'') = \varphi_1''$ et $f_1(\psi_1'') = \psi''$. Cette flèche ψ_1'' est au-dessus de u" et vérifie $\psi_1' = \psi_1 \psi_1''$.

L'unicité de ψ_1'' au-dessus de u" et telle que $\psi_1' = \psi_1 \psi_1''$ ré-

sulte d'une autre petite chasse au diagramme, laissée en exercice.

(5.3.2.) Corollaire : Si (Δ) est un diagramme dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, c'est un produit fibré dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.
En effet, si $f' : E \to D$ et $g' : E \to C_1$ sont des flèches de $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ telle que $gf' = fg'$, elles se factorisent, dans $\mathrm{Cat}/\mathcal{B}$, par un unique $h : E \to D_1$. Reste à voir que h est cartésien au-dessus de $\mathcal{B}$. Mais si θ est une flèche cartésienne de $\mathcal{E}$, la flèche $\psi_1 = h(\theta)$ vérifie les conditions du lemme.

Dans la définition de produit fibré absolu, on n'avait pas supposé que (Δ) était un produit fibré dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. La définition a un sens car :

(5.3.3.) PROPOSITION : *Soit* (Δ) *un produit fibré absolu. Alors,*

(i) (Δ) *est un produit fibré dans* $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$;

(ii) (Δ) *est universel;*

(iii) *Si* g *est une fibration de* $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, *i.e.* $g \in \mathrm{Fib}(C)$ *alors* $g_1 \in \mathrm{Fib}(C_1)$.

Preuve : (i) est une reformulation du corollaire. (ii) résulte du fait que si $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ est un foncteur, $F^* : \mathrm{Cat}/\mathcal{B} \to \mathrm{Cat}/\mathcal{B}'$ préserve les produits fibrés. (iii) résulte de l'isomorphisme : $\mathrm{Fib}(C) \simeq \mathrm{Fib}(C)$, et du fait que le 2-foncteur $f^* : \mathrm{Cat}/C \to \mathrm{Cat}/C_1$ induit par restriction un 2-foncteur : $\mathrm{Fib}(C) \to \mathrm{Fib}(C_1)$.

(5.3.4.) Remarques :
(i) Bien que les produits fibrés absolus aient de très bon-

nes propriétés, ils ne sont pas "suffisamment fonctoriels" : il peut se faire "par hasard" que f et g aient un produit fibré absolu sans que f ni g soient absolument quarrables. Par contre si f est absolument quarrable, elle définit un 2-foncteur $f^* : Fib(\mathcal{B})/C \to Fib(\mathcal{B})/C_1$, ayant de bonnes propriétés et transformant notamment toute fibration en fibration.

(ii) On a rencontré des exemples de flèches absolument quarrables : ainsi si $f : C_1 \hookrightarrow C$ est l'inclusion d'une sous)fibration, elle est absolument quarrable. Donc si $g : D \to C$ est une fibration, il en est de même de sa "restriction" $g_1 : D_1 = g^{-1}(C_1) \to C_1$.

(iii) Je ne connais pas de bonne caractérisation des flèches absolument quarrables. (Cela semble pour des problèmes de cohérence non triviaux). Des conditions suffisantes, simples et maniables, pour que f soit absolument quarrable et des applications importantes sont données dans les sections qui suivent.

(iv) En utilisant *soigneusement* les propriétés de la dualité $C \mapsto C^{op}$ beaucoup des résultats qui suivent se dualisent, *de plusieurs façons*. Seules les formes les plus *utiles* de ces dualités seront explicitées, *sans démonstration*.

5.4. Foncteurs transportables.

(5.4.1.) Rappelons qu'un foncteur $f : X_1 \to X$ est transportable si pour tout $X_1 \in X_1$ et tout isomorphisme $\sigma : \overline{X} \to f(X_1) \in X$, il existe un isomorphisme $\sigma_1 : \overline{X}_1 \to X_1 \in X_1$ tel que $f(\sigma_1) = \sigma$.
Cette notion se réduit à celle de fibration : Notons $Inv(X)$ la sous-catégorie de X ayant les mêmes objets, et pour flèches les isomorphismes, et $j : Inv(X) \hookrightarrow X$ l'inclu-

sion. On a les conditions équivalentes :

(i) f est transportable.

(ii) $Inv(f) : Inv(X_1) \to Inv(X)$ est une fibration.

(iii) $j^*(f) : f^{-1}(Inv(X)) \to Inv(X)$ est une fibration.

On peut rajouter à ces conditions :

(iv) Pour toute catégorie Y, le foncteur $f^Y : X_1^Y \to X^Y$ est transportable.

(v) Pour toute catégorie Y, le foncteur $Y \times f : Y \times X_1 \to Y \times X$ est transportable.

(5.4.2.) La notion de foncteur transportable "se fibre" de la façon suivante : Une flèche $f : C_1 \to C$ de $Fib(\mathcal{B})$ est *transportable* ssi pour tout $X_1 \in C_1$ et toute flèche cartésienne $\varphi : \overline{X} \to f(X_1) \in C$, il existe une flèche cartésienne $\varphi_1 : \overline{X}_1 \to X_1 \in C_1$ telle que $f(\varphi_1) = \varphi$.
Que ce soit la bonne généralisation est attesté par :

(5.4.3.) PROPOSITION : *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $f : C_1 \to C \in Fib(\mathcal{B})$ est transportable.

(ii) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, le foncteur $f_I : C_1(I) \to C(I)$ est transportable.

(iii) Pour toute $D \in Fib(\mathcal{B})$, $Cart(D,f) : Cart(D,C_1) \to Cart(D,C)$ est transportable.

(iv) Pour toute $D \in Fib(\mathcal{B})$, $D \times f : D \times C_1 \to D \times C$ est transporta-

ble.

(v) Pour tout $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, $F^*(f) : F^*(C_1) \to F^*(C)$ est transportable.

(vi) $Inv(f) : Inv(C_1) \to Inv(C)$ est une fibration (dans $Fib(\mathcal{B})$).

(vii) $j^*(f) : f^{-1}(Inv(C)) \to Inv(C)$ est une fibration.

Preuve sommaire : Pour la définition de Inv(C), voir l'exercice 7.).
On a (i) ⇒ (ii) car une flèche verticale est inversible ssi elle est cartésienne.
(ii) ⇒ (i). Soit $\varphi : \overline{X} \to f(X_1)$ cartésienne sur u. Prenons $\varphi_1' : X_1' \to X_1 \in C_1$ cartésienne sur u. Alors $\varphi' = f(\varphi_1') : f(X_1') \to f(X_1)$ est cartésienne sur u, donc il existe $\sigma : \overline{X} \to f(X_1')$, isomorphisme vertical dans C, donc de forme $f(\sigma_1)$, où $\sigma_1 : \overline{X}_1 \to X_1'$ est un isomorphisme vertical de C_1. La flèche cartésienne $\varphi_1 = \varphi_1'\sigma_1$ de C_1 a les propriétés voulues.
Les équivalences avec (iv) et (v) deviennent alors évidentes. (ii) ⇒ (iii) se prouve en utilisant le relèvement cartésien des homotopies. Pour (iii) ⇒ (ii), on utilise le diagramme commutatif donné par le lemme de Yoneda

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Cart(I,f)} & \\ Cart(I,C_1) & \longrightarrow & Cart(I,C) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ C_1(I) & \xrightarrow[f_I]{} & C(I) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des équivalences *surjectives*

sur les objets d'après (2.8.3.), et le lemme ci-dessous, de démonstration immédiate. Les équivalences, faciles, avec (vi) et (vii) sont laissées en exercice.

(5.4.4.) LEMME : *Soient* $f : X_1 \to X$ *et* $f_1 : X_2 \to X_1$ *deux foncteurs.*

(i) *Si* f_1 *et* f *sont transportables, il en est de même de* ff_1.

(ii) *Si* ff_1 *est transportable, il en est de même de* f.

(iii) *Si* f *est une équivalence, alors* f *est transportable ssi* f *est surjectif sur les objets.*

(5.4.5.) Remarques :
(i) Une *équivalence* de catégories, et à plus forte raison de fibrations, *n'est pas en général transportable.* Le lemme de Yoneda n'a pu servir que grâce à la surjectivité, et la fonctorialité, des équivalences.

(ii) Compte tenu de la proposition, on peut immédiatement "fibrer" le lemme en remplaçant "foncteur" par "flèche de Fib(B)".

(5.4.6.) THEOREME : *Si* $f : C_1 \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ *est transportable,* f *est absolument quarrable.*

Preuve : Soit $g : D \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. On reprend les notations de (5.3.).

(i) D_1 est une fibration. En effet, soient $u : \overline{I} \to I \in \mathcal{B}$ et $Y_1 \in D_1(I)$. Posons $X_1 = g_1(Y_1)$, $Y = f_1(Y_1)$ et $X = g(Y) = f_1(X_1)$. Soit $\psi : \overline{Y} \to Y \in \mathcal{D}$ cartésienne au-dessus de u. Alors $g(\psi) = \varphi : \overline{X} \to X = f_1(X_1)$ est cartésienne

et g transportable. Donc il existe $\varphi_1 : \overline{X}_1 \to X_1 \in \mathcal{C}_1$ cartésienne telle que $f(\varphi_1) = \varphi = g(\psi)$. D'où $\psi_1 : \overline{Y}_1 \to Y_1 \in \mathcal{D}_1$ telle que $g_1(\psi_1) = \varphi_1$ et $f_1(\psi_1) = \psi$ et ψ_1 est hypercartésienne d'après le lemme (5.3.1.).

(ii) f_1 et g_1 sont cartésiens au-dessus de $\mathcal{B}$. Soit $\psi_1' : \overline{Y}_1' \to Y_1 \in \mathcal{D}_1$ cartésienne au-dessus de $u : \overline{I} \to I$, et $\varphi_1' : \overline{X}_1' \to X_1$, $\psi' : \overline{Y}' \to Y$ et $\varphi' : \overline{X}' \to X$ les images de ψ_1' par g_1, f_1 et $gf_1 = fg_1$. Prenons $\psi : \overline{Y} \to Y_1 \in \mathcal{D}$ cartésienne au-dessus de u, et notons φ_1 et ψ_1 les flèches cartésiennes au-dessus de u définies dans (i) à partir de ψ. On a des factorisations *uniques* :
$\psi' = \psi\overline{\psi}$, $\varphi_1' = \varphi_1\overline{\varphi}_1$ et $\psi_1' = \psi_1\overline{\psi}_1$ où $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\psi}_1$ sont verticales.
L'unicité implique $\overline{\varphi}_1 = g_1(\overline{\psi}_1)$ et $\overline{\psi} = f_1(\overline{\psi}_1)$. Mais ψ_1' et ψ_1 sont cartésiennes au-dessus de u, et $\overline{\psi}_1$ est verticale, donc est un isomorphisme. Alors $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\psi}$ sont des isomorphismes, donc φ_1' et ψ' sont cartésiennes.
Le diagramme (Δ) est donc dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, donc f et g ont un produit fibré absolu.

(5.4.7.) Remarque : Nous avons détaillé la démonstration car elle est typique :

(i) Les foncteurs f et g sont définis "exactement" et non "à des isomorphismes canoniques près" [Pa.-Schu] *ce qui n'a d'ailleurs aucun sens* (cf. Exercice 12). (Si même ça avait un sens, ce serait sans espoir en vertu de (5.4.5.) (i)).

(ii) On fait *des choix* de flèches cartésiennes, soit arbitraires, comme ψ, soit soumises à des conditions, comme φ_1. Ces choix n'ont *rien de canonique*. Mais une fois ces choix faits, le reste est déterminé *de manière unique*.

(iii) Si l'on fait des choix différents, ils sont reliés aux premiers par des isomorphismes *uniques*, mais qui n'ont *rien de canonique*, puisqu'ils dépendent des choix, non canoniques, déjà faits.

(iv) Confondre "unique dans un contexte donné, précis mais non canonique" avec "canonique dans un contexte imprécis" est un *contresens*, qui n'est pas seulement *linguistique*, mais qui a des conséquences *mathématiques* : Affirmations fausses (concernant par exemple la fibration discrète des objets, voir Exercices 3 et 11), démonstrations utilisant le lemme de Yoneda comme s'il existait une équivalence réciproque canonique et fonctorielle, mais *surtout*, les choses essentielles *n'ont aucun sens* si les foncteurs indexés sont définis "à isomorphisme canonique près". Voir l'Exercice 12, ou essayer de définir avec précision la fibration (f,g) de (5.6.) ci-dessous et ses propriétés universelles. (Rappelons que les catégories Cart(C,D) elles-mêmes *n'ont pas* de définition précise!).

(v) Bien entendu, dans la suite, nous réduirons au minimum les vérifications par "chasse au diagramme cartésienne" de type aussi élémentaire que la démonstration ci-dessus, pour ménager le lecteur.

(5.4.8.) Corollaire : Soit $f : C_1 \to C$ une flèche transportable de Fib(B). Alors :

(i) $f^{op} : C_1^{op} \to C^{op}$ est transformable.

(ii) Pour toute $g : D \to C \in Fib(B)$, la flèche $f_1 = g^*(f) : D_1 \to D$ est tranportable.

Preuve : Le résultat est trivial pour B = 1. On se ramène

à ce cas grâce à l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de (5.4.3.), et en outre : Pour (i) l'isomorphisme naturel en $C : C^{op}(I) \simeq C(I)^{op}$, et pour (ii) le fait que toute flèche transportable est absolument quarrable.

(5.4.9.) THEOREME : *Si* $f : C_1 \to C$ *est une fibration,* f *est transportable.*

Preuve : Evident pour $B = 1$. On s'y ramène par les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (iii) de (5.4.3.) et (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de (3.3.4.).

(5.4.10.) Scholies. De ce qui précède, il résulte clairement que :

(i) Toute fibration ou cofibration de $Fib(B)$ est absolument quarrable.

(ii) Toute flèche $g : D \to C$ de $Fib(B)$ définit un 2-foncteur de *changement de base* $g^* : Fib(C) \to Fib(D)$, qui a un bon comportement dans tous les sens possibles, i.e. :

1) Globalement : si $f : C_1 \to C \in Fib(C)$ et $g^*(f) = f_1 : D_1 \to D \in Fib(D)$, par les isomorphismes $Fib(C) \simeq Fib(C)$ et $Fib(D) \simeq Fib(\mathcal{D})$, on retrouve le changement de base usuel; d'où des propriétés analogues à celles de (1.9.) mais "fibrées sur C et D".

2) Par changement de base $F : B' \to B$.

3) Fibre à fibre.

(Le lecteur donnera facilement un sens à 2 et 3, ainsi qu'à la phrase : "les mêmes propriétés sont vraies pour les cofibrations").

(5.4.11.) Remarque : Ces *propriétés* justifient l'intérêt que nous attachons aux fibrations dans Fib(B). Mais il y a une *raison* plus essentielle à cet intérêt, si l'on veut bien admettre que les fibrations sont importantes.
Soit $f : X \to Y$ un foncteur. On lui a associé dans (2.2.2.) une flèche, $Ens(f) : Ens(X) \to Ens(Y)$, de Fib(Ens). On a clairement :

f est une fibration $\iff$ Ens(f) est une fibration dans Fib(Ens).

(5.4.12.) LEMME : *Soit* $D : \mathcal{D} \to B$ *une fibration discrète.*

(i) *Toute* $f : C \to D \in Fib(B)/D$ *est une fibration, donc* $f \in Fib(D)$.

(ii) *Toute* $g : f' \to f \in Fib(B)/D$ *est cartésienne au-dessus de* D. *Il en résulte donc que* $Fib(D) = Fib(B)/D$.

Preuve : Trivial pour $B = 1$. On s'y ramène par : (3.3.4.) pour (i) et (3.3.5.) pour (ii).

(5.4.13.) Corollaire : Si $f_i : C_i \to D \in Fib(B)$ $(i=1,2)$, où D est discrète, le produit fibré $C_1 \underset{D}{\times} C_2$ existe et est absolu, et les projections $pr_i : C_1 \underset{D}{\times} C_2 \to C_i$ sont des bifibrations dans Fib(B).
On utilisera en particulier ce corollaire quand D est la fibration discrète associée à un objet de B.

(5.4.14.) PROPOSITION : *Si* $D : \mathcal{D} \to B$ *est une fibration ordonnée, toute flèche* $f : C \to D$ *de* Fib(B) *est transportable.*

Preuve : Trivial pour $B = 1$. On s'y ramène par (i) $\iff$ (ii) de (5.4.3.).

(5.4.15.) Remarques :
(i) On a donc un "bon" changement de base, dans Fib(B), pour les flèches de but une fibration ordonnée, dont on a vu l'importance à propos de Ω et ω. Les produits fibrés construits naïvement alors se trouvent facilement expliqués, et précisés, par la proposition ci-dessus.

(ii) On verra par la suite quelques principes très généraux de "réduction à $B = 1$".

(5.4.16.) PROPOSITION : *Soit* $f : C_1 \to C \in \mathrm{Fib}(B)$. *On a les conditions équivalentes :*

(i) $f : C_1 \to C$ *est une flèche transportable.*

(ii) *Le foncteur* $f : C_1 \to C$ *est transportable.*

La vérification est un exercice, facile, laissé au lecteur. On dit pour cette raison que la transportabilité est une propriété absolue.

5.5. Foncteurs transportables.

(5.5.1.) DEFINITION : *Un foncteur* $C : X \to X_1$ *est cotransportable ssi, pour toute catégorie* Y, *le foncteur* $Y^C : Y^{X_1} \to Y^X$ *est transportable.*

(5.5.2.) Remarques au sujet de la définition :
(i) Si C est cotransportable, il en est de même de C^{op}.

(ii) Il y a une autre notion catégorique de "cofibration", plus conforme d'ailleurs avec l'usage de ce mot en topologie. $C : X \to X_1$ est une "cofibration" ssi, pour toute catégorie Y, le foncteur $Y^{C^{op}}$ est une fibration. Compte tenu de 1, les foncteurs cotransportables jouent par rap-

port à ces "cofibrations" le même rôle que les foncteurs transportables par rapport aux fibrations. On devrait donc dire "cotransportable".

(iii) Comme nous n'étudierons pas ces "cofibrations", malgré leur intérêt, et comme la notion de foncteur transportable est auto-duale, il n'y a aucun risque d'ambiguïté à omettre les guillemets.

(iv) Compte tenu de la caractérisation ci-dessous, on aurait pu éviter totalement le mot cotransportable et dire : injectif sur les objets. Mais cela aurait masqué la propriété caractéristique, qui est de nature "2-catégorique".

(5.5.3.) THEOREME : *Soit* $C : X \to X_1$ *un foncteur. On a les conditions équivalentes*

(i) C *est injectif sur les objets.*

(ii) C *est cotransportable.*

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $f_1 : X_1 \to Y$ et $\overline{f} : X \to Y$ deux foncteurs et $\sigma : \overline{f} \to f_1C$ un isomorphisme naturel. On associe à tout objet X_1 de X_1 un isomorphisme $\sigma_1X_1 : \overline{f}_1X_1 \to f_1X_1$ dans Y, défini comme suit : Si X_1 est de la forme CX, avec $X \in X$, on prend $\sigma_1X_1 = \sigma X : \overline{f}X \tilde{\to} f_1CX = f_1X_1$. Sinon on prend $\sigma_1X_1 = id_{f_1X_1}$. Il existe alors un unique foncteur $\overline{f}_1 : X_1 \to Y$ tel que les σ_1X_1 déterminent un isomorphisme naturel $\sigma_1 : \overline{f}_1 \tilde{\to} f_1$ et on a clairement $\sigma = \sigma_1 * C$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Notons d'abord que le composé de deux foncteurs cotransportables l'est aussi. Soient $C : X \to X_1$

cotransportable, et X et $\overline{X}$ deux objets distincts de $\mathcal{X}$. Le foncteur $X \amalg \overline{X} : 1 \amalg 1 \to \mathcal{X}$ qu'ils définissent est cotransportable par (i) $\Rightarrow$ (ii), donc aussi le composé $C \circ (X \amalg \overline{X}) = CX \amalg C\overline{X} : 1 \amalg 1 \to \mathcal{X}_1$. Cela réduit le problème au cas $\mathcal{X} = 1 \amalg 1$, $X = 0$ et $\overline{X} = 1$.

Notons $\mathcal{I}so$ l'*isomorphisme universel*, i.e. la catégorie définie par :

$$0 \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} 1 \quad \text{avec} \quad uv = id \quad \text{et} \quad vu = id.$$

Soient $f_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{I}so$ le foncteur constant égal à 1, $\overline{f} : \mathcal{X} = 1 \amalg 1 \to \mathcal{I}so$ l'inclusion canonique, et $\sigma : \overline{f} \xrightarrow{\sim} f_1 C$ l'unique isomorphisme. Il existe un isomorphisme $\sigma_1 : \overline{f}_1 \xrightarrow{\sim} f_1$ tel que $\sigma = \sigma_1 * C$. En particulier $\overline{f} = f_1 C$, donc $C(0) \neq C(1)$.

(5.5.4.) Remarques :

(i) Le foncteur $Ob : Cat_1 \to Ens$ a pour adjoint à droite le foncteur U qui associe à tout ensemble I la catégorie grossière $U(I)$ ayant I comme ensemble d'objets, et $\mathcal{I}so = U(1 \amalg 1)$. D'où pour toute catégorie $\mathcal{X}$:

$$Cat_1(\mathcal{X}, \mathcal{I}so) = Hom_{Ens}(Ob(\mathcal{X}), 1 \amalg 1) \simeq Ob(Ob(\mathcal{X})),$$

ce qui caractérise $\mathcal{I}so$ à isomorphisme près.

(ii) Noter aussi que $\mathcal{I}so$ est la catégorie de fractions de 2 obtenue en inversant l'unique flèche non triviale, et que c'est un groupoïde.

(iii) La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) fournit le résultat plus précis suivant :

$C : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_1$ est cotransportable

ssi $\mathcal{I}so^C$ est transportable.

Il en résulte que dans (5.5.1.) on peut se borner, pour $\mathcal{Y}$,

à prendre un groupoïde.

(iv) Nous mentionnons ces faits car ils "se fibrent et se fonctorisent bien", et sont à la base de la démonstration de (5.5.6.) ci-dessous.

(Tant que ces faits n'avaient pas été dégagés et la preuve de (ii) ⇒ (i) ci-dessus fonctorisée, je ne pensais pas que l'équivalence (i) ⟺ (ii) de (5.5.6.) était vraie. Le formalisme a parfois du bon!).

(5.5.5.) DEFINITION : *Une flèche* $C : C \to C_1$ *de* Fib(B) *est cotransportable ssi pour toute* $E \in$ Fib(B) *le foncteur* $Cart(C,E) : Cart(C_1,E) \to Cart(C,E)$ *est transportable.*

(5.5.6.) PROPOSITION : *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C : C \to C_1$ *est cotransportable.*

(ii) *Pour tout* $I \in B$, *le foncteur* $C_I : C(I) \to C_1(I)$ *est cotransportable.*

(iii) *Le foncteur* $C : C \to C_1$ *est cotransportable.*

(iv) *Pour tout* $F : B' \to B$, $F^*(C) : F^*(C) \to F^*(C_1)$ *est cotransportable.*

(v) *Pour toute* $D \in$ Fib(B), $C \times D : C \times D \to C_1 \times D$ *est cotransportable.*

(vi) *Pour toute* $D \in$ Fib(B), $Cart(C, Inv(D))$ *est une fibration.*

(vii) $Cart(C, Iso(B))$ *est transportable (où* Iso(B) *est défi-*

ni ci-dessous).

(5.5.7.) Remarques :
(i) Quand on disposera des catégories D^C, on pourra allonger cette liste, notamment en rajoutant l'analogue fibré parfait de la définition (5.5.1.) : Pour toute $D \in Fib(\mathcal{B})$, $D^C : D^{C_1} \to D^C$ est transportable.

(ii) On note $Iso(\mathcal{B})$, ou même Iso, la fibration constante de base $\mathcal{B}$ et de fibre Iso. En vertu de (2.9.6.), pour toute $C \in Fib(\mathcal{B})$ on a $Cart(C, Iso(\mathcal{B})) \simeq Cat(C, Iso)$, donc toute partie S de $Ob(C)$ définit un unique foncteur cartésien $f : C \to Iso$ tel que $f(X) = (1, I)$ ssi $X \in S \cap Ob\, C(I)$, appelé foncteur caractéristique de S.

Preuve de (5.5.6.) : On montre d'abord les équivalences (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (vii) puis on en déduit les autres.

(vii) $\Rightarrow$ (iii). Soient X et $\overline{X}$ deux objets distincts de $C(I)$. Notons $f_1 : C_1 \to Iso$ et $\overline{f} : C \to Iso$ les foncteurs caractéristiques respectifs de $Ob(C_1)$ et de $Ob(C) - \{\overline{X}\}$. On a un isomorphisme, d'ailleurs unique, $\sigma : \overline{f} \xrightarrow{\sim} f_1 C \in Cart(C, Iso)$. Il existe alors $\sigma_1 : \overline{f}_1 \xrightarrow{\sim} f_1 \in Cart(C_1, Iso)$ tel que $\sigma_1 = \sigma * C$, et en particulier $f = \overline{f}_1 C$, d'où $C(X) \neq C(\overline{X})$, et c est un foncteur injectif sur les objets.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soient $E \in Fib(\mathcal{B})$, $\overline{f} : C \to E$ et $f_1 : C_1 \to E$ cartésienset $\sigma : \overline{f} \xrightarrow{\sim} f_1 C$ un isomorphisme de $Cart(C, E)$, définissant des isomorphismes $\sigma_I : \overline{f}_I \to f_{1I}\, G_I$ de $Cat(C(I), E(I))$. Pour tout $I \in \mathcal{B}$, σ_I se relève en un isomorphisme $\sigma_{1I} : \overline{f}_{1I} \to f_{1I}$ de $Cat(C_1(I), E(I))$. Si

$X_1 \in C_1(I)$, la flèche $\sigma_{1I}(X_1) : \overline{f}_{1I}(X_1) \to f_{1I}(X_1)$ est un isomorphisme vertical de C_1, donc est cartésienne. Donc les foncteurs $\overline{f}_I$ se prolongent en un foncteur $\overline{f}_1 : C_1 \to E$ cartésien, tel que les σ_{1I} définissent un isomorphisme $\sigma_1 : \overline{f}_1 \to f_1$ de $Cart(C_1,E)$ vérifiant $\sigma = \sigma_1 * C$. Noter que σ_1 et $\overline{f}_1$ sont uniques, une fois choisis les σ_{1I}.

(i) $\Rightarrow$ (vii) évident, ce qui boucle la première étape.

(ii) $\Leftrightarrow$ (v) et (ii) $\Leftrightarrow$ (vi) sont clairs : l'injectivité sur les objets se voit fibre à fibre.

(i) $\Rightarrow$ (vi) car Inv(D) est un groupoïde fibré, donc Cart(C,Inv(D)) est un groupoïde. Mais si $f : X_1 \to X$, où X est un groupoïde, f est transportable ssi f est une fibration.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) car Iso est un groupoïde fibré, donc Inv(Iso) = Iso.

(5.5.7.) PROPOSITION : *Soit* $C : X \to X_1$ *un foncteur cotransportable. Pour toute* $C \in Fib(B)$ *la flèche* $C^C : C^{X_1} \to C^X$, *de* Fib(B), *est transportable.*

Preuve : Réduction au cas $B = 1$ en utilisant les isomorphismes $C^X(I) \simeq C(I)^X$, et (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dans la proposition (5.4.3.).

(5.5.8.) Soit $g : D \to C^X \in Fib(B)$. On peut alors former le produit fibré

$$(\Delta) \qquad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_1} & D \\ \downarrow & & \downarrow g \\ C^{X_1} & \xrightarrow[C^C]{} & C^X \end{array}$$

Comme (Δ) est absolu, on a les produits fibrés (Δ_I) où $I \in \mathcal{B}$, et $(\mathbb{\Delta})$:

$$\begin{array}{ccc} D_1(I) & \xrightarrow{f_{1I}} & D(I) \\ {\scriptstyle g_{1I}}\downarrow & (\Delta_I) & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C^{X_1}(I) & \xrightarrow[C_I^C]{} & C^X(I) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{D} \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & (\mathbb{\Delta}) & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C^{X_1} & \xrightarrow[C^C]{} & C^X \end{array}$$

et, pour toute $E \in Fib(\mathcal{B})$, le produit fibré $Cart(E,\Delta)$ que nous n'écrivons pas. Les isomorphismes $Cart(E,C^X) \simeq Cart(E\times X,C)$ permettent, comme pour les catégories ordinaires (Cos $\mathcal{B} = 1$ auquel on se réduit d'ailleurs car les (Δ_I) sont des produits fibrés) de déduire de (Δ) le produit fibré,

$$\begin{array}{ccc} & Cart(E,D_1) & \xrightarrow{Cart(E,f_1)} Cart(E,D) \\ Cart(E,\Delta)^\wedge : & {\scriptstyle Cart(E,g_1)^\wedge}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle Cart(E,g)^\wedge} \\ & Cart(X_1\times E,C) & \xrightarrow[Cart(C\times E,C)]{} Cart(X\times E,C) \end{array}$$

où $Cart(E,g)^\wedge$ désigne le foncteur composé :

$$Cart(E,D) \xrightarrow[Cart(E,g)]{} Cart(E,C^X) \simeq Cart(X\times E,C).$$

(5.5.9.) Remarques : Les produits fibrés de (Δ) permettent des réductions au cas $\mathcal{B} = 1$. On appellera réductions *fibre à fibre* celles qui utilisent les (Δ_I), *globales* celles qui utilisent $(\mathbb{\Delta})$, et *cartésiennes* celles qui utilisent soit $Cart(E,\Delta)$ soit $Cart(E,\Delta)^\wedge$. Les réductions cartésiennes sont les plus générales : par exemple pour les fibrations C^D, définies au Chapitre III, on n'aura pas d'isomorphisme, ni même d'équivalence, entre $C^{\mathcal{D}}$ et la source du foncteur

C^D, ou entre $(C^D)(I)$ et $C(I)^{D(I)}$. On aura par contre des *équivalences* $Cart(E,C^D) \xrightarrow{\approx} Cart(D\times E,C)$ généralisant les *isomorphismes* $Cart(E,C^X) \xrightarrow{\sim} Cart(X\times E,C)$. Les réductions cartésiennes s'appliquent aux propriétés *stables par équivalence* de catégories fibrées, et souvent aussi, en faisant attention, à des propriétés de type "produit fibré absolu", ou autres, qui ne sont pas stables par équivalence.
La lourdeur un peu pédante consistant à expliciter certains *diagrammes canoniques*, ou certaines *propriétés de naturalité*, fait en réalité gagner du temps. Elle permettra dans la suite d'utiliser de très nombreuses réductions à *1*, de divers types.

(5.5.10.) Notons, pour référence ultérieure, quelques cas particuliers où $C : X \to X_1$ est cotransportable, et donc, pour toute $C \in Fib(B)$, C^C absolument quarrable.

(i) X est une sous-catégorie de X_1, et c est l'inclusion. Plus spécialement, les inclusions : $1 \amalg 1 \subset 2 \subset Iso$.

(ii) X est un monoïde, et plus spécialement un groupe.

(iii) X et X_1 sont des théories algébriques, au sens de Lawvere, et c un morphisme de théories. Cet exemple sera généralisé et précisé lors de l'introduction des fibrations à fibre dans un corpus [Bé

5.6. Les fibrations (f,g).

(5.6.1.) Rappelons que si $f : D \to C$ et $g : E \to C$ sont deux foncteurs, on note (f,g) la catégorie définie par le produit fibré ($/\Delta$) ci-dessous.

$$(\Delta)\qquad \begin{array}{ccc} (f,g) & \xrightarrow{(\partial_0,\partial_1)} & D\times E \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\times g} \\ C^D & \xrightarrow[C^c]{} & C^{1\amalg 1}\simeq C\times C \end{array}$$

où $c : 1 \amalg 1 \subset 2$ est l'inclusion. La flèche h détermine une "homotopie", i.e. une transformation naturelle, notée encore h, $f\partial_0 \to g\partial_1$, universelle, c'est-à-dire que l'on a, pour toute catégorie C', un isomorphisme :

$$(f,g)^{C'} \simeq (f^{C'},g^{C'}).$$

(5.6.2.) Cette situation se fibre de la meilleure manière possible (ce n'est pas toujours le cas). Si $f : D \to C$ et $g : E \to C$ sont deux flèches de Fib(B), la flèche C^c est absolument quarrable, donc on peut former le produit fibré (Δ) analogue à celui de (5.6.2.). Ce produit fibré étant absolu, le diagramme dans Cat qui lui correspond est justement (/Δ), et aucune confusion n'est possible, à ceci près que la catégorie (f,g) doit, dans le cas fibré, être munie de sa fibration structurelle sur B, ce qui est tout à fait moral.
Toutes les réductions à *1* sont possibles et donnent les isomorphismes suivants :

(i) Par réduction fibre à fibre, pour tout $I \in B$ et tout $F : B' \to B$:

$$(f,g)_I \simeq (f_I,g_I) \quad ; \quad (F^*(f),F^*(g)) \simeq F^*(f,g).$$

(ii) Par réduction cartésienne, pour toute $C' \in \mathrm{Fib}(B)$

$$\mathrm{Cart}(C',(f,g)) \simeq (\mathrm{Cart}(C',f),\mathrm{Cart}(C',g))$$

qui généralise l'isomorphisme de (5.6.1.) et sera généralisé au chapitre III.

(Nous conseillons vivement d'exprimer, uniquement en termes de pseudo-foncteurs, l'isomorphisme (ii). Quant aux catégories indexées ...).

5.7. 2-produits fibrés dans Fib(B).

Toutes les considérations de (5.6.) n'utilisent, outre l'isomorphisme banal $C^{1 \amalg 1} \simeq C \times C$, que le fait que l'inclusion $1 \amalg 1 \subset 2$ est cotransportable. Il en est de même de $1 \amalg 1 \subset Iso$, donc tout se conserve. Fixons les notations. Dans le diagramme correspondant à ($/\Delta$) (resp. (Δ)) la catégorie (resp. la fibration) correspondant à (f,g) est appelée *2-produit fibré de* f *et* g et notée $(\widetilde{f,g})$ ou $D \underset{C}{\widetilde{\times}} E$ (resp. $D \underset{C}{\widetilde{\times}} E$).

Le signe ~ vient rappeler que c'est un "produit fibré à isomorphisme près", mais en un sens très précis.

5.8. Remarque.

Nous utiliserons très peu les 2-produits fibrés, par contre les produits fibrés absolus et les fibrations (f,g) seront essentiels dans la suite.

§ 6. LES FIBRATIONS Fam(C).

6.1. Introduction.

Si on part de l'idée que les fibrations sont la généralisation naturelle des catégories quand on remplace Ens par une catégorie B arbitraire (2.2.), la question des limites "infinies" se pose. Par dualité, il suffit de considérer les $\varinjlim$, lesquelles se réduisent aux conoyaux, notion finie, et aux sommes "infinies". Pour une catégorie X ordinaire, i.e. non fibrée, X a des sommes infinies ssi le foncteur $\eta_X : X \to Ens(X)$ qui identifie X à la fibre au-dessus de 1

de la fibration $Ens(X)$ a un adjoint à gauche.

Nous allons associer à toute $C \in Fib(B)$ une fibration $Fam(C)$ qui, dans $Fib(B)$, sera à C ce que $Ens(X)$ est à X. Plus précisément, le rapport entre C et $Fam(C)$ devra fournir, comme cas particulier, le rapport entre la fibration $Ens(X) : Ens(X) \to Ens$ (qui de notre point de vue est la véritable catégorie X) et la fibration $Ens(Ens(X)) : Ens(Ens(X)) \to Ens$.

(6.1.1.) L'utilité de $Fam(C)$ sera vue au Chapitre II. Par contre, on constatera de manière un peu "surprenante" que :

(i) La définition catégorique de $Fam(C)$ est très simple, et les démonstrations formelles dans le cadre des fibrations sont *plus courtes* et *plus claires* que les démonstrations naïves que l'on serait tenté de faire dans le cas très particulier de $Ens(Ens(X))$.

(ii) L'existence du foncteur $C \to Fam(C)$ généralisant $X \to Ens(X)$ ne nécessite pas que B soit à objet final, mais seulement à produits fibrés, *hypothèse que nous ferons dans tout ce paragraphe* (voir l'Exercice 16).

(6.1.2.) Un objet de $Ens(Ens(X))$, dans la fibre au-dessus de l'ensemble I, est une famille doublement indexée $((X_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$ d'objets de X. En identifiant la famille $(J_i)_{i \in I}$ d'ensembles à la flèche $u : J = \coprod_i J_i \to I$ (voir (2.3.) dont on reprend les notations) un tel objet s'identifie à un couple $((X_j)_{j \in J}, u : J \to I)$, ce qui motive les définitions suivantes.

6.2. Définitions.

Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration.

(6.2.1.) On note $\mathrm{Fam}(\mathcal{C})$ la catégorie définie par le produit fibré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fam}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{C^*(S)} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle S^*(C)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C} \\ \mathcal{B}^2 & \xrightarrow[S]{} & \mathcal{B} \end{array}$$

(où S est le foncteur source).

(6.2.2.) On note $\mathrm{Fam}(C)$ le foncteur composé :
$\mathrm{Fam}(C) \xrightarrow{S^*(C)} \mathcal{B}^2 \xrightarrow{B} \mathcal{B}$. C'est une fibration, comme composé de la fibration fondamentale B, et de la fibration $S^*(C)$. On l'appelle fibration des *familles de* C.

(6.2.3.) La correspondance $C \longmapsto \mathrm{Fam}(C)$ définit clairement un 2-foncteur noté $\mathrm{Fam} : \mathrm{Fib}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

(6.2.4.) Explicitons quelques notations, bien que les arguments qui suivent soient purement 2-catégoriques et n'utilisent aucune forme explicite des objets ou flèches de $\mathrm{Fam}(C)$, ce qui permet de les "internaliser" ou de les "fibrer" à souhait.
Un objet de $\mathrm{Fam}(C)$ est un couple (X,u) où $u : J \to I$ et $X \in C(J)$.
Une flèche de (X',u') vers (X,u) est un couple (φ,v) où $\varphi : X' \to X \in \mathcal{C}$, et $v : I' \to I \in \mathcal{B}$ rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} J' & \xrightarrow{u'} & I' \\ {\scriptstyle C(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ J & \xrightarrow[u]{} & I. \end{array}$$

Une telle flèche est cartésienne ssi φ est cartésienne dans C, et le diagramme ci-dessus est un produit fibré.
Le foncteur Fam(C) est défini par : $(X,u) \mapsto I$ et $(\varphi,v) \mapsto v$.
Avec les notations de (5.6.1.), la catégorie Fam(C) n'est autre que : (C,id_B) notée souvent (C,B) ou C/B, d'où un grand nombre de propriétés formelles, renforcées par le fait que C est une fibration et que B admet des produits fibrés, ce que nous allons immédiatement exploiter.

6.3.

Le foncteur S*(C) étant une fibration, il définit d'après (3.3.1.) une flèche S*(C) : Fam(C) $\to$ B qui est une fibration dans Fib(B), et en particulier est absolument quarrable.
La correspondance : $C \in Fib(B) \mapsto S^*(C) \in Fib(B)$ définit un 2-foncteur

$$S^* : Fib(B) \to Fib(B).$$

Dans le cas particulier de l'introduction, cela signifie que la correspondance : $((X_j)_{j\in J_i})_{i\in I} \mapsto (J_i)_{i\in I}$ définit une fibration de Ens(Ens(X)) sur Ens(Ens), tout ceci fibré au-dessus de Ens, et qu'en outre la correspondance qui à X associe cette fibration est un 2-foncteur. La vérification naïve est très facile mais les écritures sont très lourdes.
Ce serait bien pire pour les considérations de (6.4.) ci-dessous. On nous pardonnera donc une petite dose de formalisme qui raccourcit et clarifie les choses, tout en permettant de les généraliser.

6.4. Le triple des familles.

(6.4.1.) Notations : On note $2 = 0 \overset{u}{\to} 1$ la flèche universelle et

$3 = 0 \xrightarrow{u_0} 1 \xrightarrow{u_1} 2$ $(u_2 = u_1 u_0)$, le couple composable universel.

u_2

Un objet X_0 (resp. une flèche $\varphi : X_0 \to X_1$, un couple composable de flèches $X_0 \xrightarrow{\varphi_0} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2$) d'une catégorie X est identifié à un foncteur $1 \to X$ (resp. $2 \to X$, $3 \to X$). L'unique foncteur $X \to 1$ est noté ε_X, ou ε. (On utilise vraiment trop peu de la structure simpliciale des catégories pour introduire les notations systématiques de [Gi]). Avec ces notations :

(i) Les foncteurs B et S s'écrivent alors :
$B = B^1 : B^2 \to B^1 \simeq B$, et $S = B^0$. Rappelons qu'en outre, le diagramme ci-dessous est une somme amalgamée (stricte).

(ii)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & 0 & \downarrow{\scriptstyle u_1} \\ 2 & \xrightarrow[u_0]{\quad} & 3. \end{array}$$

(6.4.2.) On définit une flèche $\eta_C : C \to \mathrm{Fam}(C)$ de $\mathrm{Fib}(B)$ en associant à tout $X \in C(I)$ le couple $(X, id_I) \in \mathrm{Fam}(C)(I)$. Dans l'exemple de l'introduction, η_C associe à la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de X la famille doublement indexée $((X_i)_{i \in \{i\}})_{i \in I}$.

(6.4.3.) On définit une flèche $\mu_C : \mathrm{Fam}(\mathrm{Fam}(C)) \to \mathrm{Fam}(C)$ de $\mathrm{Fib}(B)$ de la façon suivante. Un objet de $\mathrm{Fam}(\mathrm{Fam}(C))(I)$ est un triplet $((X,v),u)$ où $u : J \to I$ et $v : K \to J$ sont des flèches de B, et $X \in C(K)$. On lui associe par μ_C le couple $(X, uv) \in \mathrm{Fam}(C)(I)$.

(6.4.4.) On vérifie alors - c'est assez long mais direct - que :

(i) Les flèches η_C et μ_C sont bien des foncteurs cartésiens, i.e. dans Fib(B).

(ii) Qu'elles dépendent naturellement de $C \in Fib(B)$.

(iii) Que (Fam, η, μ) définit un triple strict dans Fib(B).

Noter que dans l'exemple de l'introduction, μ_C associe à une famille triplement indexée, une famille doublement indexée que nous laisserons volontiers écrire au lecteur.

(6.4.5.) Avertissement : La fin du paragraphe 6, tout en restant élémentaire, suppose quelque familiarité avec les 2-catégories. Elle peut être omise en première lecture. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite, sauf dans des remarques ou exercices.

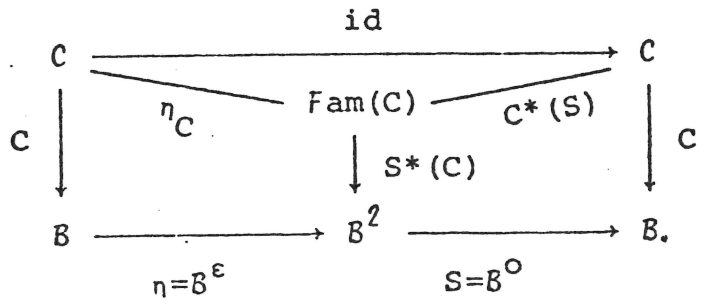
6.5. Quelques remarques à propos du triple des familles.

(6.5.1.) La construction de la catégorie Fam(C) et des foncteurs Fam(C), η_C et μ_C ne suppose ni que B soit à produits fibrés, ni que $C : C \to B$ soit une fibration. On obtient ainsi un triple strict sur Cat/B et ce qui précède signifie alors que : si B est à produits fibrés, ce triple induit par restriction un triple sur $Fib(B) \subset Cat/B$, et qu'en outre, le 2-foncteur Fam : $Fib(B) \to Fib(B)$ se relève en un 2-foncteur $S^* : Fib(B) \to Fib(B)$. L'hypothèse que B soit à produits fibrés est essentielle pour ces affirmations.

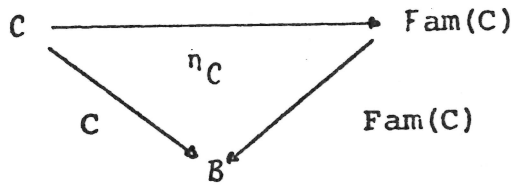
(6.5.2.) Nous allons donner des constructions 2-catégoriques de η_C et μ_C, n'utilisant pas la description des objets

et flèches de Fam(C) ou Fam(Fam(C)). Elles rendront en particulier inutiles les vérifications laissées au lecteur dans (6.4.4.). Nous faisons la construction dans Cat/B, où B est arbitraire, en notant au passage qu'on reste dans Fib(B) quand B est à produits fibrés.
Soient donc C : C → B ∈ Cat/B, et
Fam(C) : Fam(C) → B ∈ Cat/B défini par (6.2.1.) et (2.2.2.).

(6.5.3.) On définit un foncteur η_C : C → Fam(C), unique, par la condition de rendre commutatif le diagramme ci-dessous dans lequel le rectangle extérieur est trivialement commutatif, et le carré de droite est un produit fibré.



Le fait que dans le diagramme : $1 \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} 2 \xrightarrow{\varepsilon} 1$ on ait $\varepsilon 0 = \varepsilon 1$ montre que le diagramme ci-dessous est commutatif :

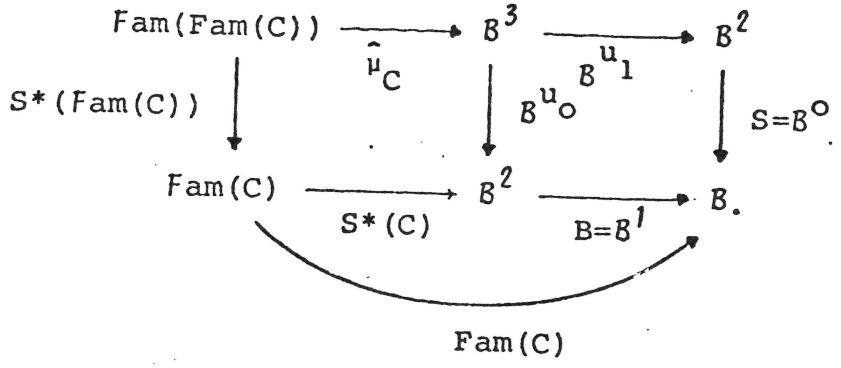


donc que le foncteur η_C définit une flèche η_C : C → Fam(C) de Cat/B.

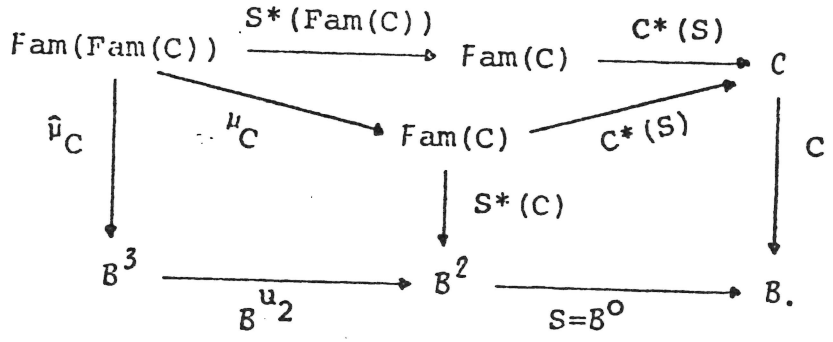
(6.5.4.) On définit un foncteur μ_C : Fam(Fam(C)) → Fam(C), unique, de la façon suivante.

1) On note d'abord qu'on a par définition de Fam(Fam(C)),

un unique foncteur $\hat{\mu}_C$: Fam(Fam(C)) → $\mathcal{B}^3$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous et tel que les deux carrés soient des produits fibrés.



2) Il existe alors un unique foncteur μ_C tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif.



(6.5.5.) La naturalité par rapport à C ∈ Cat/$\mathcal{B}$ est évidente car tout a été fonctorisé. Le fait qu'on ait un triple dans Cat/$\mathcal{B}$ résulte en définitive de ce que, dans Cat^{op}, on a une catégorie interne ayant *1* comme objet des objets, *2* comme objet des flèches, O : *1* → *2* et 1 : *1* → *2* comme morphismes "source" et "but", et u_2 : *3* → *2* comme morphisme de composition [Be , p. 47].

(6.5.6.) Si l'on suppose maintenant $\mathcal{B}$ à produits fibrés et C ∈ Fib($\mathcal{B}$), le fait que l'on ait un triple dans Fib($\mathcal{B}$) se voit de la façon suivante :

(i) Tous les objets de Cat/B utilisés sont construits par composition de la fibration fondamentale avec des fibrations F*(C) pour des F convenables.

(ii) Tous les produits fibrés utilisés sont dans Fib(B) et *absolus*, les uns parce que l'une des flèches est une fibration, les autres parce que *les foncteurs* 0, 1, u_1, u_2 et u_3 *sont cotransportables*.

(6.5.7.) La dernière remarque permet, d'un coup, de fibrer tout ce qui précède : i.e. pour toute C ∈ Fib(B) de définir un triple des familles sur Fib(B)/C (qui pour B = *1* redonne le triple sur Cat/C) et si en outre la fibration C est à produits fibrés (au sens du Chapitre II), de voir que ce triple se restreint en un triple sur Fib(C) ⊂ Fib(B)/C. En outre, il n'y a aucune vérification à faire, on procède par réduction cartésienne au cas B = *1* ce qui est possible compte tenu des résultats de (3.3.) et du paragraphe 5.

(6.5.8.) Il faudrait, pour être complet, expliciter la propriété universelle de Fam(C) et de la fibration S*(C) : Fam(C) → B ∈ Fib(B). Nous faisons confiance à la sagacité du lecteur pour les découvrir, en se guidant de l'exemple Ens(X) : Ens(X) → Ens, et en utilisant les notions de scindages et coscindages de fibrations et cofibrations <u>*de* Fib(B)</u> définies dans l'Exercice 18.

Benabou Chap I

EXERCICES DU CHAPITRE I

Exercice 1. Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un foncteur.

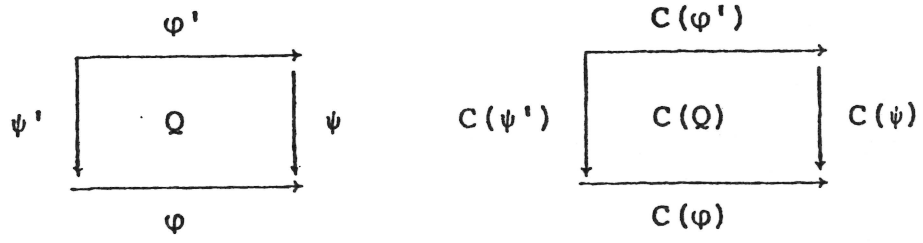
(i) Si C est une fibration, toute flèche cartésienne $\varphi : Y \to X$ est hypercartésienne, i.e. vérifie : Pour toute $\psi : Z \to X \in \mathcal{C}$ et toute factorisation : $C(\psi) = C(\varphi)w$ dans $\mathcal{B}$, il existe une unique flèche $\theta \in \mathrm{Hom}_w(Z,Y)$ telle que $\psi = \varphi\theta$.

(ii) Si pour tout $X \in C(I)$ et $u : J \to I \in \mathcal{B}$ il existe $Y \in C(J)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_u(Y,Z)$ hypercartésienne, C est une fibration.

Exercice 2. Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration.

(i) Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_u(X,Y)$ est cartésienne, φ est un monomorphisme (resp. épimorphisme scindé, isomorphisme) ssi il en est de même de u.

(ii) Soit Q un carré commutatif de $\mathcal{C}$, où φ est cartésienne, et $C(Q)$ l'image par C de Q dans $\mathcal{B}$:



Chacune des conditions ci-dessous est conséquence des deux

autres :

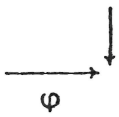
1) φ' est cartésienne.

2) Q est un produit fibré.

3) C(Q) est un produit fibré.

(iii) Il en résulte que, si $\mathcal{B}$ est à produits fibrés :

1) Toute flèche cartésienne φ est quarrable, i.e. tout diagramme :



ψ, où φ est cartésienne, a un produit fibré.

2) Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

a) C est à produits fibrés et C préserve les produits fibrés.

b) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la fibre C(I) est à produits fibrés et pour tout $u : J \to I$, $u^* : C(I) \to C(J)$ préserve les produits fibrés.

3) Si C est une bifibration, ces conditions se réduisent à :

c) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la fibre C(I) est à produits fibrés.

(iv) Que subsiste-t-il de (iii) 1) 2) et 3) si on ne suppose plus que $\mathcal{B}$ a des produits fibrés ?

(v) Généraliser (iii) en remplaçant "produits fibrés" par "$\varprojlim$ arbitraires".

Exercice 3. Dans ce qui suit, on considèrera les groupes comme des catégories à un seul objet. Une fibration $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ dont toutes les fibres sont des groupes sera appelée *fibration en groupes*. On note $Grp(\mathcal{B})$ la sous-2-catégorie pleine de $Fib(\mathcal{B})$ ayant pour objets les fibrations en groupe, et $Grp_1(\mathcal{B})$ la catégorie déduite de $Grp(\mathcal{B})$ par oubli des 2-cellules. Si G est un groupe et $\gamma \in G$ on note $\hat{\gamma}$ l'automorphisme intérieur $\gamma' \mapsto \gamma^{-1}\gamma'\gamma$.
La sous 2-catégorie pleine de Cat ayant pour objets les groupes est notée Grp. Si f_o et f_1 sont des morphismes de groupe de H dans G, une 2-cellule $f_o \Rightarrow f_1$ s'identifie à un élément γ de G tel que $f_o = \hat{\gamma} f_1$. Par oubli des 2-cellules de Grp, on obtient la catégorie des groupes, notée Grp_1.
On se propose de comparer les définitions de $Grp_1(\mathcal{B})$ et $Grp(\mathcal{B})$ en termes de fibrations, et en termes de "catégories indexées", ou de pseudo-foncteurs, dans le cas particulier très simple où $\mathcal{B}$ est un groupe, qui sera fixé dans la suite.

I - Fibrations.

(i) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) C est une fibration en groupes.

2) $\mathcal{C}$ est un groupe et C un morphisme surjectif de groupes. L'unique fibre de C est alors le groupe Ker(C). Un clivage de C est une application $\Gamma : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ telle que $C \circ \Gamma = id_{\mathcal{B}}$. C'est un scindage ssi c'est un morphisme de groupes, i.e. un scindage au sens usuel. (Il existe donc des fibrations n'ayant aucun scindage).

(ii) Soient $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ des fibrations en grou-

pe, une flèche $f : C \to D \in Grp_1(B)$ est un morphisme de groupes $f. : C \to D$ tel que $D \circ f = C$.
Si f_o et f_1 sont deux telles flèches, une 2-cellule $f_o \Rightarrow f_1$ est un élément γ de $Ker(C)$ tel que $f_o = \hat{\gamma} f_1$.

II - Catégories indexées [Pa. Schu]

(i) Une catégorie de groupes indexée par B est définie par la donnée de :

1) Un groupe G.

2) Pour tout $u \in B$, un morphisme $u^* : G \to G$.

3) Pour tout couple (u,v) d'éléments de B_1 un élément $\gamma_{(u,v)}$ de G tel que $v^* \circ u^* = \hat{\gamma}_{(u,v)} \circ (uv)^*$.

4) Un élément γ_1 de G tel que $id_G = \hat{\gamma}_1 \circ C^*$, où C est l'unité de B.
Ces données vérifiant les conditions habituelles de "cocycle". On peut à la rigueur se dispenser de 4) en normalisant, mais les $\gamma_{(u,v)}$ sont indispensables pour le cas non scindé.

(ii) Un morphisme de $(G, u^*, \gamma_{(u,v)}, \gamma_1)$ vers $(G', u^*, \gamma'_{(u,v)}, \gamma'_2)$ est défini par :

1) Un homomorphisme de groupe $f : G \to G'$.

2) Pour tout $u \in B$, un élément φ'_u de G' rendant commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & G' \\ {\scriptstyle u^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ G & \xrightarrow[f]{} G' \xrightarrow[\hat{\varphi}'_u]{} & G' \end{array}$$

Les φ'_u doivent en outre être compatibles avec les $\gamma_{(u,v)}$, $\gamma'_{(u,v)}$, γ_1 et γ'_1 en un sens que le lecteur explicitera.
Notons seulement que pour $G = G'$ et $f = id_G$, le fait que (f,φ'_u) soit un isomorphisme donne la condition de "cobord" usuelle.

(iii) Une 2-cellule $(f,\varphi'_u) \to (g,\psi'_u)$ s'identifie à un élément γ' de G', compatible avec tout ce qui précède.

J'insiste sur le fait qu'il *n'y a pas de simplification possible* dans la présentation de $Grp(\mathcal{B})$ en termes de familles indexées, et que l'introduction par certains auteurs de prétendus "isomorphismes canoniques" qu'ils n'explicitent pas, *parce qu'ils n'existent pas!*, revient à tuer toute la cohomologie des groupes, la théorie de la descente, et bien d'autres choses ...
Même dans le cas $\mathcal{B} = 1$, la 2-catégorie des "familles de groupes" est seulement équivalente à Grp, et l'équivalence serait assez longue à vérifier.

III - On ne suppose plus que $\mathcal{B}$ est un groupe, mais une catégorie arbitraire. Pour le lecteur non encore convaincu, nous proposons de donner un sens, puis de prouver, en termes de catégories indexées la proposition ci-dessous, et ceci même en trichant autant qu'il voudra avec les "isomorphismes canoniques".

PROPOSITION : *Soient* $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *et* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *deux foncteurs. Posons* $D = C \circ f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$. *Si* C *et* f *sont des fibrations en groupe, il en est de même de* D.

(i) La démonstration dans le cadre des fibrations est triviale. On verra dans les exercices des propositions

bien plus générales et plus précises. Dans le cadre des familles indexées, le problème est le suivant : La fibration en groupes C est remplacée par une famille de groupes indexée par B, i.e. un pseudo-foncteur ϕ de B^{op} dans Grp. Mais ensuite, on ne *dispose pas de la catégorie* C qui est définie par $\int_B \phi$. Or la fibration en groupes f devrait être remplacée par une famille de groupes indexée par cette catégorie C dont l'existence est "ignorée". Inutile de dire que même si on construisait C à partir de ϕ, la définition du pseudo-foncteur θ de B^{op} dans Grp(B) correspondant à D serait abominable. Essayer d'écrire les choses dans le cas particulier où B est un groupe, et se souvenir qu'*il faut tenir compte d'une manière ou d'une autre*, même imprécise, des soi-disant "isomorphismes canoniques" si on ne veut pas se retrouver avec le "théorème" : tout épimorphisme de groupes est scindé!

(ii) On pourrait essayer de s'en tirer en utilisant le Lemme de Yoneda, et remplacer C et f par les fibrations scindées de (2.8.4.). L'ennui est que si C est une fibration en groupes, la fibration scindée libre n'est plus une fibration en groupes, mais seulement en groupoïdes. Expliciter cette fibration.

IV - Devinettes.

Expliquer les paradoxes (i) et (ii) ci-dessus et réfléchir à (iii). La terminologie est celle de [Pa- Schu]. Si est un groupe, toute flèche de G est un isomorphisme, on prendra toutes les flèches de G comme isomorphismes canoniques. (C'est le seul choix qui soit tel que : pour toute catégorie B, les familles de groupes indexées par B redonnent les fibrations en groupe de base B).

(i) Soit $\underline{C}$ une catégorie de groupes indexée par $\mathcal{B}$. Dans [Pa. Schu] (2.1.) on définit la famille discrète $Ob(C)$. En prenant cette définition, on trouve ici : $Ob(\underline{C}) = \underline{G}$. D'où le corollaire : Toute fibration en groupes est une fibration discrète!!

(ii) Notons $\underline{1}$ la catégorie de groupes indexée par $\mathcal{B}$ définie par $1^I = 1$. Pour tout $I \in \mathcal{B}$, soit $f^I : 1^I \to C^I$ l'unique morphisme de groupes. On définit ainsi une famille indexée de foncteurs $f : \underline{1} \to \underline{C}$. Passant aux fibrations associées, on trouve un foncteur cartésien : $\int_{\mathcal{B}} f : \int_{\mathcal{B}} \underline{1} \to \int_{\mathcal{B}} \underline{C}$. Mais $\int_{\mathcal{B}} 1$ est la fibration $1 = id_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. D'où le corollaire : Toute fibration en groupes est scindée!!

(iii) Soient $\underline{C}$ et $\underline{D}$ deux familles de groupes indexées par $\mathcal{B}$ et $f = (f^I : C^I \to D^I)$ une famille de morphismes. Peut-on définir une famille $Ker(\underline{f})$ en posant pour tout I, $Ker(\underline{f})^I = Ker(f^I)$?

Réponses : Pour (iii) la réponse est *non*, sans quoi en prenant $\underline{f} = id\ \underline{C}$, on retrouve le paradoxe de (ii). Pour (ii), le paradoxe tient au fait que la définition (1.2.) de [Pa. Schu] *n'a aucun sens*. Même dans le cadre des catégories indexées, *les foncteurs* F^I *sont définis exactement* et non "à isomorphisme canonique près", c'est même *l'unique chose intrinsèque* quand on remplace les fibrations par les catégories indexées! Pour (i), la fibration, baptisée discrète, $Ob(\underline{C})$ n'a rien de discret. C'est, dans le cas où tous les isomorphismes sont canoniques, la fibration $Inv(C)$ de l'Exercice 7, qui est la forme fibrée du groupoïde des inversibles d'une catégorie. $Ob(\underline{C})$ *n'est discrète* que si les isomorphismes canoniques sont des identités, ce qui n'est possible *que pour les fibrations scindées*. En particulier, *pour la fibration fondamentale* $B : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$, *tous les isomorphismes sont canoniques* et donc

Ob(B) = Inv(B). Comme les fibrations $\underline{C}$ *les plus importantes* sont construites à partir de B, *il est tout à fait exceptionnel que* Ob($\underline{C}$) *soit discrète.*
Il en résulte que toutes les définitions utilisant le fait que Ob($\underline{C}$) est discrète sont soit incorrectes, soit contradictoires, soit n'ont aucun sens. C'est le cas en particulier pour les *notions de petitesse* [Pa. Schu] § 2, où la situation est encore aggravée par une *mauvaise définition de l'équivalence* entre familles indexées. Voir Exercice 12.
Pour une définition correcte et intrinsèque de la fibration discrète Ob(C), ainsi que pour sa propriété universelle, voir l'Exercice 11.

Exercice 4. Soit $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une fibration.
(i) C est une fibration préordonnée ssi le foncteur C est fidèle.

(ii) Soit R la congruence sur $\mathcal{C}$ définie par :

$$\varphi \sim \psi \text{ ssi } \partial_o\varphi \times \partial_o\psi \text{ et } C(\varphi) = C(\psi).$$

Notons $p : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ la projection canonique, et $P_o(C) : \mathcal{C}/R \to \mathcal{B}$ l'unique foncteur tel que $P_o(C) \circ p = C$.
Alors $P_o(C)$ est une fibration préordonnée, dite associée à C et $p : C \to P_o(C) \in Fib(\mathcal{B})$.

(iii) Expliciter cette construction dans les trois cas particuliers :

1) $\mathcal{B} = 1$.

2) $\mathcal{B} = Ens$ et $C = Ens(X)$.

3) $\mathcal{B}$ arbitraire et $C = \int_{\mathcal{B}}\phi$ où ϕ est un pseudo-foncteur.

(iv) Pour toute fibration préordonnée $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$, le foncteur

$$\mathrm{Cart}(p,D) : \mathrm{Cart}(P_o(C),D) \to \mathrm{Cart}(C,D)$$

est un isomorphisme.

(v) Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

1) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la fibre $C(I)$ est ordonnée.

2) Pour toute $D \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, $\mathrm{Cart}(D,C)$ est une catégorie ordonnée.

3) C est fidèle, et pour tout $X \in C(I)$ et $u : J \to I$, il existe une flèche cartésienne unique $\varphi_1 Y \to X$ au-dessus de u. On dit alors que C est une fibration ordonnée.

(vi) Une fibration ordonnée est toujours scindée. *Le scindage est unique.* On l'appellera scindage *canonique*.

(vii) Construire, pour toute fibration C, la fibration ordonnée $\mathrm{Ord}(C)$ associée à C, et reprendre (iii) et (iv) pour des fibrations ordonnées.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B}$ à produits fibrés. On note Ω_1 la fibration ordonnée associée à $B : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$.

(i) Si $I \in \mathcal{B}$, un sous-foncteur F de $\mathrm{Hom}(-,I)$, i.e. un cocrible de I est dit *principal* s'il existe $u : J \to I \in \mathcal{B}$, et une factorisation épi-mono dans $\hat{\mathcal{B}}$:

$$\mathrm{Hom}(-,u) : \mathrm{Hom}(-,J) \twoheadrightarrow F \rightarrowtail \mathrm{Hom}(-,I).$$

Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la fibre $\Omega_1(I)$ s'identifie à la catégorie ordonnée des co-cribles principaux de I et on a les inclusions suivantes de sous-fibrations : $1 \subset \omega \subset \Omega_1 \subset \Omega$.

(ii) Si $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, un co-crible C' de C est dit principal si son foncteur caractéristique $\chi_{C'} : C \to \Omega$ se factorise

par Ω_1.
Expliciter cette définition de manière élémentaire.
L'inclusion $1 \subset \Omega_1$ est un co-crible principal, dit universel. Si $f : D \to C \in Fib(\mathcal{B})$ et C' est un co-crible principal de C, $f^{-1}(C')$ est principal dans D.
Notons $\Omega_1(C)$ la catégorie ordonnée des co-cribles principaux de C. La correspondance $C \mapsto \Omega_1(C)$, $f \mapsto f^{-1}$ est un 2-foncteur contravariant de $Fib(\mathcal{B})$ dans Cat, représentable par la fibration Ω_1, munie du co-crible $1 \subset \Omega_1$.

(iii) Devinettes :

1) Peut-on définir pour $C \in Fib(\mathcal{B})$ les co-cribles de type fini de C et les représenter par une fibration $\Omega_f \subset \Omega$.

2) Même question pour les co-cribles premiers.

(iv) Ω et Ω_1 sont des bifibrations ayant un co-scindage unique et l'inclusion $\Omega_1 \subset \Omega$ est une sous-fibration.

(v) Les conditions suivantes sont équivalentes pour $\mathcal{B}$ à $\varprojlim$ finies.

1) $\mathcal{B}$ est une catégorie régulière.

2) L'inclusion $\omega \subset \Omega_1$ a un adjoint à gauche dans $Fib(\mathcal{B})$.

(vi) Les conditions suivantes sont équivalentes pour $\mathcal{B}$ à $\varprojlim$ finies.

1) $\mathcal{B}$ est une catégorie régulière vérifiant l'axiome du choix, i.e. tout épimorphisme régulier est scindé.

2) $\omega = \Omega_1$.

(vii) Si $(C'_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de co-cribles de C indexée par un ensemble A, alors $\bigcap_\alpha C'_\alpha$ est un co-crible de C. Si A est fini et les C'_α sont définissables ou principaux, il en est de même de $\bigcap_\alpha C'_\alpha$. Traduire ces propriétés en termes des fibrations Ω, ω, et Ω_1.

(viii) Soient $C'' \subset C' \subset C$ des inclusions de sous-fibrations.

1) Si $C' \in \Omega(C)$ alors $C'' \in \Omega(C')$ ssi $C'' \in \Omega(C)$.

2) Si $C'' \in \Omega(C)$, alors $C'' \in \Omega(C')$ sans hypothèse sur C'. Donner les analogues pour ω et Ω_1, et traduire ces propriétés en termes de foncteurs caractéristiques.

(ix) Expliciter Ω, ω et Ω_1 pour $B = 1$ et pour B un groupe.

Exercice 6. Soit $C : C \to B$ une fibration.
(i) Les conditions suivantes sont équivalentes.

1) Le foncteur C est fidèle et toute flèche de C est cartésienne.

2) C est équivalente à une fibration discrète.

3) Chaque fibre de C est équivalente à une catégorie discrète.

4) Pour toute $D \in Fib(B)$, $Cart(D,C)$ est équivalente à une catégorie discrète. Une telle fibration sera dite *élémentaire*.

(ii) Une fibration élémentaire a-t-elle toujours un scindage ?

(ii) Soit $\pi_0(C) : B^{op} \to Cat$ le foncteur associant à tout

objet I la catégorie discrète des composantes connexes de C(I). Notons $\pi_o(C) : \pi_o(C/B) \to B$ la fibration discrète associée. Il existe un unique foncteur cartésien $k : C \to \pi_o(C)$ tel que pour tout $X \in C(I)$, $k(X)$ soit la composante connexe de X dans C(I).

(iv) La fibration C est discrète (resp. élémentaire) si k est un isomorphisme (resp. une équivalence).

(v) Pour toute fibration discrète D, le foncteur :

$$Cart(k,D) : Cart(C,D) \to Cart(\pi_o(C),D)$$

est un isomorphisme.

(vi) Si $F : B' \to B$ est un foncteur, comparer $\pi_o(F^*(C))$ et $F^*(\pi_o(C))$.

Exercice 7. Soit $C : C \to B$ une fibration. Notons $Inv(C/B)$ la sous-catégorie de C ayant les mêmes objets, mais pour flèches les flèches cartésiennes de C.

(i) $Inv(C/B)$ détermine une sous-fibration de C, notée Inv(C).

(ii) Inv(C) est un groupoïde fibré.

(ii) Notons $j : Inv(C) \hookrightarrow C$ l'inclusion. Pour tout groupoïde fibré D, le foncteur d'inclusion :
$Cart(D,j) : Cart(D,Inv(C)) \to Cart(D,C)$ est un isomorphisme.

(iv) Reprendre pour les groupoïdes fibrés les questions (iv) et (vi) de (Ex. 4).

Exercice 8.
(i) Soit G un graphe. Notons $L(G)$ la catégorie libre engen-

drée par G. Toute catégorie fibrée sur $L(G)$ est scindée.

(ii) Soit $\mathcal{B}$ une catégorie telle que toute fibration sur $\mathcal{B}$ soit scindée. $\mathcal{B}$ est-elle une catégorie libre ? (Je ne connais pas la réponse).

Exercice 9. On note Ann la catégorie des anneaux, et Mod la catégorie des modules sur les anneaux variables : Les objets sont les couples (A,M) où A est un anneau et M un A-module. Un morphisme de (A,M) dans (B,N) est un couple (u,f), où $u : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et $f : M \to N$ un morphisme de groupes abéliens, tel que :
si $a \in A$ et $m \in M$, $f(a.m) = u(a).f(m)$.

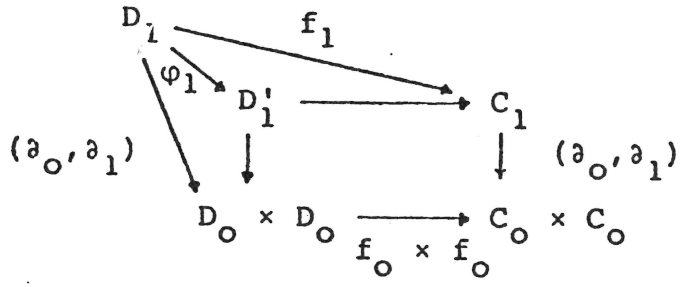
(i) Le foncteur U : Mod → Ann; $(A,M) \mapsto A$, $(u,f) \mapsto u$ est une fibration canoniquement scindée, et une cofibration.

(ii) La cofibration U est-elle co-scindée ?

(iii) La catégorie Mod admet toutes les $\varinjlim$ et $\varprojlim$ et U les préserve.

Exercice 10. 2-catégories internes. Soit $\mathcal{B}$ une catégorie à produits fibrés.

(i) Si C et D sont deux catégories internes à $\mathcal{B}$ et $f : D \to C \in \mathrm{Cat}(\mathcal{B})$, on a un diagramme commutatif dans $\mathcal{B}$, où le carré de droite est un produit fibré.



Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, le foncteur
$\mathrm{Hom}(I,f) : \mathrm{Hom}(I,C) \to \mathrm{Hom}(I,D)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(ii) φ_1 est un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

(iii) Si $\overline{f} : C \to D \in \mathrm{Cart}(C,D)$ admet f comme restriction, $\overline{f}$ est fidèle (resp. pleinement fidèle).
On dit dans ces conditions que f est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*).

-(ii) Soit $\mathrm{Cat}_1(\mathcal{B})$ la catégorie des catégories internes à $\mathcal{B}$ (on ne tient pas compte des 2-cellules). Le foncteur d'*oubli des flèches* : $\mathrm{Fl}_o : \mathrm{Cat}_1(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$; $C \mapsto C_o$, $f \mapsto f_o$ est une fibration. Une flèche $f : D \to C \in \mathrm{Cat}_1(\mathcal{B})$ est cartésienne ssi f est pleinement fidèle. Tout clivage (resp. scindage de $\mathcal{B}$) définit un clivage (resp. scindage) de Fl_o.
(Par contre, le foncteur d'*oubli des objets* :
$\mathrm{Fl}_1 : \mathrm{Cat}_1(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$; $C \mapsto C_1$, n'est pas fibrant. C'est faux même pour $\mathcal{B} = \mathrm{Ens}$).
Si $C \in \mathrm{Fl}_o(C_o)$ et $f_o : D_o \to C_o \in \mathcal{B}$, une flèche $f : f_o^*(C) \to C \in \mathrm{Cat}_1(\mathcal{B})$ cartésienne au-dessus de f_o s'obtient à partir du produit fibré :

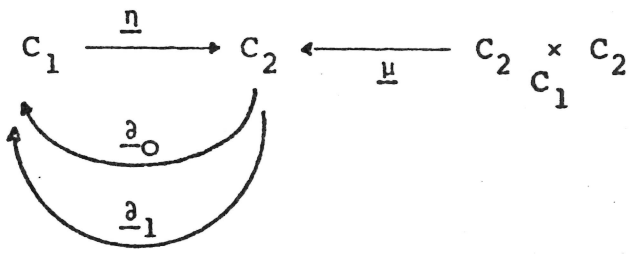
$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_1} & C_1 \\ \downarrow{\scriptstyle (\partial_o,\partial_1)} & & \downarrow{\scriptstyle (\partial_o,\partial_1)} \\ D_o \times D_o & \xrightarrow[f_o \times f_o]{} & C_o \times C_o. \end{array}$$

Il existe une unique catégorie $D = f_o^*(C)$ ~~ayant~~

$(\partial_0, \partial_1) : D_1 \rightrightarrows D_0$ comme graphe sous-jacent et telle que $f = (f_0, f_1)$ soit un foncteur. Quand f_0 est un monomorphisme, $f_0^*(C)$ est "la" *sous-catégorie pleine de* C *ayant* D_0 *comme objet des objets.*

-(iii) Pour $I \in \mathcal{B}$, notons $\Delta_0(I)$ la catégorie interne discrète associée à I. Le foncteur $\Delta_0 : \mathcal{B} \to Cat_1(\mathcal{B})$ est une section de Fl_0 pleinement fidèle et cartésienne (i.e. $\Delta_0 : 1 \to Fl_0 \in Fib(\mathcal{B})$), et Δ_0 est adjoint à gauche de Fl_0.

-(iv) La catégorie $Cat_1(\mathcal{B})$ est à produits fibrés et le foncteur Fl_0 les préserve, donc pour toute $C_0 \in \mathcal{B}$ la fibre $Fl_0(C_0)$ est à produits fibrés préservés par tout foncteur f_0^*, où $f_0 : D_0 \to C_0 \in \mathcal{B}$.
Une *2-catégorie interne* à $\mathcal{B}$, ayant C_0 pour objets des objets est une catégorie $\underline{C}$, interne à $Fl_0(C_0)$. En explicitant, cela donne : deux catégories internes à $\mathcal{B}$, ayant C_0 comme objets des objets, notées C_1 et C_2 et un diagramme de foncteurs internes à $\mathcal{B}$:



vérifiant les propriétés usuelles d'associativité et d'unité et tels que :
$Fl_0(\underline{n}) = Fl_0(\underline{\partial}_0) = Fl_0(\underline{\partial}_1) = Fl_0(\underline{\mu}) = id(C_0)$.
Bien entendu, cela peut se traduire en un énorme diagramme dans $\mathcal{B}$, que nous nous garderons bien d'expliciter.
L'objet des flèches de C_1 (resp. C_2) est appelé *objet des flèches* (resp. *2-cellules*) de $\underline{C}$ et noté $\underline{Fl}_1(\underline{C})$ (resp. $\underline{Fl}_2(\underline{C})$). L'objet C_0 est noté $\underline{Fl}_0(\underline{C})$. La catégorie C_1 est

dite déduite de $\underline{C}$ par *oubli des 2-cellules*, ou encore *1-squelette* de $\underline{C}$ et notée $S_1(\underline{C})$.
On notera $\underline{C} = (C_o, C_1, C_2)$ en omettant les flèches structurales. On a clairement : $\underline{Fl}_1(\underline{C}) = Fl_o(C_2)$.
Un *2-foncteur interne* de $\underline{C}$ dans $\underline{D} = (D_o, D_1, D_2)$ est un triplet $\underline{f} = (f_o, f_1, f_2)$, où $f_o : C_o \to D_o \in \mathcal{B}$, $f_i : C_i \to D_i \in Cat(\mathcal{B})$ $(i=1,2)$ rendant commutatifs les diagrammes évidents. D'où une catégorie notée $2\text{-}Cat_1(\mathcal{B})$, munie de foncteurs évidents :

$$\underline{Fl}_i : 2\text{-}Cat_1(\mathcal{B}) \to \mathcal{B} \quad (i=0,1,2) \text{ et}$$

$$S_1 : 2\text{-}Cat_1(\mathcal{B}) \to \mathcal{B};\ \underline{C} \mapsto C_1;\ \underline{f} \mapsto f_1.$$

-(v) Le foncteur S_1 est une fibration, donc le composé $Fl_o \circ S_1 = \underline{Fl}_o$ est une fibration. Si $\underline{C}$ est une 2-catégorie interne et $f_o : D_o \rightarrowtail C_o \in \mathcal{B}$ (resp. $f_1 : D_1 \to C_1 \in Cat_1(\mathcal{B})$) est un monomorphisme, on dit que $f_o^*(\underline{C})$ (resp. $f_1^*(\underline{C})$) est "la" *sous 2-catégorie pleine de* $\underline{C}$ *engendrée* par le sous-objet D_o de C_o (resp. la sous-catégorie D_1 de C_1).

-(vi) Soit C une catégorie interne, ayant C_o pour objet des objets. Alors C est un objet de la fibre de Fl_1 au-dessus de C_o. La catégorie discrète associée à cet objet, notée $\Delta_1(C)$, est un objet de $2\text{-}Cat_1(\mathcal{B})$, dans la fibre au-dessus de C de la fibration S_1. D'où un foncteur : $\Delta_1 : Cat_1(\mathcal{B}) \to 2\text{-}Cat_1(\mathcal{B})$, qui est une section cartésienne de S_1, et qui est adjoint à gauche de S_1. On dit que $\Delta_1(C)$ est la *2-catégorie à une dimension* associée à la catégorie interne C.

-(vii) Pour être complet, il faudrait encore définir les notions de : morphismes $\alpha : \underline{f} \Rightarrow \underline{g}$ entre 2-foncteurs, et 2-morphismes $m : \alpha \Rightarrow \beta$ entre tels morphismes, pour obtenir la 3-catégorie (eh, oui!) des 2-catégories internes à $\mathcal{B}$. On pourrait écrire élémentairement des diagrammes horribles,

mais totalement inutiles en vertu de (viii) et (ix) ci-dessous.

- (viii) Tout ce qui précède ne fait intervenir que l'existence de produits fibrés dans $\mathcal{B}$ (*c'est même l'unique intérêt de l'exercice*). Donc si $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ préserve les produits fibrés, il se prolonge aux 2-catégories. C'est le cas en particulier pour $F = \mathrm{Hom}(-,I)$. En outre les $\mathrm{Hom}(-,I)$ reflètent globalement les $\varprojlim$, donc un diagramme $\underline{C}$ de $\mathcal{B}$ est une 2-catégorie ssi pour tout $I \in \mathcal{B}$ $\mathrm{Hom}(I,\underline{C})$ est une 2-catégorie ordinaire, et de même pour les 2-foncteurs.

- (ix) Si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont des 2-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{D}$, un morphisme $\alpha : \underline{f} \Rightarrow \underline{g}$ est une flèche $\alpha : C_o \to \underline{Fl}_1(\underline{D})$, telle que pour tout $I \in \mathcal{B}$ $\mathrm{Hom}(I,\alpha) : \mathrm{Hom}(I,\underline{f}) \Rightarrow \mathrm{Hom}(I,\underline{g})$. Ce qui ramène aux 2-catégories usuelles. La même remarque vaut pour les 2-morphismes.

Exercice 11. La fibration discrète $\mathrm{Ob}(C)$.
(Pour les notations, voir (2.4.)). Soit $C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

(i) Pour toute fibration discrète D, notons $\mathrm{Cart}_o(D,C)$ la catégorie discrète ayant mêmes objets que $\mathrm{Cart}(D,C)$. La correspondance : $D \mapsto \mathrm{Cart}_o(D,C)$ définit un foncteur : $\mathrm{Cart}_o(-,C) : \mathcal{D}\mathrm{isc}(\mathcal{B})^{op} \to \mathcal{D}\mathrm{isc}$ (on rappelle que $\mathcal{D}\mathrm{isc}(\mathcal{B})$ est une catégorie, et $\mathcal{D}\mathrm{isc} = \mathcal{D}\mathrm{isc}(1)$).
Si $I \in \mathcal{B}$, notons $\mathrm{Ob}(C)(I) = \mathrm{Cart}_o(I,C)$. On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{B}^{op} \to \mathcal{D}\mathrm{isc}$, d'où une fibration discrète notée $\mathrm{Ob}(C)$.

(ii) Soit $f : I \to C \in \mathrm{Ob}(C)(I)$. Notons $q(f)$ la valeur $f_I(id_I)$ de f en l'objet générique de la fibration I. La correspondance $f \mapsto q(f)$ définit un foncteur $q : \mathrm{Ob}(C) \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$.

(iii) Pour toute fibration discrète, l'application : $Cart_o(D,q) : Cart_o(D,Ob(C)) \to Cart_o(D,C)$ est bijective, et la bijection est fonctorielle en D.
Explicitons la bijection réciproque. Si $g : D \to C \in Cart_o(D,C)$, on lui associe $\overline{g} : D \to Ob(C)$ défini comme suit : Soit $Y \in D(I)$. Comme $Cart(I,D)$ et $D(I)$ sont équivalentes d'après Yoneda, et discrètes, elles sont isomorphes. Donc Y détermine un unique foncteur $Y : I \to D \in Cart(I,D)$. On pose alors $\overline{g}(Y) = g \circ \overline{Y}$.

(iv) Après ce déluge de formalisme, décrivons plus concrètement Ob(C). Un objet de Ob(C) au-dessus de I s'identifie à un couple formé d'un objet X de C(I), et d'une famille $(\varphi_u : u^*X \to X)$ de flèches cartésiennes au-dessus de u, où $u : J \to I \in \mathcal{B}$. Même si C est scindée, il faut prendre tous les choix possibles de familles d'images réciproques, et la fibre Ob(C)(I) est donc très grosse.

(v) Il est impossible de réduire Ob(C) si on veut conserver la propriété universelle de (iii) car elle détermine Ob(C) à isomorphisme près. Il est tout aussi vain de vouloir réduire Ob(C) "à équivalence près", même si on donne un sens à cette expression. En effet, deux fibrations discrètes équivalentes sont isomorphes.

(vi) Le foncteur $q : Ob(C) \to C$ est fidèle, surjectif sur les objets, mais pas injectif, et Ob(C) n'est pas une sous-fibration de C.

(vii) Même si C est une catégorie interne, si on la regarde comme fibration, on n'a pas $Ob(C)(I) = Hom(I,C_o)$.

(viii) La propriété pour une fibration C d'être équivalente à une fibration C', où C' est interne, même si C est déjà localement petite, ne peut pas se reconnaître sur la

fibration discrète Ob(C). C' est une propriété de C tout entière. Cela n'a rien de surprenant si l'on pense aux catégories ordinaires : la catégorie discrète des espaces vectoriels de dimension finie sur K, et la catégorie discrète des $(K^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont très différentes. C'est au moyen des flèches de la catégorie des espaces vectoriels que s'établit la "comparaison".

(ix) Le lecteur voudra bien nous excuser d'énoncer de pareilles banalités, mais il n'est pas inutile d'en finir une bonne fois avec les erreurs grossières propagées par les tenants des catégories indexées (cf. [Pa. Schu] (II, 2.1.)).

(x) Si l'on veut réserver un sort particulier aux fibrations scindées, c'est très facile, mais sans grand intérêt. Soit C une fibration munie d'un scindage Γ. Notons $F : B^{op} \to Cat$ le foncteur défini par Γ. Le foncteur composé : $B^{op} \xrightarrow{F} Cat \xrightarrow{Ob} \mathcal{D}isc$ détermine une fibration discrète $Ob(C)/\Gamma$ caractérisée à isomorphisme unique près par : pour toute fibration discrète D, on a une bijection, fonctorielle en D, entre $Cart_o(D, Ob(C)/\Gamma)$ et la catégorie discrète $Scin_o(D,C)$ dont les objets sont les foncteurs cartésiens de D dans C respectant les scindages.

(xi) Les constructions de (i) et (x) sont reliées de la façon suivante : si C est une fibration arbitraire, notons (C', Γ') la fibration scindée libre engendrée par C; on a un isomorphisme de fibrations discrètes : $Ob(C) \simeq Ob(C')/\Gamma'$.

(xii) Expliciter la fibration discrète Ob(B) où B est la fibration fondamentale. Décrire Ob(B)(1) quand B est à objet final.

(xiii) Le foncteur q : Ob(C) → C est injectif ssi C est une fibration ordonnée (cf. Exercice 4). Dans ce cas, Ob(C) s'identifie à une sous-fibration de C. C'est le seul cas où Ob(C) est intéressante. On notera l'analogie avec la proposition suivante : une catégorie ordonnée X est équivalente à une petite catégorie ssi Ob(X) est un ensemble. (C'est le seul cas où la connaissance de Ob(X) suffit).

Exercice 12. Familles indexées de foncteurs et équivalences canoniques. Les notations sont celles de [Pa, Schu].

(i) Expliquer ce que peut vouloir dire dans la définition (1.2.) le fait que : F^I *est défini à isomorphisme canonique près.* Cela veut-il dire que l'on peut remplacer chaque F^I par un G^I canoniquement isomorphe et que l'on définit alors la même famille indexée de foncteurs ? Que voudrait alors dire la phrase "ces isomorphismes canoniques doivent vérifier des conditions de cohérence" ? La référence à Grothendieck ne résout rien. Pour Grothendieck, avec ces notations, les F^I sont bien définis. Je ne sais pas répondre à cette question.
Dans ce qui suit, je supposerai les F^I bien définis. C'est ce qui se produit dans tous les cas connus.

(ii) Les F^I doivent-ils respecter les isomorphismes canoniques ? Comme *rien n'est dit à ce sujet*, je vais examiner les deux hypothèses et voir que chacune conduit à des situations paradoxales.

a) On suppose que les F^I respectent les isomorphismes canoniques. Si dans $\underline{A}$ tous les isomorphismes sont canoniques et dans $\underline{B}$ les isomorphismes canoniques sont les identités, on n'aura pour F^I que des foncteurs complètement dégénérés qui tuent tous les automorphismes et tous les isomorphismes. C'est le cas en particulier si on prend $\underline{A} = \underline{S}$ et $\underline{B} = [C]$.

Nous conseillons vivement de prendre $\underline{S}$ = Ens et C une petite catégorie pour voir l'absurdité de la chose.

b) On suppose que les F^I ne respectent pas les isomorphismes canoniques. La notion d'équivalence canonique entre catégories indexées (1.3.) n'est pas transitive. En effet, soient $F_i : \underline{A}_i \to \underline{A}_{i+1}$, $G_i : \underline{A}_{i+1} \to \underline{A}_i$ (i=0,1) des équivalences canoniques, où $\alpha_i : G_iF_i \simeq 1_{A_i}$ et $\beta_i : F_iG_i \simeq 1_{A_{i+1}}$ désignent les isomorphismes canoniques. Si on pose $F = F_1F_0\ \underline{A}_0 \to \underline{A}_2$ et $G = G_0G_1 = \underline{A}_2 \to \underline{A}_0$, il n'y a aucune raison pour que $\alpha : GF \simeq 1_{A_0}$ et $\beta : FG \simeq 1_{\underline{A}_2}$ soient canoniques. (On peut facilement construire des contre-exemples). Il en résulte en particulier qu'une même catégorie indexée $\underline{A}$ peut être canoniquement équivalente à deux catégories $[C_1]$ et $[C_2]$ où C_1 et C_2 ne sont pas isomorphes, *contrairement à l'affirmation de* (1.3.). On construit facilement un exemple où $C_1 = 1$ à partir d'un épimorphisme scindé $I \to 1$ dans S.

(iii) Toutes les notions de petitesse reposent donc sur deux, au moins, considérations fausses : la fibration discrète des objets, et celles qu'on en déduit (flèches, diagrammes, etc.) (cf. 2.0. et 2.2.), et la notion d'équivalence canonique. Il serait trop long, et pas très amusant, de relever les incohérences qui en découlent. Faisons cependant une remarque d'ordre général. Une catégorie fibrée, ou un foncteur cartésien sont des notions très simples et maniables. *Les faire dépendre de clivages ne fait que compliquer les choses.* Mais ici la situation est *bien pire* car on les fait en outre *dépendre du choix d'isomorphismes canoniques dans les fibres.* Que se passe-t-il *si on change les isomorphismes canoniques*, sans changer la fibration ? Voici un exemple simple : soit C interne à $\underline{S}$. Notons [C] la catégorie indexée de [Pa. Schu], et

$\underline{C}$ la même catégorie indexée, mais où tous les isomorphismes sont canoniques. Ce sont des objets très différents. Par exemple, avec la définition (2.1.), $\underline{C}$ n'a pas C_o comme famille générique d'objets, elle peut même n'avoir pas de famille générique du tout! Affirmer que $\underline{C}$ est toujours petite équivaut à l'axiome du choix dans $\underline{S}$. En effet, au sens interne, une famille générique pour $\underline{C}$ est une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C telle que tout objet est isomorphe à un et un seul des X_i. La fibration associée à C n'a pourtant pas changé! La famille identique de foncteurs de $\underline{C}$ dans $[C]$ n'est pas une famille indexée si on retient l'hypothèse (ii)(a). Dans l'hypothèse (ii)(b) pour une famille indexée $\underline{B}$ il y a beaucoup plus de foncteurs de $\underline{B}$ dans $\underline{C}$ que dans $[C]$.

Exercice 13. Soient $C : C \to \mathcal{B}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ deux foncteurs, et $g : C \to \mathcal{D}$ un foncteur au-dessus de $\mathcal{B}$, ayant un adjoint à droite $f : \mathcal{D} \to C$.

(i) f est adjoint à droite au-dessus de $\mathcal{B}$ ssi pour tout $u : I \to J \in \mathcal{B}$, $X \in C(I)$ et $Y \in D(J)$, la bijection : $\mathrm{Hom}(gX,Y) \simeq \mathrm{Hom}(X,fY)$ induit par restriction une bijection : $\mathrm{Hom}_u(gX,Y) \simeq \mathrm{Hom}_u(X,fY)$.

(ii) Si en outre, g est pleinement fidèle et D est une fibration, alors C est une fibration, g et f sont cartésiens et g reflète les flèches cartésiennes. (C'est le cas en particulier quand C est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$, coréflexive au-dessus de $\mathcal{B}$).

Exercice 14. Soit $C : C \to \mathcal{B}$ un foncteur. Notons $(\mathcal{B},C)$ la catégorie ayant pour objets les couples (u,X) où $X \in C$ et $u : I \to C(X) \in \mathcal{B}$.

(i) Le foncteur $S(C) : (\mathcal{B},C) \to \mathcal{B}$; $(u,X) \mapsto I$ est une fibra-

tion scindée.

(ii) Le foncteur $g_C : C \to (B,C)$; $X \mapsto (id_{C(X)}, X)$ est au-dessus de B, pleinement fidèle et injectif.

(iii) C est une fibration ssi g_C a un adjoint à droite f_C au-dessus de B. Tout choix d'un tel f_C détermine un clivage de C.

(iv) Pour toute fibration $D : \mathcal{D} \to B$ le foncteur composé :

$$Cart_B(S(C),D) \hookrightarrow Fonct_B((B,C),\mathcal{D}) \xrightarrow{Fonct_B(g_C,D)} Fonct_B(C,\mathcal{D})$$

est une équivalence de catégories.
Une équivalence réciproque associe à tout $f : C \to \mathcal{D}$ au-dessus de B, le foncteur composé :
$(B,C) \xrightarrow{S(f)} (B,D) \xrightarrow{f_D} \mathcal{D}$.
On dit que $S(C)$ est la fibration universelle associée à C.

(v) Cas particuliers :

1) $C = id_B$. Alors $S(C)$ est la fibration universelle $S : B^2 \to B$, et (iii) donne une équivalence entre $Cart_B(S,D)$ et la catégorie des sections de D au-dessus de B. Cet exemple montre en outre que même si C est une fibration, $S(C)$ n'est pas équivalente à C.

2) $C = 1$. Tout objet I de B définit un foncteur $\overline{I} : 1 \to B$, alors $S(\overline{I})$ est la fibration $I : B/I \to B$, et (iii) donne l'équivalence de Yoneda : $Cart_B(I,D) \tilde{\to} D(I)$.

(vi) Pour les amateurs de formalisme :

1) $C \mapsto S(C) : Cat/B \to Fib(B)$ est un 2-adjoint de l'inclusion $Fib(B) \hookrightarrow Cat/B$.

2) $C \mapsto S(C)$: $Cat/\mathcal{E} \to Cat/\mathcal{B}$ est un 2-triple strict sur $Cat/\mathcal{B}$.

3) Si C est une fibration scindable, un scindage de C est un f_C qui est une structure d'algèbre sur ce 2-triple (et réciproquement).

4) Si C est une fibration, tout clivage de C est une structure d'algèbre au sens large sur ce triple.

5) Tout ce qui précède peut se faire en remplaçant Cat par une 2-catégorie C à produits fibrés telle que pour tout $X \in C$ le foncteur $Y \mapsto \underline{Hom}(Y,X)^2 : C \to Cat$ soit représentable, et en remplaçant $\mathcal{B}$ par un objet B arbitraire de C. Par exemple, si $\mathcal{B}$ est à produits fibrés, on peut prendre $C = Cat(\mathcal{B})$ et B une catégorie interne à $\mathcal{B}$. On obtient alors les fibrations internes sur B.

Exercice 15. Comportement de Ω et ω par changement de base.

(i) Soit $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ un foncteur. Notons $v \subset \Omega$ et $v' \subset \Omega'$ les co-cribles universels dans $Fib(\mathcal{B})$ et $Fib(\mathcal{B}')$. Alors $F^*(v) \subset F^*(\Omega)$ est un co-crible dans $Fib(\mathcal{B}')$, il est donc classifié par un foncteur cartésien unique $\chi_F : F^*(\Omega) \to \Omega'$.

(ii) Supposons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ à produits fibrés et F commutant aux produits fibrés. Notons $v \subset \omega$ et $v' \subset \omega'$ les co-cribles définissables universels. En général, la restriction de χ_F à $F^*(\Omega)$ ne se factorise pas par ω'. Plus formellement, on a des sous-fibrations $\omega' \subset \Omega'$, $\omega \subset \Omega$, d'où $F^*(\omega) \subset F^*(\Omega)$ et $\chi_F^{-1}(\omega') \subset F^*(\Omega)$, mais $F^*(\omega) \not\subset \chi_F^{-1}(\omega')$. On peut par contre définir un morphisme $\chi^F : \omega' \to F^*(\omega)$.

a) Définition naïve. Pour tout $I' \in \mathcal{B}'$,

$F^*(\omega)(I') \simeq \omega(F(I'))$ est la catégorie ordonnée des sous-objets de $F(I')$ dans $\mathcal{B}$. Le foncteur F préserve les monomorphismes. Le foncteur cartésien χ^F est défini fibre par fibre par $(\chi^F)_{I'} : \omega'(I') \to F^*(\omega)(I')$ associant à tout sous-objet de I', représenté par $J' \rightarrowtail I'$, le sous-objet de $F(I')$ représenté par $F(J') \rightarrowtail F(I')$.

b) Définition fonctorielle. Dans le diagramme commutatif ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}'^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{B}^2 \\ {\scriptstyle \mathcal{B}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}} \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \end{array}$$

le foncteur F^2 est cartésien au-dessus de F, et induit par restriction un foncteur $\mathrm{Mono}(F) : \mathrm{Mono}(\mathcal{B}') \to \mathrm{Mono}(\mathcal{B})$, cartésien au-dessus de F. (Notations de 2.11.5.).
D'où, par changement de base, deux foncteurs cartésiens au-dessus de $\mathcal{B}'$

$$\rho_1^F : B' \to F^*(B) \qquad \text{et} \qquad \rho^F : M' \to F^*(M).$$

En passant aux fibrations ordonnées associées, on obtient des foncteurs cartésiens $\chi_1^F : \Omega_1' \to F^*(\Omega_1)$ et $\chi^F : \omega' \to F^*(\omega)$. (La définition fonctorielle est plus simple ; elle fournit en outre χ_1^F, et rend évidentes les propriétés de naturalité de χ^F et χ_1^F par rapport à F).

(iii) On obtient ainsi un diagramme dans $\mathrm{Fib}(\mathcal{B}')$

$$\begin{array}{ccc} \omega' & \xrightarrow{\chi^F} & F^*(\omega) \\ {\scriptstyle i'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \Omega' & \xleftarrow[\chi_F]{} & F^*(\Omega) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions. Ce diagramme n'est pas commutatif en général. On a seulement $i' \leqslant \chi_F \, i \, \chi^F$. (On rappelle que $\mathrm{Cart}_{\mathcal{B}'}(C',\Omega')$ est ordonnée pour toute $C' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B}')$, donc aussi pour $C' = \omega'$).

(iv) Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

1) Le diagramme de (iii) est commutatif.

2) Le foncteur χ^F est conservatif.

3) Si m' est un monomorphisme de $\mathcal{B}'$ tel que $F(m')$ est un isomorphisme, m' est un isomorphisme.

(v) On a les implications suivantes :
F conservatif $\Rightarrow$ F vérifie les conditions de (iv) $\Rightarrow$ F fidèle.

Exercice 16. Quelques réflexions sur "l'objet final qui n'existe pas".

I - Considérations heuristiques.

(i) Soit $\mathcal{B}$ une catégorie. Sans aucune hypothèse sur $\mathcal{B}$, la catégorie $\hat{\mathcal{B}}$ des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{B}$ hérite de beaucoup de propriétés de Ens, et en particulier est un topos de Grothendieck. La généralisation 2-catégorique de $\hat{\mathcal{B}}$ est la 2-catégorie $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ (et pas $\mathrm{Cat}(\hat{\mathcal{B}})$ qui n'utilise pas complètement la structure de 2-catégorie de Cat). Il est donc naturel que $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ "ressemble beaucoup" à $\mathrm{Cat} = \mathrm{Fib}(1)$, pour toute $\mathcal{B}$.

(ii) Si on veut approfondir cette ressemblance, il faut faire jouer un rôle privilégié aux ensembles, et considérer non pas Cat mais l'inclusion Ens $\hookrightarrow$ Cat, généralisée ici en $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, en première approximation. Pour les

questions un peu moins superficielles, il faut supposer que "les ensembles ont un minimum de propriétés" (existence d'objet final, de quelques limites et propriétés d'exactitude, etc...). Il semblerait donc que l'analogue est d'imposer à $\mathcal{B}$ certaines propriétés. C'est *inutile*, et cela nuit à la généralité et *écarte des exemples importants*. Voir ci-dessous.

(iii) En fait, dans le cadre des fibrations, ce qui joue le rôle de Ens ce n'est pas $\mathcal{B}$, mais la fibration fondamentale $B : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$. C'est elle qui sert à tester la "petitesse", globale ou locale, et c'est sur cette *fibration* qu'il faudra le cas échéant mettre des hypothèses.

(iv) Une des leçons de la théorie des topos est que les "ensembles" n'ont pas forcément "assez de points". La façon la plus radicale pour y arriver, est de faire en sorte qu'il n'y ait "pas de points du tout", i.e. de supposer que $\mathcal{B}$ puisse ne pas avoir d'objet final.

II - Nous allons donner un exemple important où $\mathcal{B}$ n'a pas d'objet final, mais la fibration B a toutes les propriétés que l'on peut désirer.

(i) Pour que la fibration B existe, $\mathcal{B}$ doit être à produits fibrés, ce qui s'exprime trivialement par le fait que, pour tout $u : J \to I \in \mathcal{B}$, le foncteur $\coprod_u : \mathcal{B}/J \to \mathcal{B}/I$ a un adjoint à droite u^*. Mais si u est un isomorphisme, $\coprod_u$ est un isomorphisme et a donc un adjoint à droite $u^* = \coprod_{u^{-1}}$, qui est d'ailleurs aussi adjoint à gauche.

(ii) Donc si $\mathcal{B}$ est un groupoïde, la fibration B existe, elle est scindée et les foncteurs u^* sont des adjoints à droite $\prod_u$ (on verra l'importance de cette propriété dans la suite.

(iii) En outre pour tout $I \in \mathcal{B}$, la *fibre* $B(I)$ *est équivalente à 1*, donc a toutes les sortes de limites et toutes les propriétés d'exactitude que l'on peut souhaiter, et les u^* commutent à ces limites!
Tout ce que l'on dira au sujet de $Fib(\mathcal{B})$, en supposant que $\mathcal{B}$ a certaines de ces propriétés, s'appliquera donc au cas où $\mathcal{B}$ est un groupoïde, et en particulier un groupe. (Inutile de souligner l'importance de $Disc(\mathcal{B}) = \hat{\mathcal{B}}$ quand $\mathcal{B}$ est un groupe; $Fib(\mathcal{B})$ mériterait dans ce cas une étude très fine).

(iv) Notons que si $\mathcal{B}$ est un groupoïde non équivalent à *1*, il n'a pas d'objet final, donc pas de produits finis, et par dualité il n'a ni objet initial ni sommes finies. Il n'a pas non plus de noyaux ni de conoyaux, et cependant la fibration B est équivalente à la fibration $1_{\mathcal{B}}$. Cette dernière propriété caractérise d'ailleurs les groupoïdes.

III - <u>Topos partiels</u> : Une catégorie $\mathcal{B}$ est un topos partiel ssi :

1) $\mathcal{B}$ est à produits fibrés.

2) Pour tout $I \in \mathcal{B}$, la catégorie $\mathcal{B}/I$ est un topos.

3) Pour tout $u : J \to I$, le foncteur $u^* : \mathcal{B}/I \to \mathcal{B}/J$ est un morphisme logique, ayant un adjoint à droite $\prod_u$.

(i) Notons que, sous ces hypothèses, les adjonctions $\coprod_u \dashv u^* \dashv \prod_u$ définissent un morphisme essentiel de $\mathcal{B}/J$ dans $\mathcal{B}/I$, et que $\coprod_u$ préserve les produits fibrés et les noyaux.

(ii) Un topos partiel est un topos ssi ~~il~~ a un objet final.

(iii) Avec des modifications très faciles, *tout ce que l'on dit au sujet des topos se transpose aux topos partiels.*

(iv) On a un procédé très simple pour obtenir des topos partiels, qui ne sont pas des topos. Soit E un topos. Si B est un crible de E, pour tout $I \in B$ on a $B/I = E/I$. Donc B est un topos partiel et il n'est un topos que si, en tant que crible, il est représentable.
Par exemple, si U est un ensemble de sous-objets de 1 tel que : $U \in U$ et $V \subset U$ entraîne $V \in U$, on peut prendre pour B la sous-catégorie pleine de E ayant pour objets les I à support dans U. Alors B est un topos partiel, et n'est un topos que si U a un plus grand élément.
Penser au cas où E = Fais(X), catégorie des faisceaux sur X topologique, et U est l'ensemble des ouverts de X relativement compacts. (On suppose X séparé pour simplifier).

(v) Il convient de noter que tous les topos partiels ne sont pas obtenus de cette façon à partir d'un topos. Ainsi *tout groupoïde B est un topos partiel* d'après II, et il n'a pourtant presqu'aucune limite.

(vi) La notion de morphisme géométrique entre topos partiels ne pose aucun problème.

(vii) Dans tout ce qui précède, on peut prendre à volonté le mot topos soit au sens de Grothendieck, soit au sens élémentaire.

(viii) Bien que B n'aie pas de classifiant des sous-objets, l'objet ω de Fib(B) joue parfaitement ce rôle. En particulier, pour tout $I \in B$, l'objet ordonné ω_I de B/I est déterminé par la formule usuelle : $\omega_I = I^*(\omega)$. (On rappelle que I désigne le foncteur $B/I \to B$, que $I^*(\omega)$ est une fibration

ordonnée, ainsi que $\omega_I = \int_{\mathcal{B}/I} \mathrm{Hom}(-,\omega_I)$ et l'égalité ci-dessus désigne un isomorphisme évident entre fibrations sur $\mathcal{B}/I$. Comme ces fibrations sont ordonnées, les flèches cartésiennes sont uniques ainsi que les scindages, et l'isomorphisme est uniquement défini).

IV - Ce qui a été dit des topos partiels peut être répété pour d'autres sortes de catégories : catégories régulières partielles, catégories logiques partielles, etc ... La notion de fibration à fibres dans un corpus [Be] permet d'unifier ces définitions. Donnons un exemple d'algèbre de Heyting partielle.

(i) Soit $\mathcal{E}$ un topos. Notons $\mathcal{B}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{E}$ et pour flèches les monomorphismes de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{B}$ est à produits fibrés. La fibration B est telle que chaque fibre B(I) est une algèbre de Heyting, et les foncteurs u* ont des adjoints à gauche $\coprod_u$ et à droite $\prod_u$ définissant des morphismes essentiels d'algèbres de Heyting.

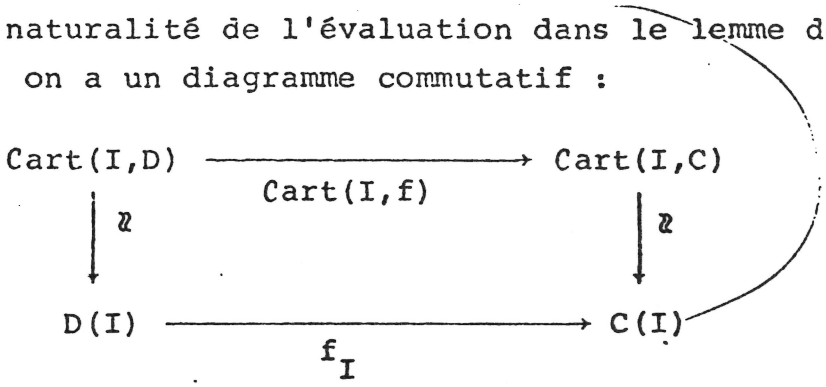
(ii) On peut dans ce qui précède remplacer "topos" par "topos partiel". C'est même intéressant si on veut obtenir le cas particulier suivant : Soit X un ensemble infini. Notons $\mathcal{B}$ la catégorie ordonnée par inclusion des parties finies de X. Alors $\mathcal{B}$ est à produits fibrés, sans objet final, la fibration B est scindée, les fibres B(I) sont des algèbres de Boole finies donc complètes, les u* ont des adjoints à droite et à gauche et sont des homomorphismes d'algèbres de Boole.

(iii) Pour $X = \mathbb{N}$, la catégorie $\mathcal{B}$ s'identifie à la catégorie ayant pour objets les cardinaux finis et pour flèches les applications strictement croissantes.

(iv) Les cylindrifications en logique algébrique utilisent les algèbres de Boole partielles de (ii) et (iii). Si on prend la notion d'algèbre de Boole au sens des ensembles préordonnés, de façon à pouvoir parler par exemple de l'algèbre de Boole des formules d'une théorie, tout groupoïde est une algèbre de Boole partielle d'après (II).

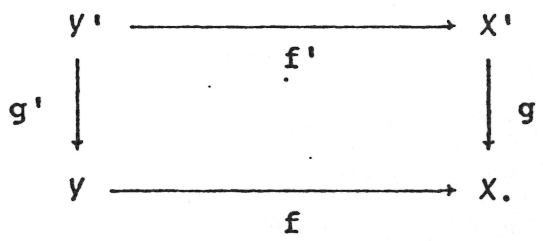
Exercice 17. Remarques sur les fibrations dans Fib(B).

1. Preuve de (3.3.4.) : (ii) ⇒ (iii).
D'après la naturalité de l'évaluation dans le lemme de Yoneda (2.8.3.) on a un diagramme commutatif :



où les flèches verticales sont des équivalences, et Cart(I,f) est une fibration, donc f_I est une fibration. Ce qui prouve a). On démontre b) de la même manière.

Remarque : La démonstration ci-dessus est *fausse*. On peut très bien avoir un diagramme commutatif, où g, g' sont des équivalences et f' est une fibration sans que f soit une fibration.



L'exemple, *le plus simple*, est fourni en prenant $Y = Y' = X' = 1$, $X = Iso$ et $f = g = 0 : 1 \to Iso$ (notations

de (6.4.1.)).
Ceci est par contre impossible si, en outre, on sait que g et g' sont surjectives, en vertu des remarques suivantes, que l'on prouve facilement :

(i) Une équivalence surjective est une fibration. Donc g est une fibration et aussi $g \circ f'$ par composition.

(ii) Si un composé $f \circ g'$ est une fibration et g' est une équivalence surjective, alors f est une fibration.

La preuve de a), correcte cette fois-ci, résulte de la surjectivité dans le lemme de Yoneda. Cette surjectivité sert aussi pour b) laissé en exercice.

Noter que dans les "catégories indexées" cette surjectivité, sans laquelle le lemme de Yoneda ne sert pratiquement à rien car la notion de fibration n'est pas stable par équivalence, n'est jamais utilisée ni même *mentionnée*.

2. L'isomorphisme : $Fib(C) \xrightarrow{\sim} Fib(C)$. (Cf. 3.3.6.)
Soit $C : B^{op} \to Ens$ un objet de $\hat{B}$. Notons encore $C : C \to B$ la fibration discrète associée à C.

(i) L'isomorphisme ci-dessus, restreint aux fibrations discrètes, donne l'isomorphisme important $\hat{B}/C \simeq \hat{C}$.

(ii) Pour C discrète, toute flèche $f : D \to C$ de $Fib(B)$ est une fibration, d'où l'isomorphisme $Fib(B)/C \simeq Fib(C)$ prolongeant celui de (i).

3. Interpréter la composition des fibrations comme une "2-extension de Kan pour les pseudo-foncteurs" (exclusivement réservé aux Max-spécialistes de Lax-foncteurs en tous genres).

Exercice 18. Exemples de notions qui se fibrent. (Cf. (3.3.7.) (iii)).

1) Un foncteur $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ vérifie P_1 (resp. P_2, P_3, P_4, P_5) ssi f est une fibration discrète (resp. élémentaire, ordonnée, préordonnée, en groupoïdes).

(i) Les propriétés P_k sont stables par composition.

(ii) Elles sont stables par exponentielle : i.e. si f vérifie P_k, pour toute catégorie X, le foncteur $f^X : \mathcal{D}^X \to \mathcal{C}^X$ vérifie P_k.

(iii) Elles sont stables par changement de base : i.e. dans le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{C}' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \end{array}$$

si f vérifie P_k, il en est de même de f'.

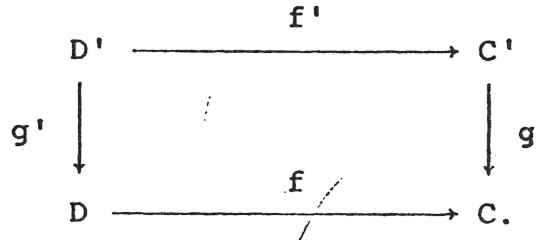
2) Ce qui précède se fibre de la façon suivante. Soient $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ des fibrations, et $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$. Montrer l'équivalence des conditions :

a) Pour toute $E \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, $\mathrm{Cart}(E,f) : \mathrm{Cart}(E,D) \to \mathrm{Cart}(E,C)$ vérifie P_k.

b) Le foncteur $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ vérifie P_k.

c) $f \in \mathrm{Fib}(C)$ et, pour tout $I \in \mathcal{B}$, $f_I : D(I) \to C(I)$ vérifie P_k.

On dit alors que la flèche f de Fib(B) vérifie P_k. Les propriétés (i) à (iii) ci-dessus restent vraies, en notant que pour (iii), si f vérifie P_k, pour toute $g : C' \to C \in Fib(B)$ le produit fibré ci-dessous existe et est absolu :



Il y a bien d'autres propriétés P qui ont les mêmes vertus que les P_k. En outre pour les P_k, il y a bien d'autres "variations". Par exemple : Soient $f : \mathcal{D} \to C$ et $g : E \to \mathcal{D}$ des fibrations.

(iv) Si $f \circ g$ vérifie P_k, alors g vérifie P_k.

(v) Si g est surjectif sur les objets et $f \circ g$ vérifie P_k, alors f vérifie P_k.

Traduire (iv) et (v) dans le cas particulier où $C = 1$. Fibrer les résultats (iv) et (v).

Remarque : Un des intérêts de (iv) et (v) est qu'ils permettent l'utilisation du lemme de Yoneda. La surjectivité sur les objets est essentielle dans (v), on le voit déjà dans le cas particulier où $C = 1$.
On interprètera plus tard (i), (iii), (iv) et (v) en termes de calibrages.

3) On peut fibrer les notions de clivage ou scindage d'une fibration. Pour éviter les "resp.", faisons-le pour les scindages.

Soient $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ des fibrations, et $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(C)$. Un *scindage* ϕ *de* f *au-dessus de* $\mathcal{B}$ est défini par la donnée, pour toute $E : \mathcal{E} \to \mathcal{B} \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, d'un scindage $\phi(E)$ de la fibration :

$$\mathrm{Cart}(E,f) : \mathrm{Cart}(E,D) \to \mathrm{Cart}(E,C),$$

naturel en E, i.e. tel que si $\beta : g \to g'$ est une flèche cartésienne de $\mathrm{Cart}(E,D)$, appartenant au scindage $\phi(E)$, et $h : E' \to E \in \mathrm{Cart}(E',E)$, alors $\beta * h : gh \to g'h$, qui est cartésienne, appartient au scindage $\phi(E')$. Il est clair que f peut être scindé au-dessus de $\mathcal{B}$, sans que ni C ni D n'admettent de scindage (prendre par exemple $f = id_C$).
On vérifie alors les propriétés suivantes :

(i) Si $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(C)$ et C est une fibration discrète sur $\mathcal{B}$, f a un scindage unique au-dessus de $\mathcal{B}$. En particulier, l'unique foncteur cartésien $\varepsilon_D : D \to 1$ est toujours une fibration scindée (au-dessus de $\mathcal{B}$).

(ii) Si $k : C' \to C \in \mathrm{Fib}(\mathcal{B})$, tout scindage ϕ de $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(C)$ détermine un scindage $k^*(\phi)$ de $k^*(f) : D' \to C' \in \mathrm{Fib}(C')$ défini par le produit fibré ci-dessous, qui existe et est absolu, car f est une fibration.

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{f' = k^*(f)} & C' \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ D & \xrightarrow{f} & C. \end{array}$$

(iii) Si ϕ et ψ sont des scindages de $f : D \to C \in \mathrm{Fib}(C)$ et $g : E \to D \in \mathrm{Fib}(D)$, ils déterminent un scindage $\phi\psi$ de $fg : E \to C \in \mathrm{Fib}(C)$.

(iv) Si $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, tout scindage ϕ de f détermine un scindage $F^*(\phi)$ de $F^*(f)$. En utilisant (i), on obtient comme

cas particulier de (ii) :

(v) Si C et D $\in$ Fib($\mathcal{B}$) la projection C×D → D a un scindage canonique. Comme cas particulier de (iv), en utilisant les foncteurs $1 \to \mathcal{B}$, on obtient :

(vi) Si ϕ est un scindage de f, il détermine, pour tout $I \in \mathcal{B}$, un scindage ϕ_I de la fibration $f_I : D(I) \to C(I)$.

Ces scindages vérifient en outre des conditions de compatibilité avec les u* assez longues à écrire, qui résultent de (iv) en considérant les foncteurs de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{B}$. Inversement, la donnée de scindages ϕ_I vérifiant ces conditions détermine ϕ.
Les considérations qui suivent permettent de construire beaucoup d'exemples. Un *scindage global* de $f : D \to C \in$ Fib(C) est un scindage de la fibration $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. En utilisant l'isomorphisme Fib(C) $\simeq$ Fib($\mathcal{C}$) on obtient :

(vii) Tout scindage global ϕ de f définit un scindage de f au-dessus de $\mathcal{B}$ appelé restriction de ϕ et noté $\phi/\mathcal{B}$.

Il y a des scindages au-dessus de $\mathcal{B}$ qui ne sont pas restrictions de scindages globaux. Deux scindages globaux distincts peuvent avoir même restriction. Ainsi le scindage canonique au-dessus de $\mathcal{B}$ de $\varepsilon_C : C \to 1$ n'est restriction d'un scindage global que si la fibration $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ est scindable, et dans ce cas tous les scindages de C ont même restriction.

En utilisant les propriétés de $C \mapsto C^{op}$, tout ce qui précède se dualise aux cofibrations dans Fib($\mathcal{B}$). Noter que, si $f : D \to C$ est une cofibration de Fib($\mathcal{B}$), un co-scindage global de f est un scindage de la fibration

$\mathcal{D}^{op}/\mathcal{B} \to \mathcal{C}^{op}/\mathcal{B}$. Cela n'a rien à voir avec un co-scindage du foncteur $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, qui n'a aucune raison d'être une cofibration.

Toutes ces propriétés se démontrent sans peine par réductions successives aux fibrations sur *1*, en utilisant les *isomorphismes* des paragraphes 4 et 5.

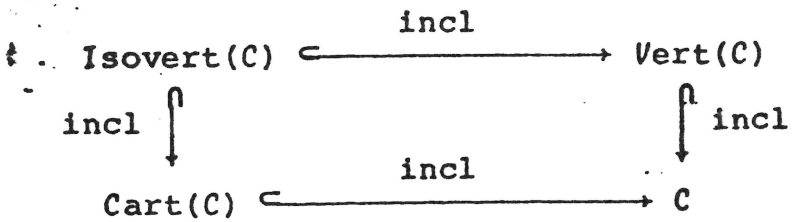
Presque rien ne subsisterait si l'on n'avait que des *équivalences*. Par ailleurs, sans parler des démonstrations, il serait presqu'impossible de formuler de manière précise les énoncés de cet exercice en termes de pseudo-foncteurs, et encore moins de catégories indexées.
Le formalisme des catégories fibrées est très souple et maniable. Il pourrait être encore allégé en utilisant des notions un peu plus sophistiquées de la théorie des 2-catégories.

Exercice 19. Remarques sur l'égalité des objets.
Si $C \in Fib(\mathcal{B})$, la diagonale $\delta : C \rightarrowtail C \times C$ n'est pas en général une sous-fibration. Elle n'est même pas transportable. Techniquement c'est de là que proviennent les problèmes pour les produits fibrés et les noyaux dans $Fib(\mathcal{B})$. Mais de manière beaucoup plus profonde, l'égalité des objets n'est pas définissable pour les catégories fibrées (cf. Chapitre).
Intuitivement cela signifie que si C est une catégorie ordinaire, non petite, et $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ sont deux familles arbitraires d'objets de C; cela ne devrait avoir aucun sens de parler du sous-ensemble J de I défini par $J = \{i \mid X_i = Y_i\}$. Bien qu'en apparence paradoxale, cette remarque est conforme à la fois à la théorie des ensembles, si on considère que C est vraiment une "classe", et à la morale des catégories, où les objets sont définis le plus souvent à isomorphisme *unique* près par des propriétés de

diagrammes. L'égalité de deux objets doit, pour être "reconnaissable", être "forcée" par des propriétés de flèches ayant ces objets pour source ou pour but. Rien d'étonnant à ce que, dans le contexte général où nous nous plaçons, remplaçant Ens par une *catégorie B arbitraire*, ces problèmes en apparence marginaux, prennent une importance majeure. On ne peut pas les éviter en définissant les objets "à isomorphisme près" car on ne saurait "quel isomorphisme choisir", et on serait donc obligé de "tuer" tous les automorphismes, ce qui est absurde même pour B = Ens. (Cf. Exercices 3, 11 et 12).
Le seul cadre où l'égalité des objets se comporte bien est celui des fibrations scindées et des foncteurs respectant les scindages; mais il exclut les exemples mathématiques les plus importants.

Exercice 20. Duale d'une fibration.
L'intuition nous indique que : "la duale C^{op} d'une fibration C s'obtient en changeant le sens des flèches verticales, sans changer celui des flèches cartésiennes". Il y a cependant un petit problème concernant les flèches qui sont à la fois verticales *et* cartésiennes, à savoir les isomorphismes verticaux. Nous allons donner un sens précis à cette intuition, en levant l'ambiguïté ci-dessus. Cela nous permettra en outre de compléter (4.4.) sur quelques points.
Soit $C : C \to B$ une fibration. Notons Cart(C) la catégorie ayant les mêmes objets que C et pour flèches les flèches cartésiennes de C, et Isovert(C) = Cart(C) ∩ Vert(C).

(i) Le diagramme ci-dessous où toutes les flèches désignent les inclusions évidentes est une somme amalgamée (en un produit fibré) dans Cat.

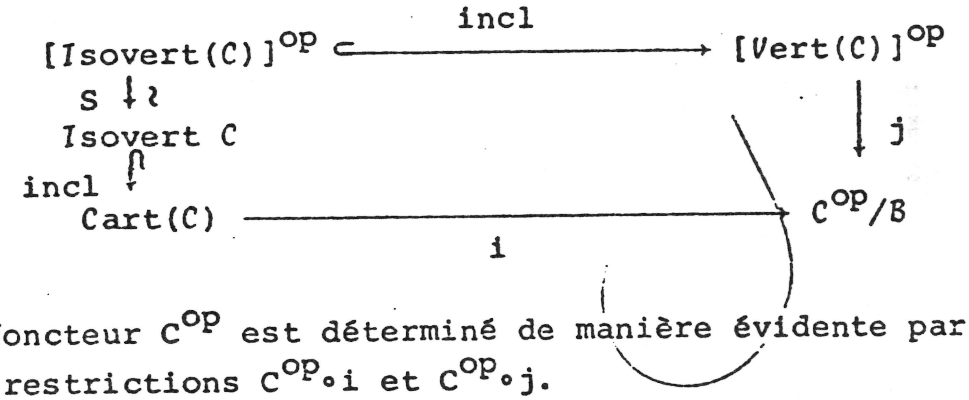


(ii) Soit $C^{op} : C/B^{op} \to B$ la duale de C. Avec les notations de (4.4.) on a des foncteurs fidèles et bijectifs sur les objets :

$$i : Cart(C) \to C^{op}/B \qquad \varphi' \mapsto \varphi' \circ id^*$$

$$j : Vert(C)^{op} \to C^{op}/B \qquad \varphi \mapsto id \circ \varphi^*.$$

Notons $S : [Isovert(C)]^{op} \to Isovert(C)$ l'isomorphisme $\rho \mapsto \rho^{-1}$. Le diagramme ci-dessous est une somme amalgamée et un produit fibré dans Cat.



Le foncteur C^{op} est déterminé de manière évidente par ses restrictions $C^{op} \circ i$ et $C^{op} \circ j$.

(iii) On aurait pu définir C^{op} de cette façon, mais les sommes amalgamées dans Cat sont en général très compliquées. Le contenu de (4.4.) signifie essentiellement que la somme ci-dessus se décrit de manière très simple par générateurs et relations, i.e. toutes les "règles de calcul" dans C^{op} sont données par :

$(\varphi' \bullet id^*) \circ (\psi' \bullet id^*) = \varphi'\psi' \bullet id^*$ (pour φ' et ψ' cartésiennes)

$(id \bullet \varphi^*) \circ (id \bullet \psi^*) = id \bullet (\psi\varphi)^*$ (pour φ et ψ verticales)

et $id \bullet \rho^* = \rho^{-1} \bullet id^*$ (pour ρ isomorphisme vertical).

(iii) Etablir l'existence d'isomorphismes naturels :

$$(\varprojlim C)^{op} \xrightarrow{\sim} \varprojlim(C^{op}) \text{ et } \varinjlim(C^{op}) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim C)^{op}.$$

(iv) Si $f : C \to D \in Fib(\mathcal{B})$ admet $g : D \to C$ comme adjoint à gauche dans $Fib(\mathcal{B})$, f^{op} admet g^{op} comme adjoint à droite.

(v) Si X est un groupoïde, on a un isomorphisme $X^{op} \xrightarrow{\sim} X$, $\xi \mapsto \xi^{-1}$. Fibrer cet isomorphisme, i.e. pour C groupoïde fibré sur $\mathcal{B}$, établir formellement (sans passer par les fibres) l'existence d'un isomorphisme $C^{op} \to C$.

(vi) Si $C : C \to \mathcal{B}$ est un homomorphisme surjectif de groupes (Exercice 3), expliciter $C^{op}/\mathcal{B}$ et C^{op}. Il ne suffit pas de dire que $Ker(C^{op}) = [Ker(C)]^{op}$; il faut encore préciser l'extension ci-dessous :

$$[Ker(C)]^{op} \rightarrowtail C^{op}/\mathcal{B} \xrightarrow{C^{op}} \mathcal{B}.$$

(vii) Montrer formellement, en utilisant (i) et (ii), que si C est une fibration discrète, ou élémentaire, ou en groupoïdes, ou ordonnée "etc..." il en est de même de C^{op}.

(viii) Etablir formellement les isomorphismes :

$$Cart(C,D)^{op} \simeq Cart(C^{op},D^{op}) \quad \text{et} \quad (C^{op})^{op} \simeq C.$$

Remarque : Les catégories de fractions peuvent évidemment s'exprimer sous forme de sommes amalgamées dans Cat. Les diagrammes de (i) et (ii) permettent d'avoir un bon formalisme pour le calcul de fractions dans les catégories fibrées, en séparant les "composantes" verticales et cartésiennes. Les isomorphismes verticaux "s'inversent automatiquement".