§ 0. Introduction.

Lorsque la manipulation des catégories et de foncteurs, d'abord perçue comme un artifice linguistique, puis comme un outil commode pour formuler et établir certains théorèmes généraux, s'est progressivement muée en une théorie mathématique à part entière, ses adeptes se sont trouvés confrontés à des problèmes de fondements. Plusieurs tentatives ont été faites pour fonder la théorie des catégories sur la théorie des ensembles, mais aucun de ces essais n'a fourni de réponse réellement satisfaisante. Et les catégoriciens, fascinés par les développements nouveaux tels que la théorie des topos élémentaires — qui remettait d'ailleurs en cause le rôle primordial des ensembles —, ont "oublié" les questions de fondement pour continuer à travailler à l'aise, en se contentant d'une éventuelle allusion au choix d'un univers convenable. A regarder de plus près ce travail, dès qu'on s'avance vers des théorèmes de complétude ou d'existence de foncteurs adjoints, on voit manipuler diverses "familles" d'objets dans les catégories considérées, familles indexées en principe par ~~par des~~ des ensembles. L'ennui, c'est qu'en manipulant ces familles le catégoricien se sert couramment d'"ensembles" dont l'existence n'est nullement assurée par l'axiomatique ensembliste. A propos d'une famille $(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$, il parlera de "l'ensemble I_0 des indices pour lesquels la flèche f_i est un monomorphisme", bien qu'il ne soit pas vrai en général que la propriété "être un mono" puisse être exprimée dans le langage du 1er ordre de la théorie des ensembles. C'est un peu comme si ayant pris un modèle dénombrable de la théorie des ensembles par exemple, et ayant numéroté les objets qui y figurent, on se permettait de parler de l'ensemble I_0 des éléments de I (objet du modèle) ayant un numéro pair. Si I est infini, rien n'assure que I_0 ~~soit définissable, car I n'a qu'un ensemble dénombrable de parties~~ figure justement parmi les parties définissables de I, qui sont en quantité dénombrable.

Les recherches auxquelles ces leçons introduisent sont à comprendre dans une optique de fondement de la théorie des catégories, c'est-à-dire dans le souci de mettre en évidence les règles

tout de tirer au clair la manière dont on se sert des familles. ~~En~~
Quand on se ~~per~~ permet de parler de familles d'objets dans une catégorie donnée $\mathcal{C}$, on se situe en fait dans quelque chose de nettement plus complexe que $\mathcal{C}$, et qui est ~~une~~ d'habitude une catégorie fibrée sur ~~la catégorie~~ la catégorie des ensembles (ce que nous désignerons par $\mathrm{Fam}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ens}$, I.2.2). Ce recours implicite à une fibration particulière, nous allons l'expliciter, et pour mieux mettre en relief le rôle particulier joué par les ensembles, nous essayerons de faire jouer ce rôle par autre chose ~~par les ensembles~~ qu'eux. Nous envisagerons donc des catégories fibrées sur une catégorie de base $\mathbb{B}$ ~~assez~~ quelconque et nous nous demanderons de quoi il est permis de parler dans les fibrations sur $\mathbb{B}$. Nous verrons interférer les propriétés de $\mathbb{B}$ et celles des fibrations, mais nous ~~constaterons~~ trouverons constaterons aussi certaines indépendances, a priori inattendues, au niveau de la complétude par exemple.

~~Très souvent nous ~~suppo~~ serons amenés à supposer l'existence de limites à gauche finies dans $\mathbb{B}$, mais nous verrons qu'on peut envisager des situations importantes où cette hypothèse n'est pas satisfaite, mais où existent quand même juste les limites dont on a besoin.~~

Nous aurons toujours un oeil sur ~~Souvent Nous aurons Nous garderons toujours en mémoire~~ de côté toujours la situation particulière où la base $\mathbb{B}$ est la catégorie des ensembles, ou plus généralement un topos élémentaire, mais le plus souvent nous nous contenterons d'hypothèses bien plus faibles sur $\mathbb{B}$: l'existence de limites à gauche finies, voire l'existence des seules limites à gauche finies "dont on a besoin".

Dans un premier paragraphe on introduit l'équivalent de ~~Cat~~ la catégorie des ~~petites~~ catégories (Cat en théorie des catégories usuelle). Ici les objets ~~seront~~ sont les fibrations ~~sur une catégorie~~ de base $\mathbb{B}$ fixée, les flèches ~~seront~~ sont les foncteurs cartésiens. On ~~construira~~ décrit un certain nombre de constructions ~~de base~~ élémentaires telles que la catégorie duale, le produit de catégories ou l'exponentiation par une catégorie ordinaire. On ~~verra~~ montre comment parler de familles de catégories fibrées sur $\mathbb{B}$ et ~~...~~ on observe le ~~plongement~~ lemme de Yoneda ~~et~~ puis ~~...~~ même au caractère cartésien fermé de cette catégorie des catégories. ~~On indique~~ On situe ~~explicitement~~ ~~...~~ dans le cadre des notions des petites catégories et des catégories définies

Au § 2, on examine les propriétés de complétude des fibrations. Existence de limites finies d'abord, formulée en termes d'existence d'adjoints pour certains foncteurs diagonaux. Existence de limites "infinies" ensuite — nécessairement pénibles dans "Cat". Les théorèmes usuels sur ~~la~~ l'obtention de limites à droite quelconques à partir de sommes et de conoyaux par exemple, ou sur le calcul des limites dans les catégories de termine par un coup d'œil sur les notions de somme disjointe et de somme universelle – importantes en théorie des topos – et sur le cas particulier des fibrations en fibres ordonnées.

Le §3 ~~introduit~~ amène la notion capitale de fibration localement petite, celle où l'on peut parler de la famille des flèches entre deux objets, puis dans une même fibre, ou dans des fibres différentes. On constate que les objets Hom ont ~~les propriétés~~ le comportement formel~~s~~ auxquel~~les~~ on peut s'attendre. On observe surtout que ~~la propriété en question~~ l'hypothèse de petitesse loca[le] impose des contraintes sévères aux différentes fibres, ~~qui~~ lesquelles ne peuvent plus être "n'importe quoi". On s'interroge par ailleurs sur le ~~rapport~~ lien avec les fibrations qui sont ~~entièrement~~ petites et sur les propriétés de complétude et de stabilité par exponentiation ~~stabilité~~ de la fibration des fibrations localement petites. Finalement, ~~on s'intéresse à la possibilité de décrire globalement un plongement de Yoneda~~ ~~après un théorème sur la stabilité par~~ on regarde la possibilité de décrire globalement le plongement de Yoneda pour une fibration localement petite de.

Vient ensuite, au §4, la ~~concept~~ notion centrale de définissabilité. Comme pendant du concept ~~usuel~~ ensembliste de partie définissable de l'univers on ~~(partie)~~ introduit les concepts de classe définissable d'objets, ~~etc~~ de classe définissable de flèches ou de ~~diagrammes plus généralement~~ de diagrammes. ~~[illegible]~~ ~~On s'intéresse aux opérations sur les classes de~~ ~~On regarde la notion de sous~~ On regarde les opérations sur les classes et la notion de sous-catégorie définissable. On examine en particulier la définissabilité des isos, ~~qui peut résulter du caractère~~ qui s'obtient notamment à partir du caractère localement petit, et qui entraîne elle-même la définissabilité de beaucoup d'autres choses, comme l'égalité par exemple. La définissabilité de l'égalité est alors utilisée dans l'étude des catégories comma pour des fibrations petites ou localement petites, et les résultats obtenus mènent à une ~~généralisation~~ transposition du théorème d'extension de Kan.

Le paragraphe suivant marque une halte dans la progression. ~~On s'intéresse~~ On s'y intéresse à certaines familles particulières : familles de monos ou d'épis, familles collectivement épimorphiques ou monomorphiques, familles séparatrices – qui se caractérisent agréablement en présence du caractère localement petit –, familles couvrantes et familles de faisceaux.

Jusqu'ici, on a ~~admis~~ ~~accepté~~ donné comme bonne hypothèse sur la catégorie de base $\mathbb{B}$ l'existence de limites à gauche finies. Mais dans [illegible] où $\mathbb{B}$ est la catégorie des topos ou [illegible] d'un topos donné par exemple), on est assuré de l'existence de certains produits fibrés seulement (le produit fibré d'un morphisme quelconque et d'un morphisme borné par exemple). D'où l'étude de situations où la base $\mathbb{B}$ est munie d'un calibrage (i.e. une notion de familles de petits objets). Les calibrages peuvent prendre des propriétés supplémentaires variées, notamment ~~en particulier~~ la définissabilité. L'étude des liens entre ces propriétés fournit également des observations intéressantes sur les objets finis (au sens de Kuratowski) dans un topos. Mais l'on observe surtout qu'en présence de calibrages les concepts de fibration petite ou localement petite, de fibration à sommes ou à produits ~~se divisent sont~~ se prêtent à diverses variantes. Et l'on s'interroge sur la persistance ~~validité~~ de propositions établies précédemment en rapport avec ces différentes notions.

A côté du ~~principe~~ schéma de compréhension, l'axiome de l'ensemble des parties joue également un rôle essentiel dans les manipulations d'ensembles, et si l'on cherche un correspondant dans l'étude des fibrations, on aboutit au caractère "well-powered", c'est-à-dire la possibilité de manipuler les sous-objets (§7). ~~Cette propriété très forte nous rapproche sensiblement des topos élémentaires. Une fois qu'il devient possible de manipuler les sous-objets~~ En présence de cette propriété, beaucoup de constructions deviennent possibles. ~~Surtout~~ lorsque la fibration est aussi régulière, car alors on peut ~~également~~ même se permettre des quantifications. Dans cette situation, le caractère localement petit devient une conséquence. Mais, de plus, on peut parler de la classe ~~l'objet~~ des réalisations d'un langage du 1er ordre assez riche et même de la classe des modèles d'une théorie axiomatisée par un nombre fini de séquents.

Au paragraphe suivant (§8), on s'intéresse aux différentes ~~possibilités~~ manières de changer de catégorie de base $\mathbb{B}$. A partir d'une fibration donnée sur $\mathbb{B}$, on peut s'intéresser à son image réciproque par ~~restriction~~ un foncteur donné $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ — c'est l'opération de restriction des indices — ou au contraire s'intéresser à la possibilité de l'étendre en une fibration sur $\mathbb{B}'$ via un foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$. ~~L'étude de la restriction ne pose guère de problèmes mais la définition de l'extension s'avère nettement plus délicate~~ Si les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ sont reliées par un distributeur, un changement de base est encore possible, lequel peut se décrire comme combinaison des changements précédents.

L'opération de restriction des indices est facile à décrire et ~~conserve bien~~ conserve bien les propriétés des fibrations. Par contre la définition de l'extension est nettement plus délicate, et pour avoir des on devra ajouter l'hypothèse que le foncteur U est plat.

Un paragraphe entier (§9) est consacré à la caractérisation et aux propriétés de stabilité des foncteurs plats et des distributeurs plats, ~~on y examine~~ en particulier à la platitude des catégories de fractions (en présence d'un bon calcul). Moyennant les résultats on peut étudier au §10 le problème de l'extension plate et montrer qu'elle se comporte bien par rapport aux propriétés de complétude, de petitesse, de définissabilité ou par rapport au caractère well-powered. On regarde également comment comparer une catégorie fibrée sur B' à une catégorie obtenue par extension, et on termine par une remarque ~~à propos des~~ concernant calibrages.

Il est certain que les questions abordées dans ces notes, et quelquefois à peine effleurées, appellent de nombreux développements complémentaires. Il ne s'agit ~~[illegible]~~ pas d'un traité sur les catégories fibrées, mais d'un ensemble d'exposés visant à familiariser un public plus ou moins introduit en théorie des catégories, avec des concepts ~~et~~, des outils et des résultats qui ~~[illegible]~~ éclairent d'un jour nouveau la pratique des catégoriciens

§ 1. La catégorie des catégories fibrées.

1.1. Définitions.

On appelle <u>catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$</u> un foncteur $c : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ vérifiant la condition suivante : pour tout couple (X, u) formé d'un objet X de $\mathbb{C}$ et d'une flèche $u : J \to I$ de $\mathbb{B}$ tels que $I = c(X)$, il existe dans $\mathbb{C}$ une flèche $\varphi : Y \to X$ telle que $c(\varphi) = u$, avec la propriété universelle que voici : pour toute flèche $\psi : Z \to X$ telle que $c(\psi) = v$ se factorise en $v = u \circ w$, il existe une flèche ~~factorisation~~ unique $\theta : Z \to Y$ telle $\varphi\theta = \psi$ et $c(\theta) = w$.

On dit que φ est une <u>flèche cartésienne</u> au-dessus de u.

La situation décrite dans la définition sera habituellement schématisée par un diagramme du type suivant :

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\theta"'] \arrow[ddd, dash, dashed] & & X \arrow[dd, dash, dotted] \\
& Y \arrow[ur, "\varphi"'] & \\
& J \arrow[r, "u"] & I \\
K \arrow[ur, "w"] \arrow[urr, "v"'] & &
\end{tikzcd}
$$

On appelle <u>fibre au-dessus de I</u> et on désigne par $c(I)$ la sous-catégorie de $\mathbb{C}$ dont les objets sont les X tels que $c(X) = I$ et les flèches les $\iota : X' \to X$ tels que $c(\iota) = id_I$.

On remarque que si φ et φ' sont deux flèches cartésiennes au-dessus de u, elles diffèrent par un isomorphisme unique θ dans la fibre au-dessus de J. Réciproquement d'ailleurs, en composant φ avec une flèche de la fibre $c(J)$ de but Y on obtient une autre flèche cartésienne au-dessus de u.

1.2. Exemples.

1.2.0 Il est clair que toute catégorie ordinaire ~~$\mathbb{E}$~~ $\mathbb{X}$ peut être regardée comme catégorie fibrée sur $\mathbb{1}$ (la catégorie à 1 seul objet et 1 seule flèche).

1.2.1 L'exemple suivant servira souvent de guide pour l'intuition.

~~Soit~~ A $\mathbb{X}$ une catégorie ordinaire, $\mathbb{X}$ On ~~lui~~ associe une catégorie fibrée $Ens(\mathbb{X}) \to Ens$ en prenant comme objets dans la fibre au-dessus de l'ensemble I les familles $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de au-dessus de l'application $u: J \to I$ les couples formés de u et ~~de~~ d'une famille $(f_j : Y_j \to X_{u(j)})_{j \in J}$ de flèches de $\mathbb{X}$. Comme flèche cartésienne associée au couple $((X_i)_{i \in I}, u: J \to I)$ on peut prendre le couple formé de u et de la famille ~~id~~ $\mathrm{id}_{X_{u(j)}}$. Dans cet exemple, la fibre au-dessus de I est isomorphe à $\mathbb{X}^I$, la catégorie des I-familles d'objets et de flèches de $\mathbb{X}$, et on retrouve comme fibre au-dessus d'un singleton (objet final dans $\mathbb{E}ns$) la catégorie $\mathbb{X}$ de départ.

Dans la situation générale, on pensera les objets de $\mathbb{C}$, munis de leur image par $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, comme des familles d'objets pris dans une catégorie "$\mathcal{C}$" non donnée comme telle. Notons que ~~en général~~ la connaissance de la fibre sur l'objet final (à supposer qu'il y en ait un dans $\mathbb{B}$) ~~ne permet pas~~ n'équivaut pas à celle de "$\mathcal{C}$" en général.

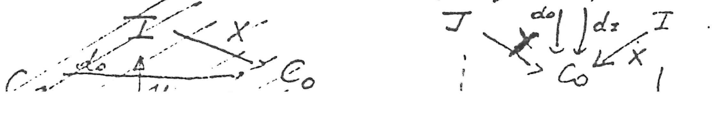
1.2.2 Si $\mathbb{B}$ est une catégorie à limites à gauche finies, on a une fibration canonique $\partial_1: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, où $\mathbb{B}^2$ désigne la catégorie des flèches de $\mathbb{B}$ et ∂_1 l'opération but. Donc, une flèche de $\mathbb{B}^2$ ~~est~~, de u' vers u, est un couple (β, α) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} J' & \xrightarrow{u'} & I' \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ J & \xrightarrow[u]{} & I \end{array}$$

; son but est $\alpha: I' \to I$; on obtient une flèche cartésienne par produit fibré.

1.2.3 Si $\underline{C}$ désigne une catégorie interne à $\mathbb{B}$, on peut lui associer une fibration encore désignée par $\underline{C}$ et définie comme suit : les objets de $\underline{C}(I)$ sont les flèches $X: I \to C_0$ (l'objet des objets de $\underline{C}$), et les flèches de $Y: J \to C_0$ vers $X: I \to C_0$ au-dessus de $u: J \to I$ sont les flèches $\varphi: J \to C_1$ (l'objet des flèches de $\underline{C}$) telles que $d_0 \varphi = Y$ (d_0 est la flèche source, de C_1 vers C_0) et $d_1 \varphi = X u$ (d_1 est la flèche but). Cet exemple contient comme cas particulier, en faisant $\mathbb{B} = \mathbb{E}ns$, la fibration $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}) \to \mathbb{E}ns$ décrite ci-dessus, au cas où ~~lorsque $\mathbb{B} = \mathbb{E}ns$ et~~ ~~pour autant du moins~~ $\mathbb{X}$ ~~désigne~~ est une petite catégorie ordinaire.

~~1.2.4. Si l'on a un morphisme géométrique (f_*, f^*) du topos $\mathbb{F}$ vers le topos $\mathbb{E}$,~~



1.3 Catégories fibrées et pseudo-foncteurs.

Rappelons qu'un pseudo-foncteur ϕ de source $\mathbb{B}$ est défini par la donnée, pour chaque objet I de $\mathbb{B}$, d'une catégorie $\phi(I)$, et pour chaque flèche $u : J \to I$ de $\mathbb{B}$, d'un foncteur $u^* : \phi(I) \to \phi(J)$, avec, en plus, pour tout objet I, un isomorphisme φ_I ~~de~~ entre $(1_I)^*$ et $\mathrm{id}_{\phi(I)}$, et, pour tout couple (u,v) de flèches composables, un isomorphisme $\varphi_{(u,v)}$ entre $(u \circ v)^*$ et $v^* \circ u^*$ – toutes ces données vérifiant des conditions de compatibilité bien connues.

Il est facile de voir qu'à un pseudo-foncteur on peut associer une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$. Les objets au-dessus de I sont les couples (I, X), avec X objet de $\phi(I)$. Un morphisme de (J, Y) vers (I, X), ~~—~~ au-dessus de $u : J \to I$, est un couple (u, θ), où $\theta : Y \to \phi(u)(X)$ dans $\phi(J)$. Le reste suit de manière évidente. La correspondance ainsi décrite contient comme cas particulier le passage ~~d'un~~ entre un foncteur ϕ contravariant de $\mathbb{B}$ vers les ensembles (considérés comme catégories discrètes) ~~à~~ et sa catégorie de représentation munie de la projection sur $\mathbb{B}$.

On peut s'efforcer de faire ce passage dans l'autre sens : associer à une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$ donnée un pseudo-foncteur de source $\mathbb{B}$. Dans la situation de la fibration $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ associée à une catégorie $\mathbb{X}$ ordinaire donnée, on ~~suppose un fait~~ trouve de suite un vrai foncteur de $\mathbb{B}^{op}$ vers Cat : I s'en va sur $\mathbb{X}^I$ et la flèche $u : J \to I$ s'en va sur le foncteur $\mathbb{X}^u : \mathbb{X}^I \to \mathbb{X}^J$ défini par $\mathbb{X}^u((X_i)_{i \in I}) = (X_{u(j)})_{j \in J}$ etc. Mais, en général, pour exhiber un pseudo-foncteur associé à une fibration donnée, on devra faire appel à l'axiome du choix. Pour la fibration $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ par exemple ($\mathbb{B}$ à limites à gauche finies), on peut poser pour tout objet I que $\phi(I) = \mathbb{B}/_I$ et définir pour tout $u : J \to I$ un foncteur $u^* : \mathbb{B}/_I \to \mathbb{B}/_J$ en faisant un choix d'images réciproques le long de u. Pour toute fibration, le passage à un pseudo-foncteur suppose un choix parmi les flèches cartésiennes, choix ~~portant~~ pouvant porter sur une classe propre d'ensembles. Lorsqu'un tel choix est supposé fait, on dit que la fibration est munie d'un clivage. Lorsqu'un tel choix peut être la base $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{C}at$, on dit que la fibration est scindée.

Nous verrons que pour plusieurs problèmes le passage par les pseudo-foncteurs permet de formuler les choses de manière élégante. Nous nous efforcerons toutefois régulièrement de montrer qu'il existe une formulation "intrinsèque" (i.e. en termes de catégories fibrées seulement) ou "élémentaire" (i.e. n'exigeant pas l'utilisation de l'axiome du choix).

~~Notons~~ Signalons que souvent nous nous permettrons de désigner par $u^* X \to X$ une flèche cartésienne associée au couple (X, u).

1.4. Quelques propositions élémentaires.

1.4.1. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $D : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sont des fibrations, alors $C \circ D : \mathbb{D} \to \mathbb{B}$ est une fibration.

1.4.2. L'image réciproque d'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ le long d'un foncteur $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ arbitraire est une fibration $C' : \mathbb{C}' \to \mathbb{B}'$, qui s'explicite comme suit. Les objets de $\mathbb{C}'$ au-dessus de I' sont les couples (I', X), où X est objet de $\mathbb{C}(F(I'))$. Une flèche de (J', Y) vers (I', X) au-dessus de $u : J' \to I'$ est un couple (u, φ), où $\varphi : Y \to X$ vérifie $C(\varphi) = F(u)$. Comme flèches cartésiennes associées à $u : J' \to I'$ et (I', X) dans $C'(I')$ on aura les couples (u, φ), où φ est une flèche cartésienne associée à $F(u) : F(J') \to F(I')$ et X (pour la fibration $\overset{C}{\cancel{\to}}\mathbb{B}$).

1.4.3. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $C' : \mathbb{C}' \to \mathbb{B}'$ sont des fibrations, alors $C \times C' : \mathbb{C} \times \mathbb{C}' \to \mathbb{B} \times \mathbb{B}'$ est une fibration.

1.4.4. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est une fibration et $\mathbb{X}$ une catégorie quelconque, alors $C^{\mathbb{X}} : \mathbb{C}^{\mathbb{X}} \to \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ est une fibration également. Ici, l'axiome du choix est nécessaire, du moins si $\mathbb{X}$ n'est pas de présentation finie. Pour $\alpha : F \Longrightarrow G$, morphisme dans $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, et pour $Z : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ tel que $C \circ Z = G$, il s'agit de trouver un morphisme $\alpha' : Z' \Longrightarrow Z$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{X}}$ tel que $C^{\mathbb{X}} \alpha' = \alpha$; ceci s'obtient en choisissant pour tout objet A de $\mathbb{X}$ une flèche cartésienne au-dessus de α_A et de but ~~α_A~~ $Z(A)$; les sources de ces flèches cartésiennes α'_A

1.5 La catégorie des catégories fibrées.

1.5.1 Un *foncteur cartésien* entre les catégories fibrées $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $C': \mathbb{C}' \to \mathbb{B}$ est un foncteur $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ tel que $C'F = C$ et que l'image d'une flèche cartésienne soit une flèche cartésienne. Pour tout objet I de $\mathbb{B}$, F induit un foncteur entre les fibres $C(I)$ et $C'(I)$. Il est clair qu'un foncteur ordinaire $F: \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ se prolonge en un foncteur cartésien entre les fibrations $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}) \to \mathbb{E}ns$ et $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}') \to \mathbb{E}ns$.

Une *transformation naturelle* entre deux *foncteurs cartésiens* F et F' de source C et de but C' est une transformation naturelle ordinaire $\gamma: F \to F'$ telle que $C' * \gamma = C$.

Les catégories fibrées sur $\mathbb{B}$, les foncteurs cartésiens entre elles et les transformations naturelles entre ~~eux~~ ces derniers constituent une 2-catégorie $Fib(\mathbb{B})$, la "catégorie des catégories à familles indexées par $\mathbb{B}$".

1.5.2 Mais $Fib(\mathbb{B})$ ne suffit pas pour notre étude : Nous voulons aussi pouvoir parler de familles, indexées par les objets de $\mathbb{B}$, de catégories fibrées sur $\mathbb{B}$. Il s'agit de définir une catégorie fibrée $Fib\,\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ pour laquelle la fibre sur l'objet final, s'il y en a un dans $\mathbb{B}$, soit la catégorie $Fib(\mathbb{B})$. Pour ce faire, on s'inspire de la remarque suivante : une famille d'ensembles J_i indexée par l'ensemble I peut être regardée comme une application ϕ de $J = \coprod_{i \in I} J_i$ vers I (avec $J_i = \phi^{-1}(i)$), donc comme un objet de $\mathbb{E}ns/I$. Nous dirons qu'une famille, indexée par l'objet I de $\mathbb{B}$, de catégories fibrées sur $\mathbb{B}$, c'est une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}/I$. (* voir page 14-5 bis) ~~Si $u: J \to I$ est une flèche de $\mathbb{B}$ et~~ ~~Pour terminer~~ Quand C est donnée, et nous considérerons comme associée à C et u ~~au dessus de~~ ~~sur $\mathbb{B}/I$, on obtient~~ ~~une~~ flèche cartésienne ~~le foncteur~~ ~~en considérant~~ le foncteur reliant la fibration image réciproque de C (cf. 1.4.2) ~~par~~ le long du foncteur Σu ~~de composition avec u, de $\mathbb{B}/J$ vers $\mathbb{B}/I$~~ à la fibration C elle-même.

Pour $\mathbb{B}$ fixée, nous appellerons les catégories fibrées sur $\mathbb{B}$ des catégories tout court, et les foncteurs cartésiens des foncteurs tout court, étant entendu que lorsque nous ferons intervenir une catégorie "ordinaire", ou un foncteur ordinaire, nous le préciserons chaque fois explicitement. Avec cette convention nous ... la fibration $Fib(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ comme "la catégorie des

respectivement, et si $u: J \to I$ dans $\mathbb{B}$, un morphisme de D vers C, de projection u, sera un foncteur

* Si D et C sont des ... sur ... et ... $u: J \to I$ dans $\mathbb{B}$, un morphisme de D vers C ~~...~~ foncteur cartésien au dessus de Σu (le foncteur de composition avec u, de $\mathbb{B}/J$ vers $\mathbb{B}/I$)

Si $u : J \to I$ est une flèche de $\mathbb{B}$, si $D : \mathbb{D} \to \mathbb{B}/_J$ et $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}/_J$ sont des fibrations, ~~alors~~ nous appellerons morphisme de D vers C, de projection u, ~~sera~~ un foncteur φ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C}$ qui transforme une flèche cartésienne en flèche cartésienne et tel que $D \circ \varphi = \Sigma_u \circ C$ (où Σ_u désigne le foncteur de composition avec u de $\mathbb{B}/_J$ vers $\mathbb{B}/_I$)

1.6. Duale d'une catégorie fibrée.

Soit $\mathcal{X}$ une catégorie ordinaire et $\mathcal{X}^{op}$ sa duale. La bonne duale de la fibration $\mathrm{Ens}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Ens}$ sera la fibration $\mathrm{Ens}(\mathcal{X}^{op}) \to \mathrm{Ens}$. Il est facile de voir que les catégories ordinaires $\mathrm{Ens}(\mathcal{X}^{op})$ et $[\mathrm{Ens}(\mathcal{X})]^{op}$ sont différentes en général. Donc, pour obtenir la duale d'une catégorie fibrée $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, il ne s'agit pas de prendre la duale de $\mathbb{C}$. Mais il est vrai que pour tout ensemble I, on a $(\mathcal{X}^{op})^I = (\mathcal{X}^I)^{op}$. Ceci suggère de décrire la duale en passant par ~~de~~ un pseudo-foncteur $\phi(C) : \mathbb{B}^{op} \to \mathrm{Cat}$, que l'on compose avec le foncteur de dualisation $op : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$. [On peut ~~toutefois~~ toutefois ~~éviter d'utiliser l'axiome du choix~~ ~~en définissant~~ définir la duale de manière intrinsèque en évitant donc l'axiome du choix, en ~~utilisant~~ adoptant ~~comme suit~~ la description suivante. Les fibres de $\mathbb{C}^{op}$ sont formées des mêmes objets que les fibres de C. Une flèche de $Y \in C(J)$ vers $X \in C(I)$ au-dessus de $u : J \to I$ est une classe d'équivalence de couples (φ, φ') — où $\varphi : Y' \to X$ est une flèche cartésienne sur u et $\varphi' : Y' \to Y$ une flèche de la fibre sur J, le couple (φ_1, φ_1') étant déclaré équivalent au couple (φ, φ') s'il existe $\psi : Y' \to Y'_1$ telle que $\varphi_1 \psi = \varphi$ et $\varphi_1' \psi = \varphi'$ (ψ est unique et c'est un iso vu le caractère cartésien de φ et φ_1). ~~Il est~~ La fibration de départ admet d'ailleurs une description du même genre, et si l'on inverse le sens des flèches dans les fibres, on obtient ce qui vient d'être ~~est~~ écrit.

1.7. Lemme de Yoneda.

Soit K un objet de $\mathbb{B}$. Si $\mathbb{B}$ ~~était~~ est Ens, il ~~serait~~ est usuel ~~de~~ d'assimiler l'ensemble K à une petite catégorie discrète. Mais si ~~de même~~ $\mathbb{B}$ est quelconque on peut de même regarder l'objet K comme muni d'une structure de catégorie interne, triviale (K est l'objet des objets et ~~l'objet des~~ les seules flèches sont les identités sur ces objets), et par suite l'assimiler à la fibration sur $\mathbb{B}$ associée à cette catégorie interne, soit $\underline{K}$ (cf. 1.2.3). En fait $\underline{K}$ n'est autre que la fibration "source" $\partial_0^K : \mathbb{B}/K \to \mathbb{B}$. Et à cette fibration correspond un foncteur véritable de $\mathbb{B}^{op}$ vers Ens qui est simplement le foncteur représentable $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(-, K)$. Si $z : K' \to K$ est une flèche de $\mathbb{B}$, la composition avec z fournit un foncteur cartésien de K' vers K, que nous noterons $\underline{z}$:

L'assimilation en question revient donc à celle qui se réalise classiquement du plongement de Yoneda. La clef de ce plongement, le lemme de Yoneda, s'étend en la proposition suivante.

1.7.1. Proposition. Pour toute fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et tout objet K de $\mathbb{B}$, les catégories ordinaires Fonct $(\underline{K}, C)$ et $C(K)$ sont équivalentes.

Si C est à fibres discrètes, l'affirmation est le lemme classique. Pour C quelconque, la démonstration nécessite l'axiome du choix, ~~puisque~~ car on n'a plus l'unicité des flèches cartésiennes. A un objet X de la fibre $C(K)$ on associe le foncteur cartésien de $\underline{K}$ vers C défini comme suit : un objet u de $\underline{K}(I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(I, K)$ est envoyé sur un objet $u^*(X)$ de $C(I)$, et s'il y a une flèche de $v \in \underline{K}(J)$ vers u, donc s'il existe $w : J \to I$ telle que $u \circ w = v$, on l'envoie sur une flèche cartésienne de $v^*(X) = (w \circ u)^*(X)$ ~~vers~~ $u^*(X)$. Dans l'autre sens, on ~~associe~~ associe bien sûr à un foncteur cartésien ~~sa~~ l'objet de $C(K)$ qui est l'image de l'identité sur.

1.7.2. Corollaire. Toute fibration C est équivalente à une fibration scindée.

On remarque en effet que Fonct $(\underline{K}, C)$ peut être considéré comme la valeur en l'objet K d'un véritable foncteur de source $\mathbb{B}^{op}$. On complète la définition de celui-ci en associant à une flèche $z : K' \to K$ ~~donc~~ un ~~le~~ foncteur ~~Hom~~ ~~Fonct (z, C)~~ ~~suivant~~ entre Fonct $(\underline{K}, C)$ et Fonct $(\underline{K}', C)$ qui est simplement la composition avec $\bar{z}$, notée ~~Fonct $(\bar{z}$~~ Fonct $(\bar{z}, C)$. Alors qu'un pseudo-foncteur ϕ_C ~~associe à C~~ envoie un objet X de $\phi_C(K)$ sur une image réciproque $\phi_C(z)(X)$ dans $\phi_C(K')$, Fonct $(\bar{z}, C)$ envoie la famille de toutes les images réciproques $u^*(X)$ – pour u quelconque de but K – sur la sous-famille obtenue en se limitant aux u qui se factorisent à travers z.

1.8. Propriétés de fermeture de Fib $(\mathbb{B})$.

1.8.1 On peut faire le produit de deux fibrations $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $C' : \mathbb{C}' \to \mathbb{B}$. Il s'obtient en formant le produit fibré évident et en utilisant la stabilité des fibrations par composition. Il peut aussi s'obtenir en prenant l'image réciproque de la [illegible] foncteur diagonal

1.8.2. On peut de même faire le produit d'une famille $C_\alpha : \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{B}$ de fibrations, indexée par un ensemble A : on prend l'image réciproque du produit des C_α, de $\prod_\alpha \mathbb{C}_\alpha$ vers $\mathbb{B}^A$ le long du foncteur diagonal de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}^A$.

1.8.3. Si A désigne une catégorie ordinaire et C une fibration sur $\mathbb{B}$, on ~~obtient~~ peut encore prendre l'image réciproque de la fibration C^A (1.4.4) le long de la diagonale de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}^A$; c'est pour désigner la fibration résultante – sur $\mathbb{B}$ – que nous réserverons désormais l'usage du symbole C^A.

1.8.4. Si C et D sont deux fibrations sur $\mathbb{B}$, on peut former une fibration D^C, telle que pour toute autre fibration D' sur $\mathbb{B}$, on ait une équivalence entre les catégories $\mathrm{Fonct}(C', D^C)$ et $\mathrm{Fonct}(C \times C', D)$. Puisque l'équivalence en question doit tenir en particulier si $C' = \underline{I}$, il est naturel, compte tenu de la proposition 1.7.1, de poser $D^C(I) = \mathrm{Fonct}(C \times \underline{I}, D)$. Pour $u : J \to I$, le foncteur image réciproque ~~D^C~~ u^* est simplement le foncteur de composition avec $C \times \underline{u}$, de $\mathrm{Fonct}(C \times \underline{I}, D)$ vers $\mathrm{Fonct}(C \times \underline{J}, D)$. De sorte que la fibration D^C est automatiquement scindée. En particulier, si C est la fibration finale $1 = id_{\mathbb{B}}$, on retrouve en D^1 la fibration scindée équivalente à D déjà discutée ci-dessus (1.7.2

1.8.5 ~~Nous terminerons par quelques remarques à propos de la formule $D^C(I) = \mathrm{Fonct}(C \times \underline{I}, D)$~~, Dans la ~~cas~~ situation où $\mathbb{B}$ admet des produits finis, on peut faire des remarques supplémentaires à propos de la formule $D^C(I) = \mathrm{Fonct}(C \times \underline{I}, D)$ Tout d'abord, si C est la fibration $\underline{K}$, pour K objet de $\mathbb{B}$, on aura

$$D^{\underline{K}}(I) = \mathrm{Fonct}(\underline{K} \times \underline{I}, D) \simeq \mathrm{Fonct}(\underline{K \times I}, D) = D(K \times I).$$

La fibration $D^{\underline{K}}$ est à penser comme la fibration des "familles indexées par K d'objets de D", et la relation indiquée montre que la fibre en I est bien ce à quoi on s'attend à partir du cas $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$: une famille indexée par I de familles indexées par K d'objets de $\mathbb{X}$, c'est une famille indexée par $K \times I$ d'objets de $\mathbb{X}$.

[illegible] résultant elle du fait que $C \times \underline{I} \simeq \underline{I} \times C$

se donner une I-famille de foncteurs de C vers D revient à se donner un foncteur de C vers les I-familles d'objets de D.

Explicitons cette correspondance à titre d'exercice.

Soit F un objet de $D^C(I)$, c'est-à-dire un foncteur de $C \times \underline{I}$ vers D. Pour tout couple (X, u) formé d'un objet ~~de~~ X de $C(J)$ et d'une flèche $u : J \to I$, F fournit un objet $F(X, u)$ dans $D(J)$.

Soit G un foncteur de C vers $D^{\underline{I}}$. A tout objet Z de $C(K)$, G associe un objet de $D^{\underline{I}}(K) = \mathrm{Fonct}(\underline{I} \times \underline{K}, D)$, ce qui signifie que pour tout couple de flèches (u, v), avec $u : J \to I$ et $v : J \to K$, on a un objet $G(Z, (u, v))$ dans $D(J)$. Particularisant ces dernières données au cas où $v = id_J$ ~~on retient des objets $G(Z$~~ et $Z = X$, on retient des objets $G(X, (u, id_J))$ qu'on peut prendre comme $F(X, u)$. Inversement, lorsque les $F(X,u)$ sont connus, on peut définir $G(Z, (u, v))$ par la formule

$$G(Z, (u, v)) = (u, v)^* [F(q^* Z, p)] ,$$

où p et q désignent les projections de $I \times K$. Le caractère cartésien des foncteurs F et G permet de montrer que leurs données sont équivalentes.

Enfin, on peut encore remarquer au passage que la catégorie ~~D^C~~ $D^C(I)$ est équivalente à la catégorie des foncteurs cartésiens entre les catégories $\underline{I}^*(C)$ et $\underline{I}^*(D)$, catégories fibrées sur $\mathbb{B}/I$.

1.9. La catégorie des petites catégories, La catégorie des catégories discrètes

Parmi toutes les catégories (fibrées sur $\mathbb{B}$), nous aurons souvent à considérer des catégories ~~[illegible]~~ horizontales telle ou telle propriété particulière. Dans certains cas les fibrations considérées détermineront en fait une sous-fibration de $\mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{B}$ (1.5.2). ~~Ainsi en est-il~~ ~~Tel est le cas par exemple pour les petites catégories.~~

1.9.1. On dit qu'une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$ est *petite* si elle est équivalente à la fibration associée à une catégorie interne (1.2.3).

On connaît la notion de foncteur interne. A tout foncteur interne se trouve associé de manière évidente un foncteur cartésien entre les fibrations correspondant à sa source et son but. Même remarque à propos des transformations naturelles internes.

Les petites catégories déterminent ainsi une sous-2-catégorie de $\mathrm{Fib}(\mathbb{B})$, et même une sous-2-catégorie pleine - comme il résulte facilement du lemme de Yoneda.

Mais lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, on a même mieux: on peut alors parler de la fibration $\mathbf{Cat}$: $\mathcal{C}at(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ des petites catégories.

En effet, on peut prendre pour $\mathcal{C}at(I)$ la catégorie des catégories internes à $\mathbb{B}/_I$. Un morphisme de $\underline{D}$, interne à $\mathbb{B}/_J$, vers $\underline{C}$, interne à $\mathbb{B}/_I$, au-dessus de $u: J \to I$, est un foncteur interne "au-dessus de u" - en un sens que le lecteur explicitera aisément. ~~Les~~ les morphismes cartésiens s'obtiennent ~~naturellement~~ par produit fibré. En faisant les vérifications nécessaires, le lecteur établira sans peine la proposition suivante

<u>Proposition.</u> <u>Lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, les petites catégories déterminent une sous-catégorie fibrée pleine de $\mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$.</u>

1.9.2 On peut bien entendu se limiter davantage et ne considérer par exemple que les petites catégories discrètes. Elles aussi déterminent une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$, lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies. C'est, à équivalence près, la fibration $\partial_1: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ déjà rencontrée (1.2.2). Celle-ci joue dans notre cadre général le rôle de la catégorie des ~~ensembles~~ catégories discrètes en théorie des catégories ordinaire. C'est la catégorie $\mathbb{B}$, vue parmi les catégories fibrées sur elle-même. C'est, lorsque $\mathbb{B} = \mathbf{Ens}$, la fibration $\mathbf{Ens}^{2}$ ~~$\mathbf{Ens}$~~ $\to \mathbf{Ens}$, clairement équivalente à $\mathbf{Ens}(\mathbf{Ens}) \to \mathbf{Ens}$ (~~définie~~ ~~en~~ ~~décrite~~ décrite en 1.2.1).

A la notation $\partial_1: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, nous préférerons souvent ~~la notation~~ l'écriture $\mathcal{B}: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

§ 2. Propriétés de complétude des fibrations.

2.1. Adjoints.

Soient $c : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $c' : \mathbb{C}' \to \mathbb{B}$ deux catégories (fibrées sur $\mathbb{B}$) et $F : C' \to C$, $U : C \to C'$ deux foncteurs (cartésiens). Nous dirons que <u>F est adjoint à gauche de U</u> s'il existe deux transformations naturelles $\eta : 1_{\mathbb{C}'} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathbb{C}}$ telles que $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = id_F$ et $(U * \varepsilon) \circ (\eta * U) = id_U$. Ces conditions impliquent que pour tout objet I de $\mathbb{B}$ les foncteurs $F/_{C'(I)}$ et $U/_{C(I)}$ sont adjoints. Mais un foncteur cartésien U donné peut très bien admettre fibre par fibre des adjoints à gauche, sans que ceux-ci s'organisent effectivement en un foncteur cartésien adjoint à gauche de U. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer deux situations d'adjonction ordinaire reliées entre elles par des foncteurs qui commutent aux foncteurs d'oubli mais pas aux foncteurs "objet libre" - et de regarder le tout comme fibré au-dessus de la catégorie $0 \to 1$ (2 objets et une flèche non triviale).

2.2. Limites à gauche finies.

2.2.1. On dit que la catégorie $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ <u>admet un objet final</u> si l'unique foncteur (cartésien) de C vers $id_{\mathbb{B}}$ (la fibration finale sur $\mathbb{B}$) admet un adjoint à droite. Cette condition revient d'une part au fait que dans chaque fibre $C(I)$ il y a un objet final et d'autre part au fait que toute flèche cartésienne dont le but est objet final a pour source un objet final (pour $u : J \to I$, nous écrirons, de manière commode, $u^*(1_I) \cong 1_J$). Cette définition se justifie si l'on considère que pour une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$ quelconque, la fibration $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}) \to \mathbb{E}ns$ admet un objet final au sens dit ssi $\mathbb{X}$ admet un objet final au sens ordinaire.

On remarque que si $\mathbb{B}$ est à objet final, alors $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ admet un objet final ssi $\mathbb{C}$ est à objet final et C transforme objet final en objet final.

2.2. On dit que C <u>admet des produits finis</u> si le foncteur diagonal $\Delta : C \to C \times C$ admet un adjoint à droite. Cette condition revient

A nouveau, on remarque que si $\mathbb{B}$ est à produits finis, alors C est à produits finis si $\mathbb{C}$ est à produits finis et si C y commute.

2.2.3 Désignons par $\mathbb{E}$ la catégorie $0 \overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{\rightrightarrows}} 1$ (formée de 2 flèches parallèles distinctes). On dit que C admet des noyaux si le foncteur "diagonal" canonique de C vers $C^{\mathbb{E}}$ admet un adjoint à droite.
Comme pour les définitions précédentes, on peut faire des remarques que le lecteur formulera aisément lui-même.

L'observation triviale suivante mérite d'être soulignée : si on regarde une catégorie $\mathbb{B}$ comme catégorie trivialement fibrée sur elle-même elle admet évidemment toutes les limites (à gauche finies) - quelles que soient les propriétés de complétude de $\mathbb{B}$ comme catégorie ordinaire.

2.3. Limites à droite finies.

On dit qu'une catégorie $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ admet un objet initial (resp. des sommes finies, des conoyaux) si sa duale C^{op} admet un objet final (resp. des produits finis, des noyaux).
Dire que C est à objet initial revient à dire que l'unique foncteur de C vers $id_{\mathbb{B}}$ admet un adjoint à gauche, ou encore à dire que dans chaque fibre il y a un objet initial et que les foncteurs image réciproque respectent ces objets initiaux. La remarque ramenant l'existence d'un objet final pour C à celle d'un objet final dans $\mathbb{C}$ préservé par C ne se laisse pas dualiser (sauf si l'on passe à des cofibrations).
De même, dire que C admet des sommes finies (des conoyaux) revient à dire que l'unique foncteur Δ de C vers $C \times C$ (de C vers $C^{\mathbb{E}}$) admet un adjoint à gauche.

2.4. Sommes infinies. Le triple des familles.

2.4.0 Pour donner un sens à la locution "la catégorie $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ admet des sommes infinies" on peut imaginer différentes approches. On pourrait par exemple vouloir que pour tout ensemble X, vu comme catégorie discrète, le foncteur canonique de C vers C^X (décrite en 1.8.3) admette un adjoint à gauche ; comme pour les sommes finies, cette propriété reviendrait ~~au~~ à l'existence de sommes indexées par X dans chaque fibre, préservées par les foncteurs image réciproque. Mais ~~un de nos objectifs~~ un de nos objectifs est de nous affranchir du rôle ~~dominant~~ privilégié des ensembles.

On pourrait alors ~~dire~~ demander que pour tout objet I de $\mathbb{B}$, le foncteur diagonal de C vers C^I (1.8.5) admette un adjoint à gauche. Mais nous verrons plus loin qu'une définition de ce type n'est pas suffisante.

Notre point de départ sera l'observation suivante : une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$ admet des sommes infinies au sens habituel si le foncteur $\mathbb{X} \to \mathrm{Ens}(\mathbb{X})$ qui envoie l'objet A sur la famille formée de l'objet A (indexée par 1) admet un adjoint à gauche. Pour une catégorie $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, on va décrire une catégorie "de toutes les familles d'objets de C" qui sera à C ce que $\mathrm{Ens}(\mathbb{X})$ est à $\mathbb{X}$. Plus exactement, le rapport entre C et la fibration $\mathrm{Fam}(C)$ à ~~construire~~ décrire devra fournir comme cas particulier le rapport entre la catégorie fibrée $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ (la véritable catégorie $\mathbb{X}$, ~~dans~~ à notre ~~optique~~ point de vue) et la catégorie fibrée $\mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}\,\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ (la véritable $\mathrm{Ens}(\mathbb{X})$).

2.4.1. Supposons dorénavant que $\mathbb{B}$ soit une catégorie à limites à gauche finies et soit $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une catégorie fibrée quelconque.

Un objet de $\mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}\,\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ au-dessus de l'ensemble I, c'est une famille doublement indexée $((X_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$ d'objets de $\mathbb{X}$, que l'on peut penser comme une famille indexée par $J = \coprod J_i$, munie d'une application $u : J \to I$ telle que $J_i = u^{-1}(i)$. Ceci suggère de prendre comme objets de ~~la~~ la fibre $\mathrm{Fam}(C)(I)$ les couples (X, u) où $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ et $X \in C(J)$. Un morphisme de (X, u) vers (X', u') (avec $u' : J' \to I'$ et $X' \in C(J')$) au-dessus de $v : I \to I'$ sera un couple (v', φ) tel que $\varphi : X \to X'$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & X \arrow[dll, "\varphi"'] \arrow[d, dotted] & \\
X' \arrow[d, dotted] & & J \arrow[r, "u"] \arrow[dll, "v'"] & I \arrow[dll, "v"] \\
J' \arrow[r, "u'"'] & I' & &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & w_0^*(X) \arrow[dll, "\varphi_0"'] \arrow[d, dotted] & \\
X \arrow[d, dotted] & & J_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[dll, "w_0"] & I_0 \arrow[dll, "w"] \\
J \arrow[r, "u"'] & I & &
\end{tikzcd}$$

Une flèche cartésienne associée à (X, u) et $w : I_0 \to I$ sera formée par (w_0, φ_0), telles que w_0 soit obtenue en faisant le produit fibré de u et w et φ_0 soit cartésienne, de but X, au-dessus de w_0, dans $\mathbb{C}$

Globalement, la construction de $\mathrm{Fam}(C)$ peut ~~en~~ se décrire comme suit : on prend l'image réciproque de C par le foncteur source $\partial_0 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, et on compose la fibration $(C, \partial_0) \to \mathbb{B}^2$ obtenue avec la fibration $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ (1.2.2).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "C"] & \mathbb{B} & \\
(C, \partial_0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Fam}\, C"'] & \mathbb{B}^2 \arrow[u, "\partial_0"'] \arrow[r, "\partial_1"] & \mathbb{B} .
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition. La construction indiquée s'étend en un foncteur $\mathrm{Fam} : \mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \to \mathrm{Fib}(\mathbb{B})$ muni d'une structure de triple.</u>

La manière de décrire $\mathrm{Fam}(F)$ pour un foncteur cartésien $F : C \to C'$ est évidente. L'unité du triple $\eta_C : C \to \mathrm{Fam}\, C$ s'obtient en envoyant $X \in C(I)$ sur le couple (X, id_I) et la multiplication $\mu_C : \mathrm{Fam}(\mathrm{Fam}\, C) \to \mathrm{Fam}\, C$ en envoyant $((X,u),v)$ — où $X \in C(I)$, $u : I \to J$, $v : J \to K$ — sur (X, vu). Les vérifications usuelles sont immédiates et laissées au lecteur.

2.4.2. Nous dirons que la fibration C, sur une catégorie $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies, <u>admet des $(\mathbb{B}$-$)$sommes</u> si le foncteur $\eta_C : C \to \mathrm{Fam}\, C$ (cf. proposition ci-dessus) admet un adjoint à gauche. ~~Explicitons~~

Explicitons cette propriété. Elle signifie d'une part que pour tout couple (X, u), où $X \in C(I)$ et $u : I \to J$, il existe un objet $\coprod_u X$ dans $C(J)$ et une flèche $\varphi : X \to \coprod_u X$ au-dessus de u telle que de $w = v \circ u'$, il existe une flèche unique $\varphi' : \coprod_u X \to Z$ au-dessus de v telle que $\varphi' \circ q = \varphi$. Nous dirons que la flèche $q : X \to \coprod_u X$ associée au couple (X, u) est <u>cocartésienne</u> (elle a la propriété universelle duale d'une flèche cartésienne).

Elle signifie en outre (vu le caractère cartésien de l'adjoint à gauche) que chaque fois qu'on a un produit fibré dans $\mathbb{B}$, comme indiqué,

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] & J \\ I' \arrow[u, "w"] \arrow[r, "u'"'] & J' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

chaque fois qu'on prend X dans $C(I)$ et une flèche cartésienne $w^* X \to X$, l'unique factorisation q' de la composée $w^* X \to X \to \coprod_u X$ à travers une flèche cartésienne $v^* \coprod_u X \to \coprod_u X$ donnée, est en fait une flèche cocartésienne. C'est la condition dite de Chevalley. Regardons sa signification sur un exemple. Supposons que $\mathbb{B} = Ens$ et que v ~~est~~ soit la sélection d'un indice j particulier. La condition dit que la fibre ~~de~~ en j de $\coprod_u (X_i)_{i \in I}$ doit être la somme de la sous-famille des fibres X_i pour $i \in u^{-1}(j)$.

2.4.3. Il est immédiat que la fibration canonique $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ est nécessairement à $\mathbb{B}$-sommes. Pour φ de but I et $u : I \to J$, on ~~aura~~ a $\coprod_u \varphi = u \circ \varphi$ tout simplement ; l'adjoint à gauche au foncteur "image réciproque le long de u" est la composition avec u. Ceci montre qu'une affirmation telle que "Ens a des sommes quelconques (en sous-entendant "pour des familles indexées par un ensemble") ne nous apprend rien de bien spécifique sur la catégorie des ensembles.

2.4.4. Si on prend pour $\mathbb{B}$ la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, si on prend comme objets au-dessus de l'anneau A les couples (A, M) où M est un A-module, et comme flèches du A-module M vers le B-module N, au-dessus de l'homomorphisme d'anneaux $u : A \to B$, les couples formés de u et d'un morphisme de groupes abéliens $\varphi : M \to N$ tels que l'on ait toujours $\varphi(\alpha . x) = u(\alpha)\varphi(x)$ $(\alpha \in A,\ x \in M)$, on obtient une catégorie fibrée. Les images réciproques y sont données par la restriction des scalaires. C'est une catégorie à $\mathbb{B}$-sommes par l'extension des scalaires

$$\coprod_u (A, M) = (B, B \otimes_A M).$$

2.5 Produits infinis.

On dit que la fibration C <u>admet des ($\mathbb{B}$-) produits</u> si la fibration C° admet des $\mathbb{B}$-sommes. Analysant cette propriété, on voit qu'elle se ramène ~~d'une part~~ au fait que pour toute flèche $u : I \to J$ le foncteur image réciproque $u^* : C(J) \to C(I)$ admet un adjoint à droite $\prod_u$ et ~~d'autre part au fait~~ qu'en outre, pour tout produit fibré dans $\mathbb{B}$, comme indiqué,

$$\begin{tikzcd} I' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v"'] & J' \arrow[d, "w"] \\ I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd}$$

la transformation naturelle canonique ~~entre~~ ~~du composé~~ $w^* \circ \prod_u$ vers le composé $\prod_{u'} \circ v^*$ soit un isomorphisme.

Contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, la propriété en question ne revient pas au fait que le foncteur $\eta_C : C \to \mathrm{Fam}\, C$ admet un adjoint à droite. Examinant en particulier $\mathrm{Ens}(*) \to \mathrm{Ens}$, on se rend compte que la formation de produits au sens familier est une opération contravariante par rapport aux flèches de changements d'indices (alors que la formation de sommes est covariante) et ne ~~saurait~~ pourrait donc être décrite par un foncteur global compatible avec ces changements d'indices (un foncteur cartésien de $\mathrm{Fam}\, C$ vers C).

~~Il est~~ On peut par ailleurs se rendre compte que la propriété indiquée est nettement plus forte que l'exigence qu'il y ait pour tout objet I de $\mathbb{B}$ un adjoint à droite au foncteur diagonal $C \to C^I$, en considérant la situation suivante. Supposons que $\mathbb{B}$ soit cartésienne fermée. Dans ~~Dans ce cas, disons que la fibration $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ est à produits c'est dire que les $\prod_u$ existent dans $\mathbb{B}$~~ ~~ce cas, il y a bien pour tout I un adjoint à droite $\prod_I$ au foncteur diagonal $C \to$~~ ce cas la fibration $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ satisfait l'exigence en question. ~~Mais enfin~~ ~~dire qu'il y a des produits~~ Mais pour que la fibration ∂_1 ~~est~~ soit à produits, ~~c'est~~ il faudrait ~~exiger~~ dire que les $\prod_u$ existent dans $\mathbb{B}$, ce qui n'est pas nécessairement le cas (cf. la catégorie cartésienne fermée Cat).

2.6. Sommes et produits dans $\mathbb{F}ib(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{B}$.

La catégorie des catégories fibrées sur $\mathbb{B}$, que nous supposons à limites à gauche finies, est à la fois à $\mathbb{B}$-sommes et à $\mathbb{B}$-produits. Ceux-ci se décrivent comme suit.

Si on a $u : I \to J$ dans $\mathbb{B}$ et C fibrée sur $\mathbb{B}/I$, on obtient la fibration $\coprod_u C$ sur $\mathbb{B}/J$, simplement en composant C avec le foncteur "composition avec u" - que nous avons désigné par $\underline{u}$ (1.7) - et qui définit $\mathbb{B}/I$ comme catégorie fibrée sur $\mathbb{B}/J$ (à fibres discrètes d'ailleurs).

On obtient la fibration $\prod_u C$ en prenant l'image réciproque de C le long du foncteur $u^* : \mathbb{B}/J \longrightarrow \mathbb{B}/I$.

<u>Remarques</u>: 1° On peut s'étonner que les $\prod_u$ puissent être définis dans $\mathbb{F}ib(\mathbb{B})$ alors que rien n'assure leur existence au sens habituel dans $\mathbb{B}$. ~~Cependant~~ Mais il n'y a pas là nulle contradiction. Soit en effet p un objet de $\mathbb{B}/I$ et $\underline{p}$ la fibration discrète associée sur $\mathbb{B}/I$ (1.7). On peut former une fibration $\prod_u(\underline{p})$ sur $\mathbb{B}/J$, mais rien ne dit qu'il existe un objet q de $\mathbb{B}/J$ qui représente $\prod_u(\underline{p})$ - et qui serait le $\prod_u p$ au sens habituel.

2° Supposons que k soit la flèche canonique $k : K \to 1$ dans $\mathbb{B}$. Etant donné une fibration C, on peut former la fibration $\prod_k(\underline{k}^* C)$ et on calcule facilement que $[\prod_k(\underline{k}^* C)](I) = (\underline{k}^* C)(K \times I \xrightarrow{\pi_1} K)$
$= C(K \times I)$

On s'aperçoit que la construction indiquée redonne la catégorie fibrée $C^{\underline{K}}$ déjà définie (1.8.5), pensée ici comme "produit dans $\mathbb{F}ib(\mathbb{B})$ de C par elle-même K fois".

2. 7. Petites limites.

à gauche

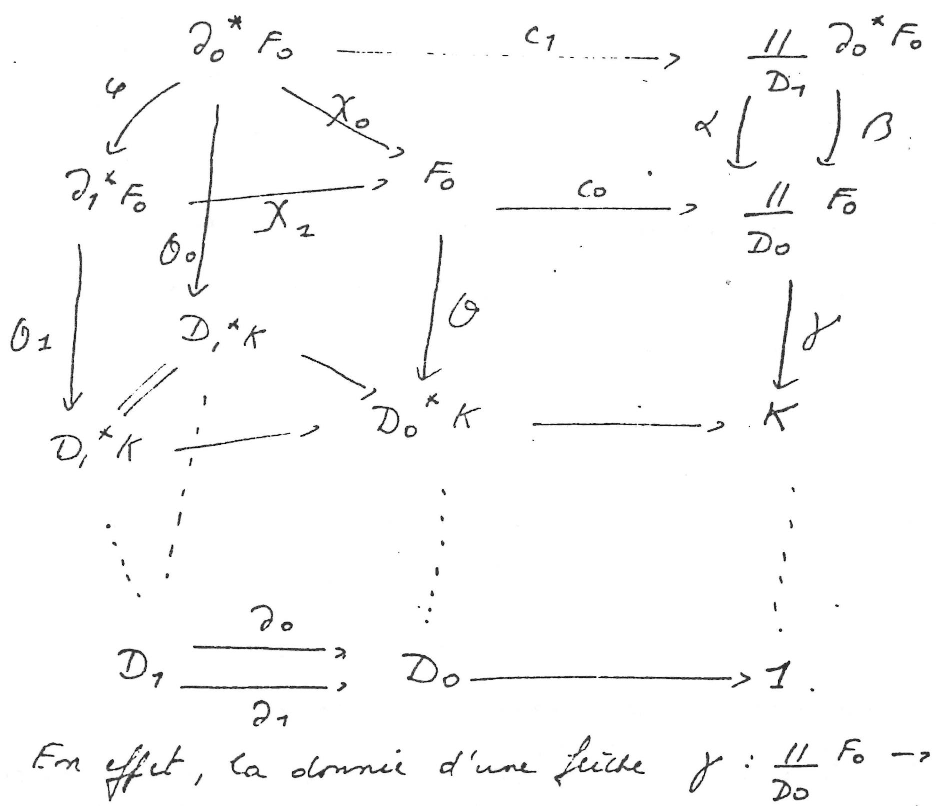
Un des premiers théorèmes à propos des limites dans les catégories ordinaires concerne la possibilité d'obtenir toutes les petites limites à partir de certaines d'entre elles, les petites limites inductives à partir des sommes et des conoyaux par exemple.

On dit que la fibration $\underline{C} \xrightarrow{} \mathbb{B}$ <u>admet les petites limites inductives</u> si pour toute catégorie interne $\underline{D}$ à $\mathbb{B}$ le foncteur diagonal de C vers $C^{\underline{D}}$ admet un adjoint à gauche.

Proposition. ~~Si C est une~~ Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est une fibration à conoyaux et à sommes, alors C est à petites limites inductives.

Dans un souci de simplification des écritures, nous montrerons seulement que si $\underline{D}$ est une catégorie interne à $\mathbb{B}$ et F un foncteur de $\underline{D}$ vers C, on peut indiquer un objet convenable $\varinjlim F$ dans $C(1)$. Cette démonstration n'utilisera pas entièrement les hypothèses faites sur C, mais le lecteur se convaincra aisément qu'il en ~~aurait~~ a besoin s'il s'efforce de montrer l'existence ~~d'~~ d'un adjoint à gauche pour une fibre quelconque (et pas seulement pour la fibre sur l'objet final) et s'il veut vérifier que les adjoints à gauche s'organisent bien en un foncteur cartésien.

Si les flèches $\partial_0, \partial_1 : D_1 \to D_0$ sont respectivement ~~définissant (en partie)~~ la source et le but pour la petite catégorie $\underline{D}$, la donnée de F comprend essentiellement celle d'un objet F_0 dans $C(D_0)$ et d'une flèche $\varphi : \partial_0^* F_0 \to \partial_1^* F_0$. Dans le diagramme ~~suivant~~ ci-dessous, où χ_0 et χ_1 sont cartésiennes, ~~et~~ c_0 et c_1 cocartésiennes, les composés $c_0 \chi_0$ et $c_0 \chi_1 \varphi$ donnent lieu à deux factorisations α et β, de $\coprod_{D_1} \partial_0^* F_0$ vers $\coprod_{D_0} F_0$. Le conoyau γ de ces deux flèches dans $\mathbb{C}(1)$, convient.



En effet, la donnée d'une flèche $\gamma : \coprod_{D_0} F_0 \to K$ coégalisant α et β équivaut à celle d'une flèche $\theta : F_0 \to D_0^* K$ dont les images réciproques par ∂_0^* et ∂_1^*, ~~soit~~ notées respectivement θ_0 et θ_1, vérifient l'égalité $\theta_0 = \theta_1 \varphi$.

2. 8. Limites dans les catégories de foncteurs.

Un autre fait important au sujet des limites concerne leur existence et leur mode de calcul dans les catégories de foncteurs. Dans le présent contexte, on aura par exemple l'énoncé suivant.

Proposition. Si la catégorie $\mathbb{D}$, fibrée sur $\mathbb{B}$, est à sommes, alors, pour toute fibration $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{B}$, la catégorie $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ est à sommes.

Soit F un objet de $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}(J)$ et $u : J \to I$ une flèche de $\mathbb{B}$. Nous avons vu qu'à F on peut associer un foncteur G de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}^{J}$ (1.8.5). D'autre part, de $\mathbb{D}^{J}$ vers $\mathbb{D}^{I}$, il y a un foncteur $\mathbb{D}^{u}$ - défini via le lemme de Yoneda - qui, comme $\mathbb{D}$ est à $\mathbb{B}$-sommes, admet un adjoint à gauche $\coprod_u$. En prenant le composé $\coprod_u \circ G$, on obtient un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}^{I}$, ~~soit~~ d'où un objet de $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}(I)$, qui convient.

Le lecteur pourra compléter par lui-même cette brève indication et observer au passage que, comme dans la théorie ordinaire, on peut affirmer que "les sommes se calculent ~~terme~~ point par point".

2.9. Sommes disjointes et sommes universelles.

Les limites, si elles existent, peuvent être dotées de propriétés supplémentaires importantes. La ~~formulation~~ transcription adéquate de ces propriétés dans le cadre des fibrations ne va pas toujours sans surprises.

2.9.1. Classiquement, pour dire qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets d'une catégorie $\mathbb{X}$ admet une somme qui est disjointe, on considère les produits fibrés $X_i \underset{\coprod X_i}{\times} X_j$ et on impose qu'ils coïncident avec X_i si $i = j$ et avec l'objet initial si $i \neq j$. En réalité, la propriété visée ~~va~~ ~~rien à voir~~ ne dépend nullement ~~avec~~ de l'existence d'un objet initial dans $\mathbb{X}$. Elle peut s'énoncer en disant ~~qui pour envoyer~~ qu'un morphisme de la famille des $X_i \underset{\coprod X_i}{\times} X_j$ dans une famille quelconque ~~sa~~ est entièrement déterminé par sa restriction via les diagonales $X_j \longrightarrow X_j \underset{\coprod X_i}{\times} X_j$.

Nous dirons donc qu'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ à sommes et produits fibrés est <u>à sommes disjointes</u> si pour tout $u : I \to J$ et

$\delta : X \longrightarrow X \times_{\coprod_u X} X$ est cocartésienne. (Le but de δ est dans la fibre au-dessus de $I \times_J I$, cf. 2.2)

Avec cette définition, il est trivial que la fibration $\mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est toujours à sommes infinies disjointes. Il est de même trivial que pour la fibration canonique $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ les sommes, qui existent (2.4.3) sont en fait disjointes.

2.9.2. Si l'on cherche à exprimer le fait que la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ admet des <u>sommes universelles</u>, on peut voir, en s'inspirant de la définition classique pour une catégorie ordinaire, que cela peut se faire en exigeant que pour toute flèche $u : J \to I$, pour toute flèche cocartésienne $q : X \to \coprod_u X$ et pour toute flèche -quelconque- $\varphi : Y \to \coprod_u X$ dans $C(I)$, la flèche q' déduite de q par changement de base le long de φ dans $\mathbb{C}$ est encore cocartésienne. Et comme la condition de Chevalley nous garantit de toute façon la stabilité des flèches cocartésiennes par changement de base cartésien, on voit que la propriété revient simplement à l'affirmation que les flèches cocartésiennes sont stables par changement de base quelconque dans $\mathbb{C}$.
Elle est notamment vérifiée par la fibration $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$.
Le fait que dans Ens les sommes (ensemblistes) soient disjointes et universelles n'a donc rien d'original.

2.10. Fibrations à fibres ordonnées.

Parmi les fibrations sur une catégorie de base $\mathbb{B}$ donnée, on peut distinguer celles où chaque fibre est un ensemble ordonné. Chacune correspond à un véritable foncteur de $\mathbb{B}^{op}$ vers la catégorie Ord des ensembles ordonnés (et applications croissantes).

A partir d'une fibration C quelconque sur $\mathbb{B}$, on peut obtenir une fibration ordonnée O(C) en faisant intervenir le foncteur canonique bien connu de Cat vers Ord. Cette opération revient, si l'on veut, à retenir la logique inhérente à la fibration de départ.

Pour les fibrations ordonnées, les propriétés de complétude sont habituellement indiquées en usant d'un vocabulaire particulier. Pour signifier que la fibration ordonnée $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ admet des produits finis (resp. un objet final, des sommes finies, un objet initial) on dira qu'elle admet des inf finis (resp. un plus grand élément, des sup finis, un plus petit élément). De même, pour dire que C admet des sommes (resp. des produits) on dira qu'elle admet des quantifications existentielles (resp. des quantifications universelles).

Le cas où les fibres sont des algèbres de Heyting n'est pas couvert par les notions rencontrées jusqu'ici, mais on peut y remédier en introduisant la notion de fibration cartésienne fermée, ce qui peut se faire rapidement comme suit.

Une fibration C sur $\mathbb{B}$ sera dite cartésienne fermée si pour tout objet I de $\mathbb{B}$ la fibre C(I) est une catégorie cartésienne fermée (au sens usuel) et si pour tout $u : J \to I$ le foncteur u^* commute aux exponentielles - c'est-à-dire si le morphisme canonique de $u^*(X^Y)$ vers $u^*(X)^{u^*(Y)}$ (qui provient, par adjonction cartésienne, du composé

$$u^*(X^Y) \times u^*(Y) \cong u^*(X^Y \times Y) \xrightarrow{u^*(ev)} u^* X \quad)$$

est un isomorphisme.

§3. Fibrations localement petites.

1. ~~Ex~~. Pour une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$, dire qu'elle est localement petite, c'est dire que pour tout couple d'objets X, Y de $\mathbb{X}$, les flèches de X vers Y constituent un ensemble, noté $Hom(X,Y)$. Dans la fibration $Ens(\mathbb{X}) \to Ens$ associée, on peut, pour deux familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ dans la même fibre, considérer l'ensemble $\coprod_{i\in I} Hom(X_i,Y_i)$, ~~muni de sa~~ projection évidente sur I, et la famille de flèches, indexée par cette somme-là ~~ensemble-là~~, ~~construite~~ que l'on obtient ~~en prenant~~ ~~formée de la flèche $f_i : X_i \to Y_i$~~, au-dessus de l'élément (i,f_i) de la somme, ~~par~~ la flèche $f_i : X_i \to Y_i$ elle-même.

(pas d'inversion ici) Soit alors $u : J \to I$ une application quelconque et $(g_j : X_{u(j)} \to Y_{u(j)})_{j\in J}$ une famille de flèches de $\mathbb{X}$. Celle-ci s'obtient comme image réciproque de la famille de flèches précédente via l'application de J dans $\coprod_{i\in I} Hom(X_i,Y_i)$ qui envoie j sur le couple $(u(j), g_j)$ — nécessairement.

En général, on dit que la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite pour tout objet I de $\mathbb{B}$ et ~~si~~ pour tout couple d'objets X, Y de $C(I)$ on peut trouver un morphisme $\delta : Hom_I(X,Y) \to I$ et une flèche $\gamma : \delta^*(X) \to \delta^*(Y)$ qui soit universelle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ et toute flèche $g : u^*X \to u^*Y$ dans $C(J)$, il existe une flèche unique $\vartheta : J \to Hom_I(X,Y)$ ~~telle que~~ ~~vérifiant~~ pour laquelle $\delta\vartheta = u$ et $\vartheta^*(\gamma)$ soit ~~isomorphe~~ égal à g.

La flèche γ est en quelque sorte la flèche générique de X vers Y et la donnée d'une vraie flèche de X vers Y dans $C(I)$ revient exactement à la donnée d'une section de δ.

3.2.1. Si $\mathbb{X}$ est localement petite, on peut également, dans la fibration $Ens(\mathbb{X}) \to Ens$ associée, considérer pour deux familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ — dans des fibres différentes — l'ensemble $\{(i,j,f) \mid f : X_i \to Y_j\}$, ou, ce qui revient au même, l'ensemble $\coprod_{(i,j)\in I\times J} Hom(X'_{ij}, Y'_{ij})$, (où $X'_{ij} = X_i$ pour tout j et $Y'_{ij} = Y_j$ pour tout i), muni des projections évidentes vers I et J, avec, au-dessus de (i,j,f_{ij}) la flèche $f_{ij} : X_i \to Y_j$ elle-même. Cette famille est universelle parmi toutes les familles de flèches entre des X_i et des Y_j, obtenues par

En général, si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies et si la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, on pourra faire une construction analogue. Pour tout couple formé de X dans $C(I)$ et Y dans $C(J)$ on peut trouver un objet $\underline{Hom}(X,Y)$ de $\mathbb{B}$, muni de flèches $\partial_0 : \underline{Hom}(X,Y) \to I$ et $\partial_1 : \underline{Hom}(X,Y) \to J$, et une flèche $\bar{\gamma} : \partial_0^*(X) \to \partial_1^*(Y)$ (dans $C(\underline{Hom}(X,Y))$) avec la propriété suivante : pour tous K, $u_0 : K \to I$, $u_1 : K \to J$ et $h : u_0^*(X) \to u_1^*(Y)$, il existe une factorisation unique $u' : K \to \underline{Hom}(X,Y)$ telle que $\partial_0 u' = u_0$, $\partial_1 u' = u_1$ et $u'^*(\bar{\gamma}) \simeq h$. Il suffit en effet de former un produit $I \times J$, avec les projections p et q, et de prendre un objet $\underline{Hom}_{I\times J}(p^*X, q^*(Y))$, avec une flèche générique de p^*X vers $q^*(Y)$.

Réciproquement d'ailleurs, si la construction indiquée est toujours possible, alors la fibration considérée est localement petite (sous l'hypothèse que $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies & toujours). L'objet $\underline{Hom}_I(X,Y)$ s'obtiendra en faisant le produit fibré de $\underline{Hom}(X,Y) \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} I \times I$ avec la diagonale $\Delta_I : I \to I \times I$, et γ de manière claire à partir de $\bar{\gamma} : \partial_0^*(X) \to \partial_1^*(Y)$.

~~4.3. La possibilité de définir pour deux objets X et Y~~

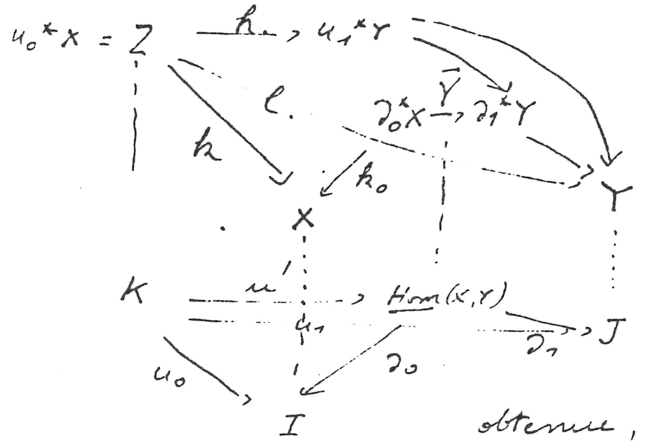
<u>Remarque.</u> Il faut se garder de confondre les objets $\underline{Hom}_I(X,X)$ et $\underline{Hom}(X,X)$. Pour ~~une~~ la fibration $\mathbb{E}ns(\mathcal{X}) \to \mathbb{E}ns$, on a d'un côté $\prod_{i\in I} Hom(X_i, X_i)$ et de l'autre $\prod_{(i,i')\in I\times I} Hom(X_i, X_{i'})$, qui est en général un objet nettement "plus gros".

3.2.2. La possibilité de définir des objets $\underline{Hom}(X,Y)$ et des familles génériques de flèches peut se formuler de manière quelque peu différente.

<u>Proposition.</u> Si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, C est localement petite ssi pour tous X, Y objets de $\mathbb{C}$, il existe un objet Z_0 de $\mathbb{C}$, muni de flèches $k_0 : Z_0 \to X$ et $l_0 : Z_0 \to Y$, avec k_0 cartésienne, qui soit universel en ce sens que pour tout objet Z de $\mathbb{C}$ muni de flèches $k : Z \to X$ et $l : Z \to Y$, avec k cartésienne, il existe une factorisation unique $k' : Z \to Z_0$ (nécessairement cartésienne) telle que $k_0 k' = k$ et $l_0 k' = l$.

~~Annonçons~~ Esquissons la démonstration à titre d'exercice.

Supposons la fibration localement petite, et prenons pour Z_0 l'objet $\partial_0^*(X)$ au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$. ~~Il~~ L'objet est muni d'une flèche cartésienne h_0 vers X et d'une flèche l_0 vers Y obtenue en composant la flèche universelle $\bar{\gamma} : \partial_0^*(X) \to \partial_1^*(Y)$ avec la flèche cartésienne $\partial_1^* Y \to Y$.



Soient alors Z, $h : Z \to X$ cartésienne et $l : Z \to Y$ quelconque. Posons $C(Z) = K$, $C(h) = u_0$ et $C(l) = u_1$. La flèche l se factorise à travers la flèche cartésienne $u_1^* Y \to Y$. Pour $h : Z = u_0^*(X) \to u_1^* Y$ ainsi obtenue, il existe une seule flèche $u' : K \to \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ telle que h soit $u'^*(\bar{\gamma})$. Il est facile de voir que la flèche cartésienne au-dessus de u', de $u_0^* X$ vers $\partial_0^* X$, convient comme factorisation.

Dans l'autre sens, commençons par poser $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = C(Z_0)$, $\partial_0 = C(h_0)$, $\partial_1 = C(l_0)$ et prenons pour $\bar{\gamma}$ la factorisation de l_0 à travers la flèche cartésienne $\partial_1^* Y \to Y$. Pour $u_0 : K \to I$ et $u_1 : K \to J$ donnés ainsi que $h : u_0^* X \to u_1^* Y$, prenons ~~$Z = u_0^*(X)$, h cartésienne au-dessus de u_0.~~ $h : Z = u_0^* X \to X$ cartésienne au-dessus de u_0, et $l : Z \to X$ égale à h suivie de la flèche cartésienne $u_1^* Y \to Y$. La factorisation $h' : u_0^* X \to \partial_0^* X$ ~~est~~ est cartésienne au-dessus de $u' = C(h')$. Il reste à ~~voir~~ vérifier que $\partial_1 u' = u_1$, $\partial_0 u' = u_0$, $u'^*(\bar{\gamma}) = h$ et que u' est la seule flèche ayant ces propriétés. C'est un travail facile que nous laissons au lecteur.

3.3. ~~Si C est une fibration localement~~

Les catégories localement petites déterminent une sous-catégorie de $\mathrm{Fib}(\mathbb{B})$ et si on prend en considération les familles de telles catégories (1.5.2), on obtient en fait une sous-fibration de $\mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$. En effet, si C est une fibration localement petite sur $\mathbb{B}/I$ et si $u : J \to I$ est une flèche de $\mathbb{B}$, on remarque immédiatement que la fibration image réciproque de C le long de Σ_u est encore localement petite

~~En particulier, si C~~ ~~Conversion~~ ~~particulière de cette dernière remarque~~

On note en particulier que si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, la fibration $I^*(C)$, en id_I de $I^*(C)$, peut donc être regardée comme fibre au-dessus de l'objet final ~~d'~~ d'une catégorie localement petite. Cette observation simple nous sera utile dans la suite : pour l'étude de certains phénomènes, on fera l'hypothèse qu'on est dans la fibre au-dessus de l'objet final.

3.4. <u>Proposition</u> Si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, alors

(i) les petites catégories sont localement petites ;

(ii) la catégorie des catégories localement petites est à sommes.

Pour le (i), on observe que si $\underline{C}$ ~~$= (C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \gamma, \mu)$~~ est une catégorie interne à $\mathbb{B}$, on peut, pour $X, Y : I \to C_0$, indiquer dans $\mathbb{B}$ ~~des objets~~ un objet $\mathrm{Hom}_I(X,Y)$ et des flèches $\delta : \mathrm{Hom}_I(X,Y) \to I$ et $\gamma : \mathrm{Hom}_I(X,Y) \to C_1$ telles que $\partial_0 \gamma = X\delta$ et $\partial_1 \gamma = Y\delta$, et qui soient universels pour cette double propriété. Il s'agit d'un sous-objet de $C_1 \times I$ qui se écrit comme intersection de deux égalisateurs. (Pour $\mathbb{B} = \mathcal{E}ns$, on se limite aux couples (f, i) tels que la source de f soit X_i et le but de f soit Y_i, ce qui donne $\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}(X_i, Y_i)$.)

Pour le (ii), on se ramène, compte tenu de la remarque faite en 3.3, au problème suivant. Sachant que la fibration C sur $\mathbb{B}/I$ est localement petite, montrer que la fibration $\coprod_I C$, obtenue en composant C avec Σ_I, le foncteur de composition avec la flèche canonique $I \to 1$ (cf. 2.6) est à son tour localement petite. Soient donc X et Y deux objets de $(\coprod_I C)(J)$. Il existe deux flèches $u : J \to I$ et $v : J \to I$ telles que $X \in C(u)$ et $Y \in C(v)$. Soit $k : K \to J$ le noyau du couple (u, v). Posons $w = uk = vk$. Pour les objets $k^*(X)$ et $k^*(Y)$, dans ~~$C(uk)$~~ $C(w)$, il existe une flèche $\delta : \mathrm{Hom}^C_w(k^*X, k^*Y) \to K$, et une flèche universelle γ dans la fibre ~~de~~ $C(k\delta)$. En fait $k\delta$ ~~et γ~~, comme flèche de but J et γ, comme flèche dans $(\coprod_I C)(\mathrm{Hom}^C_w(k^*X, k^*Y))$ ont les propriétés souhaitées.

3.5. <u>Proposition</u> Si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies et à produits, alors

(i) la catégorie $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ est localement petite ;

(ii) la catégorie des catégories localement petites est à produits.

Pour le (i), supposons que u et v soient deux flèches de but I dans $\mathbb{B}$

et indiquons ce ~~qu'est~~ qu'est la flèche $\delta : \mathrm{Hom}_I(u, v) \to I$.

On fait le produit fibré de u et v, ce qui fournit une flèche de but u dans $\mathcal{B}/_I$, et on prend ~~le~~ produit le long de u de cette flèche. La flèche γ se trouve aisément.

Pour le (ii), on se ramène au problème suivant : sachant que C est localement petite sur $\mathcal{B}/I$, montrer que la fibration $\prod_I (C)$ est localement petite. On se rappelle que $\prod_I (C)(J)$ n'est autre que $C(\pi_1 : I \times J \to I)$ (2.6). Pour X, Y dans cette fibre, il existe

$\delta : \mathrm{Hom}^C_{\pi_2}(X, Y) \to I \times J$, dont on peut prendre l'image par

$\prod_{\pi_2}$ ~~\Rightarrow~~ ~~la première projection de $I \times J$ vers I~~ ($\pi_2 : I \times J \to J$ est la seconde projection),

et qui fournit la flèche de but J qu'il faut.

Plutôt que de poursuivre la vérification formelle, nous allons constater dans un cas particulier que la construction indiquée fournit bien ce à quoi on s'attend. Supposons que $\mathcal{B} = \mathcal{E}ns$ et que C ~~est~~ soit la fibration sur $\mathcal{E}ns/_I$ obtenue à partir d'une fibration $\mathcal{E}ns(\mathcal{X}) \to \mathcal{E}ns$ ($\mathcal{X}$ catégorie ordinaire) par image réciproque le long du foncteur source, de $\mathcal{E}ns/I$ vers $\mathcal{E}ns$. Dans ce cas, deux objets X et Y de la fibre $C(\pi_1)$ sont deux familles $(X_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ et $(Y_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ d'objets de $\mathcal{X}$. La flèche δ est la projection évidente de $\coprod_{(i,j) \in I \times J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X_{ij}, Y_{ij})$ sur $I \times J$ et

$\prod_{\pi_2}(\delta)$ a comme fibre en j_0 l'ensemble $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X_{ij_0}, Y_{ij_0})$.

La famille $\prod_{\pi_2}(\delta)$ est donc $\coprod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X_{ij}, Y_{ij}) \right)$, avec la projection évidente sur J. Or ~~...~~ cette somme coïncide bien ~~bien~~ avec la ~~famille~~ somme $\coprod_{j \in J} \mathrm{Hom}_{(\mathcal{X}^I)}((X_{ij})_{i \in I}, (Y_{ij})_{i \in I})$, ce ~~qui est~~ à quoi on s'attend puisque ~~...~~ $\prod_I (C)$ est dans ce cas la fibration des I-familles d'objets de $\mathcal{X}$ (cf. 1.8.5).

Exercice. Si $\mathcal{B}$ est un topos, la catégorie $\mathcal{D}_1$ est localement petite (voir 3.5 (ii)). Vérifier que pour tout objet X on a $\tilde{X} = \mathrm{Hom}(v, X)$ (où $v : 1 \to \Omega$ est le mon. objet universel et X ~~...~~ désigne par abus la flèche $X \to I$).

3.6. Dans une ~~fibration~~ catégorie (fibrée) localement petite, on peut ~~représenter~~ parler dans la base de la famille des flèches entre deux objets, ~~et~~ les objets Hom qui représentent ~~ces~~ souvent ces familles de flèches possèdent certaines ~~...~~ propriétés ~~usuelles~~ auxquelles on peut s'attendre, ~~...~~ pour autant que la catégorie de base $\mathcal{B}$ soit assez riche pour contenir certaines construct.

3.6.1. Si X, Y et Z sont trois objets dans $C(I)$, on a une famille universelle de flèches $\gamma : \delta^*(X) \to \delta^*(Y)$, pour $\delta : \mathrm{Hom}_I(X, Y) \to I$, En faisant le produit fibré — respectivement — de δ et δ', on obtient un objet

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Hom_I(Y,Z) \arrow[d, "\delta'"] \\ Hom_I(X,Y) \arrow[r, "\delta"] & I \end{tikzcd}$$

$Hom_I(X,Y) \times_I Hom_I(Y,Z)$, et, dans la fibre au-dessus de cet objet, un couple de flèches composables $\varepsilon^*(\gamma)$, $\varepsilon'^*(\gamma')$. Le composé de ces flèches provient ~~d'une~~ de la flèche universelle au-dessus de $Hom_I(X,Z)$ via un morphisme

$c^I_{X,Y,Z} : Hom_I(X,Y) \times Hom_I(Y,Z) \longrightarrow Hom_I(X,Z)$, morphisme dit "de composition".

D'autre part, pour tout objet X de $C(I)$, on peut obtenir l'identité sur X à partir de la flèche universelle au-dessus de $Hom_I(X,X)$ via ~~par une~~ morphisme ~~section i_X de $Hom_I(X,X) \to I$~~, morphisme dit "d'identité sur X".
$i_X : I \to Hom_I(X,X)$.

3.6.2. En utilisant les morphismes indiqués, on peut remarquer que dans une catégorie fibrée localement petite on peut aussi représenter la famille des ~~flèches~~ isomorphismes entre deux objets. Soient X et Y ~~dans~~ deux objets de $C(I)$. On dispose de deux flèches de composition, de $Hom_I(X,Y) \times_I Hom_I(Y,X)$ vers $Hom_I(X,X)$ et vers $Hom_I(Y,Y)$ (la seconde, compte tenu du fait que le produit fibré est commutatif), donc d'une flèche vers $Hom_I(X,X) \times_I Hom_I(Y,Y)$. On a par ailleurs un mono de I vers $Hom_I(X,X) \times_I Hom_I(Y,Y)$, constitué par le couple de sections (i_X, i_Y). Le produit fibré de ces morphismes donne un sous-objet $Iso_I(X,Y) \longrightarrow Hom_I(X,Y) \times_I Hom(Y,X)$. Dans la fibre sur $Iso_I(X,Y)$, on a deux flèches qui proviennent respectivement de la flèche universelle de X vers Y et de celle de Y vers X. Les deux composés possibles de ces flèches peuvent être obtenus à partir de la flèche identique sur X et la flèche identique sur Y (regarder le produit fibré définissant $Iso_I(X,Y)$). Il est facile de voir que si f et h sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre de $u^*(X)$ vers $u^*(Y)$, pour $u : J \to I$, ils proviennent des deux flèches en question via un morphisme unique $J \to Iso_I(X,Y)$.

comme * rque

3.6.3. Les formules usuelles $Hom(\coprod_i X_i, Y) = \prod_i Hom(X_i, Y)$ et $Hom(X, \prod_i Y_i) = \prod_i Hom(X, Y_i)$, concernant l'exactitude à gauche des Hom, admettent un analogue dans le contexte des catégories fibrées localement petites.

On aura par exemple, pour $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$, Y dans $C(J)$ et X dans $C(J)$ la relation

$$\underline{Hom}(\coprod Y, X) \simeq \prod \underline{Hom}_J(Y, u^*X)$$

*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Iso}_I(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[d, "(i_X,\, i_Y)"] \\
\mathrm{Hom}_I(X,Y) \times_I \mathrm{Hom}_I(Y,X) \arrow[r, "(c^I_{X,Y,X}\,,\; c^I_{Y,X,Y} \circ s)"'] & \mathrm{Hom}_I(X,X) \times_I \mathrm{Hom}_I(Y,Y)
\end{tikzcd}
$$

(s désigne la symétrie sur le produit fibré)

En composant le monomorphisme de gauche avec la projection sur $\mathrm{Hom}_I(X,Y)$ on obtient encore un monomorphisme. Pour le voir il suffit de penser au lemme de Yoneda et au fait que dans un couple de flèches (f, g) tel que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient des identités, la flèche f détermine g complètement.

[illegible]

Pour vérifier cette relation, considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "u"] & I \\ J' \arrow[u, "w"] \arrow[r, "u'"] & I' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd} \quad \text{dans } \mathbb{B}$$

On a $\underline{Hom}_{\mathbb{B}/I}\left[v, \underline{Hom}^{C}_{I}\left(\coprod_u Y, X\right)\right] \simeq \underline{Hom}_{C(I')}\left(v^*\coprod_u Y, v^*X\right)$

$$\simeq \underline{Hom}_{C(I')}\left(\coprod_{u'} w^* Y, v^*X\right)$$

$$\simeq \underline{Hom}_{C(J')}\left(w^* Y, u'^* v^* X\right)$$

$$\simeq \underline{Hom}_{\mathbb{B}(J')}\left(w^* Y, w^* u^* X\right)$$

$$\simeq \underline{Hom}_{\mathbb{B}/J}\left(w, \underline{Hom}_J(Y, u^*X)\right)$$

$$\simeq \underline{Hom}_{\mathbb{B}/I}\left(v, \prod_u \underline{Hom}_J(Y, u^*X)\right).$$

3.7. Dans une fibration localement petite, les fibres ne peuvent pas être n'importe quoi. Les propositions suivantes illustrent ce fait.

3.7.1 Proposition. Si $\mathbb{C}$ n'est pas vide, si $\mathbb{B}$ possède un objet initial 0 et si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, alors $C(0)$ est équivalente à $\mathbb{1}$, qui n'est pas vide.

Soient en effet X et Y deux objets quelconques dans $C(0)$. L'identité sur 0 se factorise de manière unique à travers $\delta : Hom_0(X, Y) \to 0$ et il y a donc une flèche unique de X vers Y (l'image réciproque de la flèche générique $\delta^*(X) \to \delta^*(Y)$). Mais aussi de Y vers X, de X vers X, de Y vers Y. Ces objets sont donc canoniquement isomorphes.

Remarque. La propriété $C(0) \simeq \mathbb{1}$ est vérifiée pour la fibration $Ens(\mathbb{X}) \to Ens$ associée à une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$. Mais elle ne résulte pas ~~des propriétés~~ d'hypothèses de complétude sur $\mathbb{B}$ ou sur la fibration. Pour s'en rendre compte, on peut considérer la fibration $\mathbb{C} \to \mathbb{1}$ pour $\mathbb{C}$ arbitraire. La base $\mathbb{1}$ est un topos mais la fibre sur l'objet initial est $\mathbb{C}$, ~~par~~ qui n'a ~~pas de raison par $\mathbb{C}$ quel~~ non nécessairement équivalente à $\mathbb{1}$.

3.7.2. Proposition. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, pour tout épi $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ le foncteur $u^* : C(I) \to C(J)$ est fidèle.

En effet, soient f et g deux flèches distinctes de X vers Y dans $C(I)$.

via deux sections distinctes σ_f et σ_g, de I vers $\underline{Hom}_Z(X,Y)$.
Les composés $\sigma_f u$ et $\sigma_g u$ sont distincts (u épi) et fournissent dans $C(J)$ des flèches $u^*(f)$ et $u^*(g)$ qui sont forcément distinctes

3.7.3. <u>Proposition</u>. Si C est localement petite et à sommes sur un topos $\mathbb{B}$ (~~en fait on n'a besoin~~) alors pour tous objets I et J de $\mathbb{B}$ on a

$$C(I \amalg J) \simeq C(I) \times C(J).$$

En fait on n'a besoin que d'une partie des hypothèses, comme le <u>montre la démonstration</u>.
~~D'abord~~ On peut, sans hypothèses sur C, définir un foncteur de $C(I \amalg J)$ vers $C(I) \times C(J)$. Si C est localement petite, ce foncteur est pleinement petite. Et moyennant l'existence de sommes ~~convenables~~ convenables, il définit une <u>équivalence</u>.

Soient p, q les injections de I et J dans $I \amalg J$. On peut envoyer $Z \in C(I \amalg J)$ sur le couple (p^*Z, q^*Z) dans $C(I) \times C(J)$. On obtient de manière évidente un foncteur, qui est fidèle. Car soient ξ et ξ' deux flèches distinctes de Z vers Z' dans $C(I \amalg J)$. A ces flèches correspondent deux sections distinctes σ_ξ et $\sigma_{\xi'}$ de $\underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z') \longrightarrow I \amalg J$. Deux flèches distinctes de $I \amalg J$ vers $\underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z')$ ne peuvent avoir les mêmes composés à la fois avec p et avec q. Donc les couples $(p^*\xi, q^*\xi)$ et $(p^*\xi', q^*\xi')$ doivent être distincts.

Le caractère plein est facile à vérifier : une flèche de p^*Z vers p^*Z' s'obtient via une flèche σ_p de I vers $\underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z')$; même chose pour une flèche de q^*Z vers q^*Z', via $\sigma_q : J \to \underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z')$ et au couple (σ_p, σ_q) correspond une unique flèche $\sigma : I \amalg J \to \underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z')$, qui fournit ce qu'il faut dans $C(I \amalg J)$.

$$\begin{tikzcd}
 & p^*Z \arrow[d, dash, dotted] & Z \arrow[r, shift left, "\xi"] \arrow[r, shift right, "\xi'"'] \arrow[dd, dash, dotted] & Z' \\
q^*Z \arrow[dd, dash, dotted] & I \arrow[dr, "p"] & & \\
 & & I \amalg J \arrow[r, bend right, "\sigma_\xi"'] \arrow[r, bend right=60, "\sigma_{\xi'}"'] & \underline{Hom}_{I \amalg J}(Z,Z') \arrow[l] \\
J \arrow[urr, "q"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Comment obtenir une équivalence ? Soient $X \in C(I)$ et $Y \in C(J)$ et supposons qu'on puisse former $\coprod_p X$ et $\coprod_q Y$ dans $C(I \amalg J)$. On prend $Z = (\coprod_p X) \amalg (\coprod_q Y)$. Si dans $\mathbb{B}$ la somme $I \amalg J$ est disjointe donc si $0 \longrightarrow I$ est un produit fibré, alors il est facile de voir que $q^*(Z) = q^*(\coprod_p X) \amalg q^*(\coprod_q Y) = 0 \amalg Y = Y$ (en la condition de Chevalley) et que $p^*(Z) = X$. (De manière intuitive, aux familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ on associe d'abord des familles $(Z'_k)_{k\in I\amalg J}$ (définie par $Z'_k = X_k$ si $k\in I$ et $Z'_k = 0$ sinon) et $(Z''_k)_{k\in I\amalg J}$ (avec $Z''_k = Y_k$ si $k\in J$ et $Z''_k = 0$ sinon), et on fait la somme indice par indice).

3.8. Théorème. Soit $\mathbb{B}$ une catégorie à produits, D une fibration localement petite et C une petite fibration. Alors la fibration D^C est localement petite elle aussi.

En accord avec la remarque faite en B 3.11, ~~on~~ nous ne nous occuperons que de la fibre de D^C en 1. Les objets de cette fibre sont les foncteurs cartésiens ~~de~~ la fibration associée à la catégorie interne $\underline{C} = (C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \eta, \mu)$ vers la fibration localement petite D. Soient F et G deux tels foncteurs. Leur donnée comprend celle de deux familles $F_0 \in D(C_0)$ et $G_0 \in D(C_0)$ et celle de deux morphismes de familles $\varphi : \partial_0^* F_0 \to \partial_1^* F_0$ ~~(dans B)~~ $\psi : \partial_0^* G_0 \to \partial_1^* G_0$ (dans $D(C_1)$). Il s'agit d'indiquer un objet des transformations naturelles entre ces foncteurs, objet qui sera un sous-objet de $\mathrm{Hom}^D_{C_0}(F_0, G_0)$, obtenu comme égalisateur de deux flèches de but $\mathrm{Hom}^D_{C_1}(\partial_0^* F_0, \partial_1^* G_0)$, dont nous allons indiquer la construction.

Remarquons d'abord que pour tout objet I de $\mathbb{B}$, se donner une flèche de X vers Y dans $D(I)$ revient à se donner une section de $\underline{\mathrm{Hom}}^D_I(X,Y) \to I$ ou encore une flèche de 1 vers $\prod_I \underline{\mathrm{Hom}}^D_I(X,Y)$. Observons ensuite que si on a $u : J \to I$, il existe une flèche canonique $\bar{u}$ de $\prod_I \underline{\mathrm{Hom}}_I(X,Y)$ vers $\prod_J \underline{\mathrm{Hom}}_J(u^*X, u^*Y)$. En effet, par le lemme de Yoneda et la définition des produits, l'existence de cette flèche revient à celle d'une transformation naturelle en K entre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/I}(K\times I \xrightarrow{p} I, \underline{\mathrm{Hom}}_I(X,Y) \to I)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/J}(K\times J \xrightarrow{q} J, \underline{\mathrm{Hom}}_J(u^*X, u^*Y) \to J)$, ou encore entre $\mathrm{Hom}_{D(K\times I)}(p^*X, p^*Y)$ et $\mathrm{Hom}_{D(K\times J)}((K\times u)^* p^*X, (K\times u)^* p^*Y)$ — où l'on a clairement " prendre l'image réciproque le long de $K\times u$.

Donc, d'une part φ et ψ donnent des flèches
$\tilde{\varphi} : 1 \longrightarrow \prod_{C_1} \underline{\mathrm{Hom}}_{C_1}(\partial_0^* F_0, \partial_1^* F_0)$ et $\tilde{\psi} : 1 \longrightarrow \prod_{C_1} \underline{\mathrm{Hom}}_{C_1}(\partial_0^* G_0, \partial_1^* G_0)$.

et d'autre part ∂_0 et ∂_1 nous fournissent

$$\bar{\partial}_0 : \prod_{C_0} \underline{Hom}_{C_0}(F_0, G_0) \longrightarrow \prod_{C_1} \underline{Hom}_{C_1}(\partial_0^* F_0, \partial_0^* G_0)$$

$$\bar{\partial}_1 : \prod_{C_0} \underline{Hom}_{C_0}(F_0, G_0) \longrightarrow \prod_{C_1} \underline{Hom}_{C_1}(\partial_1^* F_0, \partial_1^* G_0).$$

Combinant $\tilde{\varphi} \times \partial_2$ avec l'isomorphisme résultant de la commutation de $\prod_{C_1}$ (adjoint à droite) aux produits finis et avec l'image par $\prod_{C_1}$ de la flèche de composition $c^{C_1}_{\partial_0^* F_0, \partial_1^* F_0, \partial_1^* G_0}$ (cf. 3.6.1), on obtient la première ~~f~~ des flèches souhaitées, et l'autre s'obtient de manière analogue.

Le reste des vérifications est laissé au lecteur, qui pourra constater que lorsque $\mathbb{B} = \mathrm{Ens}$ l'objet indiqué est bien celui des transformations naturelles entre les foncteurs F et G, de la petite catégorie $\underline{C}$ vers la catégorie localement petite D.

Remarques 1. La structure de catégorie de $\underline{C}$ n'a pas été utilisée. En fait le théorème reste vrai si on remplace la catégorie interne $\underline{C}$ par un quelconque diagramme interne.

2. D'autres résultats usuels sur les catégories de foncteurs admettent un analogue dans notre contexte. Le théorème d'extension de Kan par exemple. Ils seront établis plus loin, en faisant appel à la notion de définissabilité ~~. ~~

~~4.9. Pour terminer ce paragraphe,~~

~~4.9. Dans une (quand) fibration localement petite, la notion de famille séparatrice peut être reformulée de manière plus appropriée.~~

3.9. Pour terminer ce paragraphe, nous ~~[illegible]~~ observerons que si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite et $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies – ce qui permet de parler de la fibration notée ∂_1 ou $\mathbb{B} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ – nous pouvons décrire globalement un plongement de Yoneda de C vers la catégorie $\mathbb{B}^{C^{op}}$.

Soit X dans $C(I)$. On doit lui associer un ~~foncteur cartésien~~ foncteur cartésien de $C^{op} \times \underline{I}$ vers $\mathbb{B}$. Soient donc Y dans $C^{op}(J)$ et $u : J \to I$. On peut les envoyer sur l'objet $\delta^X_Y : \underline{Hom}^C_J(Y, u^* X) \to$ de $B(J)$. S'il y a une flèche $\varphi : Y' \to Y$ dans $C(J)$, le composé de $\delta^{X*}_Y(\varphi)$ et de la flèche universelle de Y vers $u^* X$ s'obtient à partir

S'il y a une flèche de (Z,v), dans $(C^{\mathrm{op}}\times I)(K)$, vers (Y,u), dans $(C^{\mathrm{op}}\times I)(J)$, au-dessus de $w : K \to J$ (ce qui implique $v = wu$), flèche essentiellement représentée par $\varphi : v^*Y \to Z$ dans $C(K)$, alors on obtient une flèche convenable dans B, au-dessus de w, en composant $Hom^C_K(\varphi, v^*X)$ avec la flèche canonique de $Hom^C_J(w^*Y, w^*(u^*X))$ vers $Hom^C_J(Y, u^*X)$ (faisant du carré de droite un produit fibré dans B d'ailleurs).

$$\begin{tikzcd}
Hom^C_K(\varphi, v^*X) \arrow[r] & Hom^C_J(w^*(Y), w^*(u^*(X))) \arrow[r] \arrow[d] & Hom^C_J(Y, u^*X) \arrow[d] \\
Hom^C_K(Z, v^*X) \arrow[r] & K \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "v"'] & J \arrow[d, "u"] \\
 & & I
\end{tikzcd}$$

Soit à présent $f : X \to X'$ dans $C(I)$. On doit lui associer une transformation naturelle entre les foncteurs cartésiens correspondant à X et X' respectivement. Donc, pour Y dans $C^{\mathrm{op}}(J)$ et $u : J \to I$, on doit indiquer une flèche de $Hom^C_J(Y, u^*X) \to J$ vers $Hom^C_J(Y, u^*X') \to J$. Ce sera bien sûr celle qui permet d'obtenir dans ~~$C(Hom^C_J(Y,u^*X))$~~ $C(Hom^C_J(Y, u^*X))$ le composé de la flèche universelle (entre Y et u^*X) et de l'image réciproque de u^*f). ~~(entre u^*X et u^*X' dans $C(I)$)~~)

Laissant au lecteur le soin de compléter la définition pour une flèche quelconque de $\mathbb{C}$, nous nous attarderons un instant sur le caractère pleinement fidèle. La vérification fait appel à la remarque simple ~~au lemme~~ suivante.

<u>Lemme.</u> Un foncteur cartésien est pleinement fidèle si il induit des foncteurs pleinement fidèles entre les fibres correspondantes.

Deux flèches distinctes f et g entre X et X' dans $C(I)$ donnent des transformations naturelles que l'on peut évaluer en particulier pour $u = id_I$ et $Y = X$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X' \\
Hom^C_I(X,X) \arrow[rr] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & I \arrow[ll, bend left, "i_X"] \\
Hom^C_I(X,X') \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Les images réciproques de f et g dans $C(Hom^C_I(X,X))$ sont distinctes (puisqu'on peut retrouver f et g à partir d'elles via la section i_X.) et proviennent donc de la flèche universelle entre X et X' via deux flèches verticales distinctes.

... naturelle donnée comprend .

§4. Définissabilité.

4.0. En théorie des ensembles, le schéma de compréhension assure que si X est un ensemble (c'est-à-dire un objet d'un modèle M de la théorie des ensembles considérée) et si P est une partie du modèle qui est définissable (par une formule de la théorie des ensembles), alors la trace de P sur X est un ensemble. ~~Ce qui joue le rôle~~ Ce qui joue le rôle d'objet du modèle dans ~~ce contexte~~ l'étude d'une fibration $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, c'est une famille, c'est-à-dire un objet X de la catégorie $\mathbb{C}$, muni de son objet des indices $C(X) = I$, mais ~~~~ considéré aussi avec toutes ses images réciproques le long des flèches $u: J \to I$ dans la base. Connaître une famille, c'est aussi connaître toutes les familles qui s'en déduisent par les changements d'indices admis. Notre notion de "partie P du modèle qui est définissable" devra être telle que sa trace sur un objet donné (X, I) soit encore un objet du modèle. On veut pouvoir parler de la sous-famille (X', I') de (X, I) formée des membres qui sont dans la partie définissable en question. Il peut arriver que certaines familles déduites de X par image réciproque le long de certaines flèches $u: J \to I$ soient dans P. Mais ce qu'on veut, c'est que parmi elles il y ait une famille privilégiée qui permette d'obtenir les autres par image réciproque.

4.1. ~~Définitions~~ Classes définissables.

4.1.1. Soit $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration. Une <u>classe $\mathcal{E}$ d'objets de $\mathbb{C}$</u> est dite <u>définissable</u> si:

(1) elle contient en même temps qu'un objet Y la source de toute flèche cartésienne aboutissant à Y;

(2) pour tout $X \in C(I)$ il existe un sous-objet $m: I_0 \to I$ tel que $m^*(X) \in \mathcal{E}$ et que pour tout $u: J \to I$ pour lequel $u^*(X) \in \mathcal{E}$ il existe une factorisation unique $u = mv$ avec $u^*(X) \cong v^*(m^*(X))$.

Une manière commode de formuler la condition (2) est de dire que le préfaisceau ϕ sur $\mathbb{B}$ défini par $\phi(J) = \{u: J \to I \mid u^*(X) \in \mathcal{E}\}$, qui est un sous-préfaisceau de $\mathrm{Hom}(-, I)$, est représentable. Le préfaisceau

...me $\underline{I}$ pour I objet de $\mathbb{B}$ (1.7), les ...définissables d'objets correspondent ...ment aux ss. objets de I dans $\mathbb{B}$.

4.1.2. Une classe de flèches ~~modèle~~ $\mathcal{F}$ ~~définissable~~ de $\mathbb{C}$ ~~peut être dite~~ sera déclarée définissable si elle constitue une classe définissable d'objets pour la fibration C^2, ce qui revient à dire qu'elle contient en même temps qu'une flèche $f: X \to Y$ dans $\mathbb{C}(I)$ ses images réciproques par tout $u: J \to I$ dans $\mathbb{B}$ et que pour tous tels f et I on peut trouver un sous-objet $m: I_0 \to I$ tel que $m^*(f)$ soit dans $\mathcal{F}$ et ~~qui~~ soit universel pour cette propriété (si $u^*(f) \in \mathcal{F}$ alors $u = mv$ pour v unique dans $\mathbb{B}$ et $v^*(m^*(f)) = u^*(f)$) (on dira : ~~les ... sont définissables~~ ;

~~La classe des isomorphismes par exemple sera définissable si pour toute flèche $f: X \to Y$ dans $\mathbb{C}(I)$ il existe un sous-objet $m: I_0 \to I$ tel que $m^*(f)$ soit un iso, avec la propriété universelle usuelle.~~

4.1.3. Plus généralement, si A est une catégorie ordinaire, une classe de foncteurs de A dans $\mathbb{C}$ sera ~~dite~~ déclarée définissable si elle constitue une classe définissable d'objets pour la fibration C^A.

Si l'on prend par exemple pour A la catégorie $0 \rightrightarrows 1$ (deux flèches parallèles distinctes), une classe définissable de foncteurs de A dans $\mathbb{C}$ sera en fait une classe définissable de couples de flèches ayant même source et but et situées dans la même fibre (cf. sens de C^A, 1.8.5), Si en particulier la classe des couples de flèches de ce genre qui sont égales est définissable, on dira que l'égalité est définissable dans la fibration C. Autrement dit, l'égalité est définissable si pour tout diagramme $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ dans $C(I)$ il existe un sous-objet $m: I_0 \to I$ ~~et un diagramme tel que~~ et un diagramme

$$\cancel{X_0 \underset{g_0}{\overset{f_0}{\rightrightarrows}} Y_0} \qquad m^*X \underset{m^*g}{\overset{m^*f}{\rightrightarrows}} m^*Y$$

dans $C(I_0)$ formé de flèches égales qui soit universel pour tous les couples de flèches égales déduites du diagramme de départ par image réciproque.

Remarquons que l'égalité ~~n'est pas~~ est loin d'être toujours définissable. Si $\mathbb{M}$ est la catégorie des A-modules et si l'on regarde la fibration $\partial_1: \mathbb{M}^2 \to \mathbb{M}$, on s'aperçoit que pour deux homomorphismes distincts $f, g: M \to N$, regardés comme objets au-dessus du module nul 0, il n'est pas possible de trouver un sous-objet strict de 0 au-dessus duquel les restrictions de f et g pourraient devenir égales.

4.2 Caractère local.

4.2.1. Soit ~~a~~ $u: J \to I$ un épimorphisme strict tel que $u^*(X)$ soit dans la classe définissable $\mathcal{C}$. Il existe un sous-objet $m: I_0 \to I$ tel que $m^*(X)$ soit dans la classe et tel que u se factorise à travers m. Mais ceci entraîne ~~est aussi~~ que m est aussi un épimorphisme strict, donc un iso finalement et alors il est clair que X est lui-même dans la classe.
On peut reprendre le même raisonnement en remplaçant u par une famille $u_\alpha : J_\alpha \to I$ ~~strictement~~ épimorphique stricte (au sens usuel) dans la base, et obtenir ainsi le résultat simple mais important suivant.

Proposition. Une classe définissable est fermée par rapport aux ~~pour les~~ familles ~~strictement~~ épimorphiques (au sens usuel strictes).

~~Consequence~~ ~~Corollaire~~

4.2.3. Corollaire. Si $\mathcal{B}$ admet une classe de générateurs (par épimorphismes stricts), une classe définissable d'objets pour une fibration $C: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ donnée est entièrement déterminée par ses éléments figurant dans les fibres au-dessus des générateurs.
En particulier, si $\mathcal{B} = \mathrm{Ens}$, où un ~~le~~ singleton est générateur strict, une ~~sous catég~~ classe définissable pour la fibration $\mathrm{Ens}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Ens}$ sera entièrement déterminée par sa fibre sur ce ~~le~~ singleton, fibre qui ~~[illegible]~~ coïncide avec $\mathcal{X}$. Dans cette situation une classe définissable d'objets revient simplement à une classe d'objets dans $\mathcal{X}$. Et plus spécifiquement encore, si $\mathcal{X}$ est la catégorie discrète associée à un ensemble X, toute partie de X devient définissable pour la fibration sur Ens associée.

4.2.2. Corollaire. Si la catégorie $\mathcal{B}$ est munie d'une topologie de Grothendieck ~~et~~ moins fine que la topologie canonique, ~~donc pour laquelle les représentables sont des faisceaux — alors on peut encore montrer que~~ une classe définissable est fermée par rapport aux familles couvrantes.
En effet, une classe définissable sera en particulier ~~a fortiori~~ fermée par rapport aux familles épimorphiques strictes universelles (qui sont ~~les~~ les familles couvrantes pour la topologie canonique), et restera fermée si on restreint le nombre de familles couvrantes.

4.3 Sous-catégories définissables.

Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est une fibration, on dira qu'une sous-catégorie $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ est définissable si la classe des objets de $\mathbb{C}'$ et la classe de ses flèches sont définissables. (Ceci implique que ~~C est stable~~ la restriction de C à $\mathbb{C}'$ est encore une fibration sur $\mathbb{B}$) et complète la remarque faite en 4.2.3

4.3.1. Avec cette définition il est clair que les sous-catégories définissables de la fibration $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to$ ~~Ens~~ Ens associée à une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$ correspondent exactement aux sous-catégories de $\mathbb{X}$, au sens usuel. Mais il n'est pas difficile d'indiquer des sous-catégories fibrées de $\mathrm{Ens}(\mathbb{X})$ qui ne sont pas définissables. Supposons par exemple que $\mathbb{X}$ soit la catégorie discrète à 2 éléments : dans ce cas les objets de $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ au-dessus de l'ensemble I correspondent exactement aux parties de I ; en ne retenant chaque fois que la partie vide et l'ensemble I entier on obtient une sous-catégorie fibrée de (la fibration sur Ens associée à) la catégorie $\mathbb{X}$ qui n'est pas définissable. (Autrement dit, on peut trouver un "sous-ensemble" de l'ensemble $\{0,1\}$ qui n'est pas un ensemble !).

définissable sur $\mathbb{B}/I$ est transformée en une sous-catégorie définissable sur $\mathbb{B}/J$ par image réciproque le long de $u : J \to I$.

4.3.2. Si la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est à fibres discrètes, et correspond donc à un préfaisceau $F : \mathbb{B}^{op} \to \mathrm{Ens}$, une sous-catégorie fibrée de C correspond exactement à un sous-foncteur $F' \to F$. Cette sous-catégorie sera définissable si le sous-foncteur $F' \to F$ vérifie la condition suivante : pour chaque produit fibré de la forme

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}[-,I] & \longrightarrow & F \end{array}$$

(I objet quelconque de $\mathbb{B}$)

le sous-foncteur P est représentable.

Dans le topos $\hat{\mathbb{B}}$ il y a un objet $\Omega^F_{\hat{\mathbb{B}}}$, l'objet des sous-foncteurs de F. ~~Cet objet~~ Il correspond à une fibration désignée par $\mathcal{S}(C)$. ~~C'est~~ C'est la fibration des sous-catégories de C.(*) Les sous-catégories définissables de C déterminent une sous-fibration de $\mathcal{S}(C)$, désignée par $\mathcal{D}(C)$. Le préfaisceau correspondant à $\mathcal{D}(C)$ peut être ~~[illegible]~~ identifié ~~simplement~~ ~~[illegible]~~ lorsque $\mathbb{B}$ est un topos, une catégorie possédant un classifiant $\Omega_{\mathbb{B}}$ pour les sous-objets. Dans ce cas en effet, la condition de définissabilité pour un sous-foncteur $F' \to F$ ~~[illegible]~~ revient au fait que la fonction caractéristique de ce sous-foncteur, dans le topos $\hat{\mathbb{B}}$, se factorise à travers $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}[-, \Omega_{\mathbb{B}}]$. De [illegible]

(*) sa fibre en I est constituée par les sous-foncteurs de $\mathrm{Hom}[-, I] \times F_I$ ~~[illegible]~~

4.3.3. Même si la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est à fibres quelconques, on peut encore parler de la ~~sous~~ fibration $\mathcal{S}(C)$, des sous-catégories de $\mathbb{C}$. La fibre de $\mathcal{S}(C)$ en I sera constituée par l'ensemble des sous-catégories de $I^*(C)$ (l'image réciproque de C par le foncteur "source" de $\mathbb{B}/I$ vers $\mathbb{B}$) en tant que catégorie fibrée sur $\mathbb{B}/I$. On obtient ainsi une fibration scindée à fibres discrètes — qui généralise l'objet $\Omega^F_{\hat{\mathbb{B}}}$.

On peut également, dans le cas d'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ quelconque, décrire une fibration généralisant l'objet $\mathrm{Hom}[-, \Omega_{\mathbb{B}}]^F$ (qui existant lorsque $\mathbb{B}$ est un topos) : ce sera la fibration $\mathcal{D}(C)$ dont la fibre sur I est formée des sous-catégories définissables de $I^*(C)$.

4.3.4. <u>Proposition</u>. <u>Une sous-catégorie définissable d'une fibration localement petite est localement petite</u>.

La démonstration est très simple. Si X' et Y', objets de $C(I)$, sont dans la sous-catégorie définissable $\mathbb{C}'$, on dispose d'une flèche $\delta : \mathrm{Hom}^C_I(X',Y') \longrightarrow I$ dans $\mathbb{B}$ et d'un morphisme universel $\gamma : \delta^*(X') \to \delta^*(Y')$ (dans $\mathbb{C}$). Mais on a aussi un sous-objet m de $\mathrm{Hom}^C_I(X',Y')$ tel que $m^*(\gamma)$ soit dans $\mathbb{C}'$, de manière universelle. Il est immédiat que le composé δm et la flèche $m^*(\gamma)$ conviennent respectivement comme flèche $\mathrm{Hom}^{C'}_I(X',Y') \longrightarrow I$ ~~dans~~ $\mathbb{B}$ et comme flèche universelle de X' vers Y' dans $\mathbb{C}'$.

<u>Remarque</u>. Il suffit en fait que les flèches de $\mathbb{C}'$ ~~soient~~ forment une classe définissable pour ~~que $\mathbb{C}'$ soit lo~~ avoir le résultat.

4.4. Opérations sur les classes définissables.

Si la catégorie de base $\mathbb{B}$ possède une structure assez riche, il devient possible d'effectuer certaines opérations sur les classes définissables. On notera par exemple les résultats suivants.

4.4.1. Si dans $\mathbb{B}$ les intersections de sous-objets existent, ~~possède des limites à gauche finies~~, on peut toujours former l'intersection de deux classes définissables.

4.4.2. Si dans $\mathbb{B}$ les limites à gauche finies et les $\prod$ existent, on peut former l'intersection

La première affirmation est immédiate. Pour la seconde, on ~~...~~ ~~se base~~ part du fait qu'une famille indexée par I de classes définissables pour $C : \mathfrak{C} \to \mathbb{B}$, c'est une classe définissable $\mathfrak{C}^*$ pour la fibration $I^*(C)$. La classe intersection, que nous désignerons par $\mathfrak{C}'$, se décrit en donnant pour chaque X dans $\mathfrak{C}(K)$ le sous-objet représentant le foncteur $X \in \mathfrak{C}'$. Pour cela on considère le produit $K \times I$ avec les projections $p : K \times I \to K$ et $q : K \times I \to I$. ~~et on~~ On regarde alors ~~prend~~ le sous-objet de q (dans $\mathbb{B}/I$) qui représente cartésiennement le foncteur $p^*(X) \in \mathfrak{C}$, soit $m : (K\times I)_0 \hookrightarrow K \times I$ et on prend $\prod_{p^*}(m)$, sous-objet de K. Les vérifications sont laissées au lecteur.

4.5. ~~Conséquences de la~~ <u>Définissabilité des isos.</u>

4.5.1. <u>Proposition.</u> ~~Dans une~~ Si la base $\mathbb{B}$ admet des produits fibrés et si la fibration $C : \mathfrak{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, alors les isos sont ~~...~~ définissables dans C.

Soit $f : X \to Y$ dans $C(I)$. On sait ~~déjà~~ qu'il existe une flèche $\delta : Hom_I^C(X,Y) \to I$ et une flèche universelle $\gamma : \delta^* X \to \delta^* Y$ telle qu'en particulier $f = \sigma_f^*(\gamma)$ pour une ~~flèche~~ section σ_f convenable de δ. Par ailleurs, on a vu (3.6.2) qu'il existe un sous-objet $Iso_I^C(X,Y) \rightarrowtail Hom_I^C(X,Y)$ à travers lequel se factorisent les flèches $v : J \to Hom_I^C(X,Y)$ telles que $v^*(\gamma)$ soit un iso. En faisant le produit fibré de ce sous-objet avec σ_f, on obtient un sous-objet $m : I_0 \rightarrowtail I$ qui convient. En effet, toute flèche $u : J \to I$ telle que ~~si~~ $u^*(f) = u^* \sigma_f^*(\gamma)$ soit un iso, donc telle que $\sigma_f u$ se factorise à travers $Iso_I^C(X,Y)$, elle-même se factorise, de manière unique, à travers m.

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[dd, bend right, "u"'] & & \\
& I_0 \arrow[r] \arrow[d, "m"] & Iso_I^C(X,Y) \arrow[d] \\
& I \arrow[r, "\sigma_f"'] & Hom_I^C(X,Y)
\end{tikzcd}$$

<u>Remarque.</u> On peut penser que c'est à cause de cette propriété des fibrations localement petites que ~~la propriété~~ l'intérêt de la définissabilité des isos s'est trouvé si longtemps voilé. Les observations suivantes

4.5.2. Conséquences faciles.

Nous supposerons que $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est une fibration à limites à gauche finies et que les isos sont définissables dans C.

4.5.2.1. L'égalité est définissable dans C.

Soient en effet $f, g : X \to Y$ dans $C(I)$. On forme le noyau k dans la fibre sur I. On prend alors le sous-objet $m : I_0 \to I$ sur lequel k devient un iso de manière universelle. C'est aussi le meilleur sous-objet de I sur lequel on a $f = g$.

4.5.2.2. L'objet final est définissable dans C. Autrement dit, la classe formée des objets finaux dans toutes les fibres est définissable.

Soit en effet X un objet quelconque de $C(I)$ et soit 1_I l'objet final de cette fibre. Il existe un meilleur ~~sous~~-objet $m : I_0 \to I$ sur lequel l'unique flèche de X vers 1_I dans $C(I)$ devienne un isomorphisme.

La stabilité par image réciproque est contenue dans l'hypothèse sur C.

4.5.2.3. Les produits de 2 objets sont définissables dans C. Autrement dit la classe de tous les diagrammes de la forme $X_1 \leftarrow Y \rightarrow X_2$, telle que Y soit produit de X_1 et X_2 dans une fibre, est définissable.

En effet, cette classe est à nouveau stable par image réciproque vu les hypothèses sur C. D'autre part, si on a un diagramme de la forme $X_1 \leftarrow Z \rightarrow X_2$ dans $C(I)$, on peut considérer l'unique factorisation de Z vers un produit $X_1 \times X_2$ dans $C(I)$ et prendre alors le meilleur sous-objet de I sur lequel cette factorisation devienne un isomorphisme.

4.5.2.4. Les monomorphismes sont définissables dans C.

A nouveau, vu les hypothèses sur C, la propriété d'être un mono, le fait pour une flèche $f : X \to Y$ dans $C(I)$, se ramène au fait qu'une certaine flèche – ici la factorisation de la diagonale sur X à travers un produit fibré de f par elle-même – soit un isomorphisme.

~~Mais~~ Si C n'était pas à limites à gauche finies, il serait beaucoup moins commode de dire qu'une flèche est un mono.

4.5.3. Un autre fait très simple illustre la force de ~~l'hypothèse~~ la propriété de définissabilité des isos. Comme pour les fibrations localement petites, les fibres ne peuvent plus être "n'importe quoi" (cf. 3.7.1)

Proposition. Si $\mathbb{C}$ n'est pas vide, si $\mathbb{B}$ possède un objet initial 0 et si pour $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ les isos sont définissables, alors $C(0)$ est un groupoïde.

Il est immédiat que s'il y a une flèche de X vers Y dans $C(0)$ (qui n'est pas vide) elle doit être un isomorphisme – puisque 0 n'admet pas de sous-objet propre.

4.6. ~~Définissabilité de l'égalité~~ Catégories comma et extensions de Kan.

4.6.1. Supposons que parmi les catégories fibrées sur $\mathbb{B}$ on ait un diagramme $D \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} E$. On peut, comme en théorie des catégories ordinaire, introduire une catégorie comma (f,g). Elle s'obtient par le diagramme suivant, qui est un produit fibré ordinaire où $[f,g]$ désigne la catégorie comma usuelle et $\Delta_{\mathbb{B}}$ le foncteur diagonal. Explicitons-la.

$$
\begin{tikzcd}
(f,g) \arrow[r] \arrow[ddd] & {[f,g]} \arrow[d] \\
 & C^2 \arrow[d, "C^2"] \\
 & \mathbb{B}^2 \\
\mathbb{B} \arrow[ru, "\Delta_{\mathbb{B}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Un objet de $(f,g)(I)$ est un triplet (X,φ,Y) où $X \in D(I)$, $Y \in E(I)$ et $\varphi : fX \to gY$ est dans la fibre $C(I)$.
Un morphisme de (X,φ,Y) vers (X',φ',Y') est un couple de flèches $u : X \to X'$, $v : Y \to Y'$ telles que $\varphi' f(u) = g(v)\varphi$, et ayant même projection sur $\mathbb{B}$.

4.6.2. Proposition. Si D et E sont localement petites et si dans C l'égalité est définissable, alors (f,g) est localement petite.

Il s'agit, pour deux objets (X,φ,Y) et (X',φ',Y') donnés dans $(f,g)(I)$, de montrer l'existence d'un objet des flèches du premier vers le second, ~~donc d'un objet des couples (u,v) de flèches~~ Ce sera un sous-objet de $\mathrm{Hom}^D_I(X,X') \times_I \mathrm{Hom}^E_I(Y,Y')$, définissant l'égalité des deux flèches suivantes, situées dans la fibre de C au-dessus du produit fibré en question : d'une part celle qui s'obtient à partir de la flèche universelle de X vers X', envoyée par f sur ~~sa~~ une flèche de ~~dans~~ $C(\mathrm{Hom}^D_I(X,X'))$, dont on prend l'image réciproque via la projection depuis le produit fibré, et que l'on ~~compose~~ fait suivre de l'image réciproque de φ' ... fibre ... I de C) ; d'autre part, celle qui s'obtient à ...

$C(\mathrm{Hom}^E_I(X, Y'))$, dont on prend l'image réciproque le long de la seconde projection du produit fibré, et que l'on fait précéder de l'image réciproque de φ. Le lecteur vérifiera sans peine que l'on obtient ainsi un objet ayant les propriétés souhaitées.

Remarquons en passant qu'il n'est pas nécessaire que C elle-même soit localement petite.

4.6.3. Proposition. Si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) C est localement petite ;

(ii) pour tous $f : D \to C$ et $g : E \to C$, si D et E sont petites, alors (f, g) est petite.

Esquissons la preuve.

Si C est localement petite, l'égalité y est définissable (ceci se vérifie directement, sans passer par la définissabilité des isos). Vu la proposition précédente (f, g) sera donc localement petite. Pour voir qu'elle est petite, il suffira de mettre en évidence un objet des objets dans $\mathbb{B}$. Or, si D_0 et E_0 représentent respectivement l'objet des objets pour D et E la donnée de f ~~comprend~~ et ~~de g~~ celle de g comprennent respectivement celles d'un objet $F_0 \in C(D_0)$ et d'un objet $G_0 \in C(E_0)$. L'objet des objets cherché sera $\mathrm{Hom}^C(F_0, G_0)$.

Si la seconde condition est vérifiée, montrons que pour X objet de $C(I)$ et Y objet de $C(J)$ on peut indiquer un objet $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ convenable. Or, les objets X et Y déterminent respectivement des ~~morphismes~~ foncteurs cartésiens $\tilde{X} : \underline{I} \to C$ et $\tilde{Y} : \underline{I} \to C$ (cf. 1.7.1), dont les sources sont petites. Donc, la catégorie comma $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ est petite elle aussi. Son objet des objets est le $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ cherché.

4.6.4. Théorème. Si C est petite, D est localement petite et E est à conoyaux et à $\mathbb{B}$-sommes, alors, pour tout foncteur $f : C \to D$, la composition avec f, (soit $E^f : E^D \to E^C$) admet un adjoint à gauche..

Indiquons seulement comment obtenir ~~le prolongement~~ l'extension à D d'un foncteur $g : C \to E$ donné. Soit Y dans $D(1)$. Par Yoneda, on y trouve associé un foncteur $\tilde{Y}$ de $\underline{1}$ vers D. On peut alors former, comme dans la théorie ordinaire, la catégorie comma $(f, \tilde{Y})$, qui est petite et munie d'un foncteur "source" ∂_0 vers C. Composant ∂_0 avec g, on obtient un foncteur à valeurs dans E dont la limite inductive est prise comme valeur ~~du prolongement~~ de l'extension en Y. A partir de la description ~~du prolon~~ de l'extension ~~sur~~ pour la fibre au-dessus de l'objet final, on peut obtenir sa description pour une fibre quelconque

§5. Familles particulières.

5.0. (*) voir 5-1 bis

5.1. Familles de monos, d'épis.

Soit $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration et $f : X \to Y$ une flèche dans $C(I)$.
On dit que f est une <u>famille indexée par I de monos</u> si

(i) f est un mono dans la fibre $C(I)$ et

(ii) pour tout $u : J \to I$, l'image réciproque $u^*(f)$ est un mono dans $C(J)$.

Si la base est Ens, on voit que la condition (ii), appliquée à toutes les flèches $i : 1 \to I$, fournit le fait que pour tout $i \in I$ la composante d'indice i de la famille, soit $f_i : X_i \to Y_i$ est un mono.
Mais en général, on ne peut se limiter à la considération des flèches $1 \to I$ qui ne suffisent normalement pas à déterminer l'objet I.
On observe que si C admet des limites à gauche finies ~~[illegible]~~, la condition (ii) découle de (i) (caractérisation des monos par produits fibrés)

<u>Proposition</u>. Lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, une flèche $f : X \to Y$ dans $C(I)$ est une famille indexée par I de monos si f est un mono (au sens usuel) dans la catégorie totale $\mathbb{C}$ et si la flèche qui s'en déduit par un changement de base cartésien quelconque est encore un mono.

~~Cette proposition facile suppose acquise la possibilité de faire dans $\mathbb{C}$ le produit fibré d'une flèche (quelconque) et d'une flèche cartésienne. Il s'agit là, si l'on veut d'un "lemme", que le lecteur établira aisément.~~

La notion de <u>famille indexée par I d'épis</u> peut être décrite de manière tout-à-fait analogue à ce qui précède, y compris la proposition.
On peut aussi se contenter de dire qu'il s'agit d'une famille de monos indexée par I dans la fibration duale.

5.2. Familles collectivement épimorphiques, monomorphiques.

Considérons d'abord la fibration $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ associée à une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$. Soit $u : J \to 1$ une flèche de Ens et $\varphi = (f_j : Y_j \to X)_{j \in J}$ une flèche de $\mathrm{Ens}(\mathbb{X})$ au-dessus de u. La famille φ est collectivement

5.0 Dans les développements qui vont suivre, nous ~~ferons~~ supposerons régulièrement acquis le résultat d'ordre technique que voici.

<u>Lemme</u>. Si $\mathbb{B}$ possède des limites à gauche finies, pour toute fibration $C : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{B}$ on peut faire dans la catégorie fibrée $\mathbb{C}$ le produit fibré d'une flèche quelconque et d'une flèche cartésienne.

Soit en effet $f : Y \to X$ dans $\mathbb{C}$ telle que $C(f) = u : J \to I$ et soit $v : K \to I$. Pour obtenir ~~le~~ un produit fibré de f et ~~une~~ d'une flèche cartésienne $v^*X \to X$, on fait le produit fibré de u et v dans $\mathbb{B}$, et si v' désigne la flèche parallèle à v dans $\mathbb{B}$, on prend ~~la~~ une flèche cartésienne $v'^*(Y) \to Y$. Le composé de cette dernière avec f se projette sur $uv' = vu'$ et admet donc une factorisation unique à travers v^*X. Il est immédiat que le carré obtenu dans $\mathbb{C}$ est un produit fibré.

suffisent à entraîner l'égalité $h = g$, pour h et g flèches de source X (et de but commun) dans $\mathbb{X}$. Remplaçons l'objet final 1 par un objet I quelconque et exprimons le fait qu'un morphisme de $(Y_j)_{j\in J}$ vers $(X_i)_{i\in I}$ au-dessus de u

(1.2.1) est tel que pour tout $i \in I$ la famille des flèches $f_j : Y_j \to X_i$, pour j parcourant $u^{-1}(i)$, est collectivement épimorphique au sens dit. Cela va nous mener vers la définition suivante.

Soit $\mathbb{B}$ une catégorie à limites projectives finies, $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration, u une flèche de $\mathbb{B}$ et φ une flèche de $\mathbb{C}$ telle que $C(\varphi) = u$. On dira que φ constitue une <u>famille de flèches collectivement épimorphique</u> si deux flèches quelconques $g, h : Y \to Z$ ~~telles~~ vérifiant les conditions $g\varphi = h\varphi$ et $C(g) = C(h)$ sont nécessairement égales, et si la même chose reste vraie chaque fois qu'on considère la famille déduite de φ par changement de base cartésien dans $\mathbb{C}$.

<u>Proposition.</u> Si la catégorie $\mathbb{C}$ est à sommes, une flèche $\varphi : X \to Y$ au-dessus de $u : J \to I$ est collectivement épimorphique si l'unique factorisation de φ à travers la flèche cocartésienne $X \to \coprod_u X$ constitue une famille indexée par I d'épimorphismes.

La preuve, facile, est laissée au lecteur.

~~Pour définir la notion de famille de flèches collectivement monomorphique~~

Pour définir la notion de <u>famille de flèches collectivement monomorphique</u>, (indexées multiplicativement par J) partons à nouveau de la fibration $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}) \to \mathbb{E}ns$.

Soit $u : J \to 1$ une flèche de $\mathbb{E}ns$ et $\varphi = (f_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ une flèche de la fibration duale au-dessus de u. Cette famille est collectivement monomorphique au sens usuel si les égalités $f_j h = f_j g$ pour tout $j \in J$ suffisent à entraîner l'égalité $h = g$, pour h et g de but X (et de source commune) dans $\mathbb{X}$. Remplaçons l'objet final 1 par un objet I quelconque et exprimons le fait qu'un morphisme de $(Y_j)_{j\in J}$ vers $(X_i)_{i\in I}$ au-dessus de u, dans la fibration duale, est tel que pour tout $i \in I$ la famille des flèches $f_j : X_i \to Y_j$, pour j parcourant $u^{-1}(i)$, est collectivement monomorphique au sens dit.

Soient $\mathbb{B}$ une catégorie à limites à gauche finies, $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration, $u : J \to I$ une flèche de $\mathbb{B}$ et $\varphi : u^* X \to Y$ une flèche dans $C(J)$. On dira que φ constitue une <u>famille collectivement ~~épi~~monomorphique</u> si deux flèches quelconques $g, h : Z \to X$ vérifiant $C(g) = C(h)$ sont égales dès que les flèches g', h', de même source, que l'on ~~obtient~~ peut obtenir par changement de base le long de $u^* X \to X$ (d'après 5.0) vérifient la relation $\varphi g' = \varphi h'$.

<u>Proposition</u>. Si la catégorie $\mathbb{C}$ est à produits, alors $\varphi : u^*(Y) \to X$ dans $C(J)$ est collectivement ~~épi~~monomorphique ssi la flèche correspondante de Y vers $\prod_u X$ est un monomorphisme dans $C(I)$.

5.3. Familles séparatrices.

5.3.1. Dans une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$, on dit qu'une famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'objets ~~est~~ si constitue une famille de séparateurs si pour tout couple (f, g) de flèches distinctes de X vers Y, il existe un α et une flèche $h : G_\alpha \to X$ telle que $fh \neq gh$.

Pour une fibration quelconque $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ on dira qu'une famille G dans $C(A)$ est <u>une famille séparatrice</u> si pour tout objet I de $\mathbb{B}$ et tout couple (f, g) de flèches distinctes de X vers Y dans $C(I)$, il existe un objet K de $\mathbb{B}$ muni de flèches $\partial_0 : K \to A$ et $\partial_1 : K \to I$, et une flèche h de $\partial_0^* G$ vers X au-dessus de ∂_1 telle que $fh \neq gh$.

$$\begin{tikzcd}
 & \partial_0^* G \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dash, dotted] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dd, dash, dotted] & Y \arrow[ddl, dash, dotted] \\
G \arrow[d, dash, dotted] & K \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & & \\
A & & I &
\end{tikzcd}$$

La nuance par rapport à la définition usuelle réside dans le fait qu'on n'exige pas que K soit objet final de $\mathbb{B}$.

Avec cette définition-ci, il est clair que pour toute catégorie $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies, ~~la~~ si l'on regarde la fibration $B : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, maintenu l'exigence que K soit final ; il pourrait ne pas y avoir de famille séparatrice, même lorsque $\mathcal{B}$ est un topos (prendre pour I un sous-objet strict de 1 etc.)

5.3.2. Supposons à présent que $\mathcal{B}$ ait des limites à gauche finies et que $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ soit localement petite. Dans ces conditions la famille G dans C(A) ~~est~~ sera séparatrice ssi pour tout objet I de $\mathcal{B}$ et tout objet X de C(I) on a la propriété suivante : considérant l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(G,X)$, sous-objet de $A \times I$, muni de ses projections ∂_0 vers A et ∂_1 vers I, si on fait précéder une flèche cartésienne $\partial_1^* X \to X$ de la flèche universelle $\partial_0^* G \to \partial_1^* X$, on obtient une famille de flèches collectivement épimorphique.

La vérification de cette équivalence est immédiate. La propriété indiquée des familles séparatrices [de fibrations] généralise ~~le fait bien connu~~ ~~la remarque suivante :~~ ~~si $\mathcal{B}$ = Ens, si C (...) → Ens et si I est objet final dans~~ ~~pour~~ la remarque que si la famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ est ~~génératrice~~ séparatrice une famille de séparateurs dans la catégorie ordinaire $\mathcal{X}$, alors pour tout objet X de $\mathcal{X}$, la famille de toutes les flèches de tel X issues des différents membres de la famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ est collectivement épimorphique au sens us.

5.3.3. On peut retrouver un certain nombre de propriétés familières des familles de séparateurs dans ce contexte-ci. Par exemple, ~~le fait que~~ si à partir d'une famille donnée $(G'_{\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ on peut former une famille ~~génératrice~~ de séparateurs par image réciproque via un changement d'indices $u : A \to A'$, alors la famille $(G'_{\alpha'})_{\alpha' \in A}$ était déjà une famille de séparateurs.

Laissant au lecteur la vérification facile de ce fait dans notre cadre, nous nous attarderons davantage à retrouver l'analogue du phénomène suivant. Si une famille d'objets $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ est donnée dans une catégorie $\mathcal{X}$, on peut considérer la sous-catégorie pleine engendrée par les G_α, soit $\mathcal{G}$, et le foncteur de $\mathcal{X}$ vers $\hat{\mathcal{G}}$ obtenu en composant le plongement de Yoneda de X vers $\hat{\mathcal{X}}$ avec le foncteur de restriction de $\hat{\mathcal{X}}$ vers $\hat{\mathcal{G}}$ (associé à l'inclusion de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{X}$). La famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ est ~~génératrice~~ une famille de séparateurs ssi le foncteur composé ~~...~~ est fidèle.

Soit donc G dans C(A) une famille séparatrice pour la fibration $C : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, que nous supposons localement petite ($\mathcal{B}$ à limites à gauche finies).

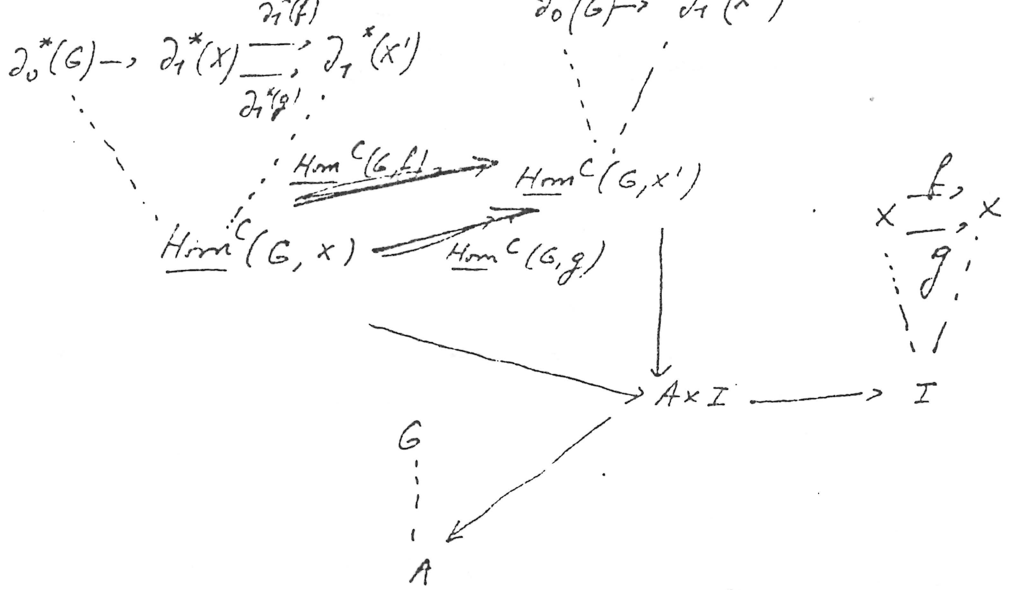
La sous-catégorie pleine engendrée par la famille séparatrice donnée

$\underline{Hom}(G,G)$, sous-objet de $A\times A$, muni, via les projections, de flèches ∂_0 et ∂_1 vers A. (Remarquons que $\underline{Hom}_A(G,G)$ ne convient pas, car on n'aurait alors que les flèches de source et but confondus) Désignons par $\tilde{G}$ la ~~fibr~~ petite fibration associée.

Décrivons à présent le foncteur de C vers la fibration $B^{G^{op}}$ (3.9) qui correspond à l'envoi d'un objet X de $\mathbb{X}$ sur le foncteur $\mathrm{Hom}[-,X]$ restreint à la sous-catégorie pleine G. A une famille X de $C(I)$ on doit associer un foncteur de $\tilde{G}\times \underline{I}$ vers B. On doit donc se donner pour tout couple de flèches $u: J\to I$ et $v: J\to A$ un objet de $B(J)$, et ce sera naturellement $\underline{Hom}^C_J(v^*G, u^*X)$; en particulier, si u et v sont les projections depuis $A\times I$, ce sera $\underline{Hom}^C(G,X)$. Si $f: X\to X'$ est une flèche de $C(I)$, on a pour tout couple (v,u) un morphisme dans B_J entre $\underline{Hom}_J(v^*G, u^*X)$ et $\underline{Hom}^C_J(v^*G, u^*X')$, désigné par $\underline{Hom}^C_J(v^*G, u^*f)$ — ou simplement par $\underline{Hom}^C(G,f)$ si v et u sont les projections depuis $A\times I$.

~~Il s'agit maintenant de montrer qu'à deux flèches distinctes $f, g: X\to X'$ dans $C(I)$ correspondent deux transformations naturelles distinctes~~

Supposons maintenant que $g: X\to X'$ soit une flèche de $C(I)$, distincte et considérons le diagramme ci-dessous.



Les composés indiqués dans la fibre au-dessus de $\underline{Hom}^C(G,X)$ s'obtiennent à partir de la flèche universelle au-dessus de $\underline{Hom}^C(G,X')$ via deux ~~flèches~~ morphismes $\underline{Hom}^C(G,f)$ et $\underline{Hom}^C(G,g)$. ~~Si la famille G dans $C(A)$ est génératrice,~~

~~Si on fait~~ en faisant suivre ces composés de la flèche cartésienne $\partial_1^*(X') \to X'$, on obtient respectivement f et g précédés du composé $\partial_0^* G \to \partial_1^* X \to X$. Si la famille G est séparatrice, ~~cette~~ ce dernier composé est ~~un épi~~ comme collectivement épimorphique, de sorte que ~~si~~ $f \neq g$ on a aussi $\underline{Hom}^C(G, f) \neq \underline{Hom}^C(G, g)$ et les transformations naturelles associées à f et g sont distinctes. Réciproquement, si pour un certain couple (v, u) on a $\underline{Hom}^C_J(v^* G, u^* f) \neq \underline{Hom}^C_J(v^* G, u^* g)$, on voit facilement qu'on est déjà forcé d'avoir $\underline{Hom}^C(G, f) \neq \underline{Hom}(G, g)$, de sorte que le composé $\partial_0^* G \longrightarrow \partial_1^* X \longrightarrow X$ n'arrive pas à égaliser f et g, flèches distinctes quelconques dans $C(I)$. Il n'est alors pas difficile d'achever de vérifier que le composé en question est un épi collectif (car ce qui vaut pour la fibre $C(I)$ vaut pour toute autre fibre)

On a ainsi montré ~~la propo~~ que la famille G dans $C(A)$ est séparatrice ssi le foncteur de C vers $\mathbb{B}^{G^{op}}$ qui lui a associé est fidèle.

5.4. Topologies et faisceaux.

5.4.1. Un des endroits où les "familles" paraissent jouer un rôle important est l'introduction de topologies de Grothendieck sur une catégorie ordinaire $\mathbb{X}$, que nous supposerons munie de produits fibrés. Dans ce cas en effet ~~la~~ une topologie est déterminée par la donnée de familles couvrantes, lesquelles doivent s'organiser de manière à constituer une prétopologie, c'est-à-dire vérifier un certain nombre de propriétés qui peuvent s'énoncer simplement en ~~agr~~ pensant à la fibration $\mathbb{E}ns(\mathbb{X}) \to \mathbb{E}ns$. Se donner une ~~préto~~topologie sur $\mathbb{X}$, ~~revient~~ revient à se donner une classe $\mathcal{C}$ de flèches de $\mathbb{E}ns(\mathbb{X})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{C}$ est stable par composition;

(ii) $\mathcal{C}$ est stable par changement de base quelconque;

(iii) $\mathcal{C}$ contient les isos.

Cette observation nous conduit à définir, pour une fibration quelconque $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une topologie sur C comme une classe de flèches de $\mathbb{C}$ qui possède les propriétés ~~indiquées~~ (i), (ii) et (iii), Dans notre formalisme donc, la donnée d'une topologie sur une catégorie (fibrée) ne se fait plus par recours à quelque chose d'extérieur (les ensembles) .. et même ne fait intervenir que la source de C, la catégorie totale.

Mais le foncteur C intervient si on veut spécifier que la topologie en question est définissable, ce qui se fait comme suit.

Soit $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies et $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$. On dit qu'une topologie $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{C}$ est définissable si pour toute flèche $f: X \to Y$ dans $\mathbb{C}$, au-dessus de $u: I \to J$, il existe un sous-objet $m_0: J_0 \to J$ tel que la flèche déduite de f par changement de base le long de $m_0^*(Y) \to Y$ soit dans $\mathcal{C}$ ("soit couvrante"), et ce de manière universelle.

5.4.2. Soit à nouveau $\mathbb{X}$ une catégorie ordinaire et $(f_s: A_s \to B_s)_{s\in S}$ une famille de flèches de $\mathbb{X}$, indexée par l'ensemble S.

On peut dire qu'un objet X de $\mathbb{X}$ est un faisceau par rapport à la famille $(f_s)_{s\in S}$ si pour tout $s \in S$ l'application $Hom_{\mathbb{X}}(f_s, X)$ est bijective. On observe ~~...~~ aisément que

(i) l'objet final éventuel de $\mathbb{X}$ est un faisceau;

(ii) tout produit de faisceaux est un faisceau;

(iii) si X est un faisceau, et K le noyau d'un couple de flèches de source X, alors K est un faisceau;

(iv) si X est un faisceau pour la famille $(f_s)_{s\in S}$ et si $u: S' \to S$ est une application quelconque, X est un faisceau pour la famille $(f'_{s'})_{s'\in S'}$ définie par $f'_{s'} = f_{u(s)}$.

Soit alors $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration, S un objet de $\mathbb{B}$ et $\sigma: A \to B$ une flèche dans $C(S)$. On dira qu'un objet <u>X dans $C(I)$ est un faisceau pour σ</u> si pour chaque ~~diagramme~~ couple de flèches (u, v) dans $\mathbb{B}$, avec $u: K \to I$ et $v: K \to S$, et pour chaque flèche $f: v^*A \to u^*X$ dans $C(K)$, il existe une flèche unique $g: v^*B \to u^*X$ telle que $g \circ v^*(\sigma) = f$.

Si l'on considère alors la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont les faisceaux, munie de la restriction du foncteur C, on obtient une sous-fibration $Faisc(\sigma)$ de C. Et on observe encore sans problème que

(i) si C est à objet final (resp. à produits, à produits finis, à noyau-
Faisc(G) est aussi à objet final (resp. à produits, à produits finis, à noyaux) et l'inclusion y commute ;

(ii) si X dans $C(I)$ est un faisceau pour G dans $C(S)$, et si $\psi : S' \to S$ est une flèche de $\mathbb{B}$, alors X est un faisceau pour $\psi^*(G)$

5.4.3. Supposons en particulier que $\mathbb{B}$ soit un topos élémentaire et que $j : \Omega \to \Omega$ soit une topologie au sens usuel, fonction caractéristique d'un sous-objet $J \to \Omega$. Considérons la fibration canonique $B : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ et prenons pour G, dans $B(\Omega)$ la flèche d'inclusion de $v : 1 \to \Omega$ dans $\bar{v} : J \to \Omega$: ~~la~~ La fibration Faisc(G) sera notée plus brièvement $F_j : \mathbb{F}_j \to \mathbb{B}$.
Il est facile de voir que les objets de Faisc$(G)(1) = F_j(1)$ sont les faisceaux pour j au sens habituel. Qu'obtient-on dans les autres fibres ? Des familles de faisceaux, indexées par les objets du topos $\mathbb{B}$.
On vérifie sans peine qu'une flèche $\xi : X \to I$ est dans $F_j(I)$ ~~Faisc(G)(I)~~ si elle possède les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout couple de flèches $f, f' : G \to X$ égalisées par ξ et coïncidant sur un sous-objet dense $d : G' \hookrightarrow G$, on a $f = f'$;

(ii) pour tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, hook, "d"] \arrow[d, "\eta'"] & G \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"'] & I \end{tikzcd}$$

où d est dense, il existe une factorisation de G vers X qui rend commutatifs les deux triangles obtenus.

~~Une famille séparée se caractérise aussi par le~~

On dit d'une flèche $\xi : X \to I$ possédant la propriété (i) qu'elle constitue une famille séparée. Une telle famille se caractérise aussi par le fait que la diagonale de X vers $X \times_I X$ est fermée. (On a ici l'analogue de la notion ~~d'espace~~ topologique ~~d'~~ d'espace séparé au-dessus d'un autre via une application continue : si deux points ont ~~admettent~~ même image, ils admettent des voisinages disjoints)

~~Pour une flèche possédant la propriété (ii), on dira~~

On dit d'une flèche $\xi : X \to I$ possédant la propriété (ii)

~~Remarque.~~
Il existe une autre manière de voir les fibres de $\text{Faisc}(\sigma) = F_j$:
La topologie j sur $\mathbb{B}$ induit sur chaque topos $\mathbb{B}/_I$ une top. j_I
et ~~$\text{Faisc}(\sigma)$~~ $F_j(I)$ n'est rien d'autre que la catégorie des faisceaux
de $\mathbb{B}/_I$ pour cette topologie induite.

5.4.4. ~~Proposition.~~ Une question naturelle est de savoir si la classe des faisceaux pour une flèche $\sigma : A \to B$ dans $C(S)$ est définissable. Sous certaines hypothèses sur C et sur $\mathbb{B}$, on peut effectivement montrer qu'il en est bien ainsi. Supposons que

- la fibration C soit localement petite et que
- ~~dans~~ $\mathbb{B}$ admette des quantifications universelles ainsi que la définissabilité des isos (pour la fibration $\mathbb{B} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$).

Pour un objet X dans $C(I)$ on peut alors considérer les sous-objets $\text{Hom}(B, X) \rightarrowtail I \times S$ et $\text{Hom}(A, X) \rightarrowtail I \times S$, reliés par $\text{Hom}(\sigma, X)$. On peut ensuite prendre le meilleur sous-objet de $I \times S$ au-dessus duquel la flèche $\text{Hom}(\sigma, X)$ devienne un iso et quantifier ce sous-objet universellement le long de la projection de $I \times S$ vers I.
Intuitivement, le sens de la construction indiquée est clair : pour une famille $(X_i)_{i \in I}$ donnée, on retient les X_i pour lesquels pour tout $s \in S$ ~~la flèche~~ l'application $\text{Hom}(X_i, f_s)$ est ~~un isomorphisme~~ bijective.

En particulier, si $\mathbb{B}$ est un topos élémentaire et C la fibration F des faisceaux pour une topologie j au sens usuel, les hypothèses ci-dessus sont satisfaites, de sorte que la fibration ~~des faisceaux~~ F_j est ~~définissable~~ une sous-catégorie définissable de $\mathbb{B} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$.

Ceci signifie notamment que si X est un espace topologique et P un préfaisceau d'ensembles sur X, il existe un plus grand ouvert U de X tel que la restriction de P à U soit un faisceau.

§6. Calibrages.

Il arrive que dans une catégorie $\mathbb{X}$ donnée on soit amené à distinguer
6.0. ~~Lorsqu'on considère des familles d'objets et de flèches dans~~ une classe d'objets considérés comme petits. Pour $\mathbb{X} = \mathbb{E}ns$, on est régulièrement ~~une catégorie $\mathbb{X}$, il arrive fréquemment que l'on se limite à des~~ amené à considérer les ensembles finis par exemples, ou les ensembles de cardinal inférieur ~~familles qui sont "petites" des familles finies par exemple ou~~ à un cardinal donné. Dans notre cadre, il s'agira souvent ~~pour~~ de familles de petits objets, ~~des familles de moins de α membres (α cardinal régulier)~~. Si ~~indexéement~~ indexées par un objet qui pourra être grand.
l'on s'efforce de formaliser cette notion ~~d'obj~~ de petitesse, on est amené à opérer toute une série de distinctions.

6.1. Définition de base.

On dira qu'une catégorie $\mathbb{B}$ est munie d'un calibrage (ou que $\mathbb{B}$ est calibrée) si l'on s'est donné une ~~classe~~ P de flèches de $\mathbb{B}$, qualifiées de "petites" ou de "propres", classe possédant ~~vérifiant~~ les ~~propr~~ propriétés suivantes

P.0 Si $p : X \to I$ est petite et si $u : J \to I$ est quelconque, alors le produit fibré de p et u existe et $u^*(p)$ est petite.

P1. Tout isomorphisme $\sigma : X \to I$ est petit.

P2. Pour tout triangle commutatif
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$
si p et q sont propres, alors f est propre.

L'axiome P_0 signifie qu'un changement d'indices permet d'obtenir à partir d'une famille de petits objets une famille d'objets qui sont encore petits. L'axiome P_1 correspond à l'idée qu'une famille de "singletons" est une famille de petits objets. L'axiome P_2 correspond au fait qu'une petite somme de petits objets est un petit objet. (Si $\mathbb{B} = \mathbb{E}ns$ on a $f^{-1}(z) = \coprod_{y \in q^{-1}(z)} p^{-1}(y)$.)

Si on prend pour P la classe de tous les isos, on obtient le calibrage minimal. (pour lequel seuls les "singletons" sont petits.

6.2. Propriétés ~~supplé~~ éventuelles.

6.2.1. On dira que le calibrage P donné sur $\mathbb{B}$ est séparé si pour tout triangle commutatif
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & I & \end{tikzcd}$$
le fait que p et q soient propres entraîne que f est propre.
Dans $\mathbb{E}ns$, cette propriété signifie que pour une famille $(X_i)_{i \in I}$, si I est petit et si $\coprod_{i \in I} X_i$ est petite, alors chaque X_i est petit.

6.2.2. On dira que le calibrage P donné sur $\mathbb{B}$ est <u>équationnel</u> si pour tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & I & \end{array}$$

la petitesse de p entraîne celle de f.

Dans Ens cette propriété revient au fait qu'un découpage quelconque d'un ensemble petit fournit des ensembles petits également. Le choix du terme sera expliqué plus loin.

6.2.3. On dira que le calibrage P est <u>héréditaire</u> si pour tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & I & \end{array}$$

où m est un mono et $q \in P$ on a aussi $f \in P$.

C'est la propriété : "tout sous-objet d'un objet petit est petit".

6.2.4. On dira que le calibrage P est <u>cohéréditaire</u> si pour tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & I & \end{array}$$

avec f épi strict universel et $p \in P$ on a $q \in P$.

6.2.5. On dira que le calibrage P est <u>définissable</u> si pour toute flèche $f : X \to I$ il existe un sous-objet $m : I_0 \to I$ tel que $m^*(f)$ existe, soit petit et ce de manière universelle.

Ceci signifie que dans une famille arbitraire on peut reconnaître la sous-famille des objets qui sont petits.

6.3. Les remarques suivantes éclaireront les différentes définitions données et en feront apparaître les motivations.

6.3.1. Lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, la classe de toutes les flèches constitue un calibrage sur $\mathbb{B}$ le calibrage maximal. Et si on dispose d'un autre calibrage sur $\mathbb{B}$, il fournit une fibration $P : \mathbb{P} \to \mathbb{B}^{\#}$ qui est une sous-catégorie pleine de $B : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$.

Mais même si la fibration B n'existe pas, un calibrage sur $\mathbb{B}$ fournit de toute manière une fibration $P : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$. Et cette fibration est toujours à produits finis, et à objet final – comme il résulte immédiatement des axiomes de base.

6.3.2. Un calibrage est séparé ssi pour tout $p : X \to I$ dans P la diagonale $X \to X \times_I X$ est aussi dans P.

Il est immédiat que la condition est nécessaire, compte tenu de P_0 et P_1. Pour voir qu'elle suffit, considérons le diagramme ci-contre. La flèche f apparaît comme composé de p', qui est dans $\mathcal{P}$ (par P_0) et de m qui est aussi dans $\mathcal{P}$ comme image réciproque de la diagonale $Y \to Y \times_I Y$ le long de $f \times_I Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m"] \arrow[rrr, bend left, "f"] \arrow[d, bend right, "id_X"'] & X \times_I Y \arrow[r, "f \times_I Y"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right, "p'"'] & Y \times_I Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & Y \arrow[r, "q"] & I & I
\end{tikzcd}$$

6.3.3. Un calibrage ~~le caractère~~ est équationnel ~~est équivalent au fait que tout~~ si tout mono scindé $m : X \rightarrowtail I$ ~~soit dans $\mathcal{P}$ est petit~~ est dans $\mathcal{P}$.

A nouveau, la condition nécessaire est immédiate, si on pose $p = id_X$, $f = m$ et si on prend ~~pour~~ q une section de m.

Pour la condition suffisante, on peut reprendre le diagramme précédent en remarquant que m est dans $\mathcal{P}$ comme mono scindé cette fois.

6.3.4. Un calibrage est héréditaire si tout mono est propre. C'est suffisant vu la condition P_2. C'est aussi nécessaire d'après le triangle

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "m"'] & Y \arrow[d, "id_Y"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

, qui donne en même temps un autre nom intuitif de cette propriété : tout sous-objet de l'objet final est petit.

6.3.5. Compte tenu des considérations précédentes, il est clair que le caractère héréditaire entraîne le caractère équationnel, ~~et par~~ et que celui-ci entraîne la propriété de séparation.

Il est encore immédiat que si $\mathbb{B}$ est un topos, $\mathcal{P}$ est héréditaire ssi la flèche $v : 1 \to \Omega$ est petite et ssi $\mathcal{P}$ est équationnel (vu que v est trivialement scindée)

~~6.4. Calibrages définissables sur un topos~~. 6.4. <u>Calibrages définissables sur un topos.</u>

~~6.4.~~ 6.4.1. Supposons que $\mathbb{B}$ soit un topos et que l'on ait sur $\mathbb{B}$ un calibrage définissable $\mathcal{P}$. On peut dans ce cas indiquer pour tout objet X un objet $P(X)$ qui représente les "<u>petites parties de X</u>". Ce sera le sous-objet de Ω^X donné par la ~~de~~ propriété de définissabilité pour la famille $S \rightarrowtail X \times \Omega^X \xrightarrow{\pi_2} \Omega^X$, où le sous-objet S est caractérisé par l'évaluation. (C'est, dans

La connaissance de $P(X)$ permet de retrouver ~~le sous-objet~~ pour toute famille $\pi : X \to I$ le sous-objet $I_0 \rightarrowtail I$, de la manière suivante. On prend le graphe de π, soit la flèche $X \xrightarrow{(\pi, X)} I \times X$, la fonction caractéristique de ce graphe et l'adjointe cartésienne $p : I \to \Omega^X$ de cette fonction. L'image réciproque du sous-objet $P(X) \rightarrowtail \Omega^X$ le long de p est le sous-objet cherché.

Ceci s'éclaire par le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[rr] \arrow[d, "{(X,\pi)}"] \arrow[ddd, bend right=40, "\pi"'] & & S \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "v"] \\
 & & X \times I \arrow[rr, "X \times p"] \arrow[dd, "\pi_2"] & & X \times \Omega^X \arrow[r, "ev"] \arrow[dd, "\pi_2"] & \Omega \\
 & I_0 \arrow[dr, "m"'] \arrow[rr, dashed] & & P(X) \arrow[dr] & & \\
J \arrow[rr, "u"'] & & I \arrow[rr, "p"] & & \Omega^X &
\end{tikzcd}
$$

qui montre que π s'obtient comme image réciproque de la famille $S \to X \times \Omega^X \xrightarrow{\pi_2} \Omega^X$ le long de p et que $u^*(\pi)$ est petite ssi pu ~~$\$$~~ se factorise à travers $P(X) \rightarrowtail \Omega^X$.

~~6.5 Proposition~~. ~~Dans~~ Donc le cas d'un topos donc il revient au même de savoir reconnaître les membres d'une famille quelconque qui sont petits, ou de savoir reconnaître les petites parties d'un objet quelconque.

6.4.2. Soit $\pi : X \to I$ une famille quelconque et $u : J \to I$ un morphisme de $\mathbb{B}$. Le produit fibré de π et u donne une famille $\rho : u^* X \to J$. Si $p : I \to \Omega^X$ est la flèche associée à π (comme ci-dessus) et $r : J \to \Omega^{u^* X}$ la flèche associée à ρ, on observe que r peut ~~être vu comme le composé~~ s'obtenir à partir de p en la faisant précéder de u et suivre de Ω^{φ}, où $\varphi : u^* X \to X$ est cartésienne au-dessus de u. On observe également que le composé pu coïncide avec $(\exists \varphi) r$

6.4.3. Lorsque le coltihage ~~définissable~~ P est en outre cohéréditaire, alors les objets $P(X)$ s'organisent en un sous-foncteur du foncteur "ensemble des parties" covariant. Réciproquement, cette dernière condition entraîne le caractère cohéréditaire, pour un coltihage définissa[ble].

Soit ... $f : X \to Y$ une flèche quelconque et montrons que foncteurs Hom $[-, P(X)]$ et Hom $[-, P(Y)]$. Soit donc $p: I \to \Omega^X$, quelconque. L'adjointe cartésienne de p, de $X \times I$ vers Ω, classifie un sous-objet $X' \rightarrowtail X \times I$, dont on peut prendre l'image par $f \times I$, soit $Y' \rightarrowtail Y \times I$. La famille $Y' \rightarrowtail Y \times I \xrightarrow{\pi_2} I$ est associée à la flèche composée $I \xrightarrow{p} \Omega^X \xrightarrow{\exists f} \Omega^Y$. Cette dernière se factorisera à travers $P(Y)$ si la famille associée est petite, ce qui aura lieu ~~chaque~~ dès ~~fois~~ que $X' \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{\pi_2} I$ est petite puisque Y' est quotient de X'.

Dans l'autre sens, montrons que dans le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\rho"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

où f est un épi, la petitesse de π entraîne celle de ρ. Or π, c'est le composé $X \xrightarrow{(X,\pi)} X \times I \xrightarrow{\pi_2} I$ et ρ c'est le composé $Y \xrightarrow{(Y,\rho)} Y \times I \xrightarrow{\pi_2} I$. Si $p: I \to \Omega^X$ est associée au premier composé, $(\exists f)p$ sera la flèche de I vers Ω^Y associée au second, car le sous-objet (Y,ρ) est bien l'image de $(f \times I)(X,\pi)$. Puisque π est petite, p se factorise à travers $P(X)$; mais alors $(\exists f)p$ se factorise à travers $P(Y)$, en l'hypothèse, et donc ρ est petite.

Exercice. Montrer que lorsque $\mathcal{P}$ est un calibrage définissable cohéréditaire sur un topos, le foncteur "ensemble des petites parties" est muni d'une structure de triple (induit par la structure de triple bien connue sur le foncteur "ensemble des parties" covariant, avec la flèche "singleton" comme unité et la réunion comme multiplication.

6.4.4 Proposition. Soit $\mathbb{B}$ un topos muni d'un calibrage définissable $\mathcal{P}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $1 + 1$ est petit.

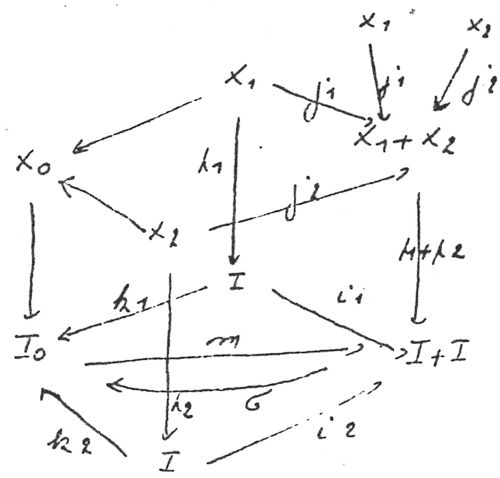
(ii) La somme de deux petits objets est petite.

(iii) Pour tout objet I, si $p_1: X_1 \to I$ et $p_2: X_2 \to I$ sont dans $\mathcal{P}$, alors $\langle p_1, p_2 \rangle : X_1 + X_2 \to I$ est dans $\mathcal{P}$.

Un objet est dit petit si la flèche qui le joint à 1 est dans $\mathcal{P}$. Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii) et que (ii) $\Rightarrow$ (i). Il reste donc à montrer (i) $\Rightarrow$ (iii). Pour cela, on montre d'abord que si $p_1: X_1 \to I$ et $p_2: X_2 \to I$ sont dans $\mathcal{P}$, alors $p_1 + p_2 : X_1 + X_2 \to I + I$ est dans $\mathcal{P}$.

Désignons par i_1, i_2 les injections de I dans $I + I$. Il est facile de ... de p_1+p_2 le long de i_2 ...

(faire intervenir le caractère universel et disjoint des sommes à propos du produit fibré de j_1 avec j_1 et j_2 respectivement) ; de même pour h_2 par rapport à i_2. Vu le caractère définissable, on obtient des injections $k_1: I \to I_0$ et $k_2: I \to I_0$, qui donnent ensemble une flèche $\sigma: I+I \to I_0$ inverse de $m: I_0 \rightarrowtail I+I$ (vérification aisée). Donc, h_1+h_2 est dans $\mathcal{P}$, et la démonstration s'achève si l'on observe que la codiagonale $I+I \to I$ est petite comme image réciproque de la petite flèche $1+1 \to 1$ (par l'universalité des sommes encore).



6.4.5. Rappelons que pour tout objet X d'un topos on désigne par $K(X)$ le sous-$\vee$-demi-treillis de Ω^X engendré par la flèche "singleton" $\{\cdot\}: X \to \Omega^X$. C'est l'objet des parties de X qui sont dites "finies au sens de Kuratowski".

<u>Proposition</u>. <u>Si $\mathcal{P}$ est un calibrage définissable et cohéréditaire sur le topos $\mathbb{B}$ pour lequel $1+1$ est petit et 0 est petit, alors l'objet $P(X)$ des petites parties contient pour tout X dans $\mathbb{B}$ l'objet $K(X)$ des parties finies au sens de Kuratowski</u>.

Pour le prouver on montre que l'objet $P(X)$ est un sous-$\vee$-demi-treillis avec plus petit élément de Ω^X, contenant $\{\cdot\}: X \to \Omega^X$. La dernière partie de l'affirmation est claire, vu que id_X est dans $\mathcal{P}$, ainsi que le fait que $\ulcorner 0_X \urcorner: 1 \to \Omega^X$ se factorise à travers $P(X)$. Soient alors $p: I \to \Omega^X$ et $q: I \to \Omega^X$ deux flèches se factorisant par $P(X)$. Leurs adjointes cartésiennes définissent des sous-objets $P \rightarrowtail X \times I$ et $Q \rightarrowtail X \times I$, dont l'union $P \cup Q \rightarrowtail X \times I$ est associée à la flèche $p \vee q$. Il faut voir que la famille $P \cup Q \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{\pi_2} I$ est dans $\mathcal{P}$, ce qui résulte facilement du fait que la somme de deux petites familles de but I est dans $\mathcal{P}$ et du caractère cohéréditaire.

~~6.4.6~~. <u>Remarques</u>. 1. On peut en fait montrer que $K(X)$ est l'objet des petites parties pour un calibrage définissable sur le topos. Ce calibrage est le plus petit parmi ceux qui vérifient les conditions de la proposition.

... définissables peut être mis en relief par l'exemple suivant. On considère la fibration $Ens(Ens) \to Ens$ associée à la catégorie ordinaire des ensembles. Un calibrage naturel est donné par les familles ~~telles~~ $(X_i)_{i \in I}$ telles que pour tout $i \in I$ l'objet X_i soit fini. C'est le calibrage associé à l'objet des parties finies. On peut obtenir un calibrage strictement plus petit en imposant que pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ il existe un entier majorant le cardinal de tous les X_i. Ce calibrage est lui aussi cohéréditaire et tel que $1+1$ et 0 soient petits. Mais il n'est pas définissable.

6.4.6. Un exemple "bien connu" de calibrage sur un topos $\mathbb{B}$ est celui où une famille $\pi : X \to I$ est déclarée petite lorsque ~~est~~ la flèche π est un mono. C'est un calibrage définissable, l'objet I_0 étant simplement l'interprétation de la formule $\forall x \forall x'$ $(\pi(x) = i$ et $\pi(x') = i \Rightarrow x = x')$. Il est trivialement héréditaire et cohéréditaire. L'objet des petites parties de X n'est autre que $\tilde{X}$, car les flèches de I vers $\tilde{X}$ correspond exactement aux flèches partielles de I vers X, c'est-à-dire aux sous-objets $X' \rightarrowtail X \times I$ tels que le composé $X' \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{pr_2} I$ soit un mono. La famille $\eta_X : X \to \tilde{X}$ est le mono universel.

6.5 ~~L'introduction~~ La considération des calibrages va permettre de diversifier certains concepts introduits ~~jusqu'ici~~ précédemment à propos des fibrations, tels que les notions de fibration petite ou localement petite, ~~~~ de fibration à sommes ou à produits. En même temps elle va ~~offr~~ ouvrir la possibilité de manipuler ces notions dans des contextes où l'existence de toutes les limites à gauche finies dans la base n'est plus assurée.

6.5.1. Dans une catégorie $\mathbb{B}$ munie d'un calibrage $\mathcal{P}$ donné, on dira (rapidement) qu'une catégorie interne est petite (relativement à $\mathcal{P}$) si l'objet des objets et les flèches définissant la structure sont petits.

Il est clair que le calibrage $\mathcal{P}$ induit pour chaque objet I un calibrage sur la catégorie $\mathbb{B}/_I$: une flèche w, de $v : K \to I$ vers $u : J \to I$ sera déclarée petite pour ce calibrage induit simplement si w, vue comme flèche de $\mathbb{B}$, est dans $\mathcal{P}$.

On pourra, comme à la fin du § 1, parler de la catégorie des petites catégories (relativement à $\mathcal{P}$) et constater qu'il s'agit en fait d'une sous-catégorie fibrée de $\mathbb{F}ib(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$.

6.5.2. On dira qu'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ ~~est à~~ admet des petites sommes, lorsque $\mathbb{B}$ est muni d'un calibrage, si les conditions décrites en 2.4.2. sont satisfaites chaque fois que la flèche u est petite.

Il est clair, avec cette définition, que la fibration P (6.3.1), ~~[illegible]~~, ~~est à~~ admet des petites sommes, de la même manière que $\partial_1 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, quand elle existe, ~~(cf. 2.4.3)~~ admet des $\mathbb{B}$-sommes (2.4.3).

On dira bien entendu qu'une fibration ~~est à~~ admet des petits produits si les conditions décrites en 2.5 sont satisfaites pour toute petite flèche u.

~~Le résultat 2.7~~

L'existence de petites limites inductives pour une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ pourra s'établir comme en 2.7. à partir de l'existence de conoyaux et de petites sommes. (en supposant cette fois que les catégories internes $\underline{D}$ considérées dans ~~cette~~ la démonstration ~~est~~ sont petites relativement au calibrage donné).

6.6. On dira qu'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite pour un calibrage donné P sur $\mathbb{B}$ si elle est localement petite au sens dit en 3. et si pour tout objet I et pour tous X, Y dans $C(I)$ la flèche $\delta : Hom_I(X,Y) \longrightarrow I$ est dans P.

~~On retrouve la notion précédente de fibration localement petite lorsque toutes les flèches sont dans P, ce qui sous-entend que $\mathbb{B}$ ait les limites à gauche finies.~~ (inutile)

Cette exigence supplémentaire nous force à reconsidérer les différentes affirmations du § 3, pour voir dans quelle mesure elles restent valables pour les fibrations localement petites en ce nouveau sens.

6.6.1. D'abord, il reste vrai que les fibrations localement petites constituent une sous-fibration de $Fib(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ (3.3). Car si C est une fibration localement petite pour le calibrage induit par P sur $\mathbb{B}/I$ et si $u : J \to I$ est une flèche de $\mathbb{B}$, la fibration image réciproque de C le long de Σu est localement petite pour le calibrage induit sur $\mathbb{B}/J$:

6.6.2 Ensuite, il reste vrai que les petites catégories sont localement petites (3.4) et ce sans hypothèse sur $\mathbb{B}$, car les limites à gauche nécessaires sont comprises dans la donnée du calibrage.

Par contre, ~~la proposition~~ pour ~~[illegible]~~ ~~des~~ assurer l'existence de petites sommes de catégories localement petites, on ~~devra~~ devra ajouter l'hypothèse que le calibrage est séparé. Dans ce cas en effet, on est sûr est encore petit, car le noyau s'obtient comme image réciproque par $(u,v) : J \to I \times I$ de la diagonale $\Delta_I : I \to I \times I$, qui est petite (6.3.2).

6.6.3. Pour prouver que la catégorie $\mathbb{P}$ est localement petite on aura besoin, non pas de l'existence des limites à gauche dans $\mathbb{B}$, mais du fait que $\mathbb{P}$ est à petits produits. Et sous cette hypothèse on ~~pourra~~ tout pourra également montrer, comme en 3.5, que la catégorie des catégories localement petites est à petits produits.

6.6.4. La possibilité de définir des morphismes de composition (3.6.1) existe sans hypothèses sur $\mathbb{B}$, puisque le calibrage fournit les produits fibrés nécessaires. Mais pour pouvoir représenter la famille des isomorphismes entre deux objets, on devra être assuré de l'existence des produits fibrés indiqués en 3.6.2, par exemple grâce à l'hypothèse que le calibrage est séparé. Et sous cette hypothèse de séparation on pourra montrer, comme en 4.5.1, que dans une fibration localement petite les isos sont définissables.
Si la base $\mathbb{B}$ admet des produits fibrés, alors la définissabilité des isos est acquise pour toute fibration localement petite (4.5.1) (~~et~~ par rapport au calibrage maximal) et le calibrage $\mathbb{P}$ peut être quelconque, puisque sa donnée ~~dont chaque~~ revient alors simplement à restreindre le nombre de fibrations admissibles ~~peut être quelconque~~

6.6.5 Le théorème 3.8, affirmant que $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ est localement petite si $\mathbb{D}$ est localement petite et si $\mathbb{C}$ est petite, demeure valable ~~par rapport lorsque~~ par rapport à un calibrage donné sur $\mathbb{B}$, pour autant que $\mathbb{B}$ admette des petits produits et si l'on ajoute l'hypothèse que le calibrage est séparé.

6.7. ~~Exemples~~, ~~Calibra~~ Exemples de calibrages divers.

6.7.1. Soit $\mathbb{B}$ une catégorie quelconque, munie d'un calibrage $\mathbb{P}$. On peut définir un calibrage sur $\hat{\mathbb{B}}$, que nous noterons $\hat{\mathbb{P}}$, en disant qu'une ~~flèche~~ transformation naturelle $\alpha : F \to G$ sera propre si pour tout objet I de $\mathbb{B}$ et tout morphisme λ de ~~Hom[, I] vers G le produit fibré de λ et α est représentable~~
[illegible] Hom[, I] vers G, l'image réciproque de

La vérification des propriétés P_0, P_1 et P_2 est immédiate.

Si $\mathbb{B}$ possède un objet final, on constate qu'un préfaisceau F ~~est~~ ne peut être petit dans $\hat{\mathbb{B}}$ que s'il est représentable.

6.7.2. Soit $\mathbb{B}$ une catégorie abélienne et $\mathbb{C}$ une sous-catégorie épaisse (c'est-à-dire telle que les termes extrêmes d'une suite exacte courte sont dans $\mathbb{C}$ ssi le terme du milieu y est) ~~donnée~~. Soit $\mathcal{C}$ la classe des flèches de $\mathbb{B}$ dont le noyau ~~et le conoyau sont~~ est dans $\mathbb{C}$. On peut montrer que $\mathcal{C}$ est un calibrage à la fois héréditaire et cohéréditaire, et que réciproquement tout calibrage à la fois héréditaire et cohéréditaire $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{B}$ ~~est obtenu~~ provient de cette manière ~~et~~ d'une sous-catégorie épaisse sur $\mathbb{B}$.

6.7.3 Soit $\mathbb{B}$ la catégorie des espaces topologiques et applications continues. On peut munir $\mathbb{B}$ d'un calibrage en déclarant petites toutes les applications continues séparées. C'est un calibrage héréditaire pour lequel les petits objets sont les espaces séparés au sens usuel. On peut également déclarer ~~propres~~ petites les applications continues qui sont propres au sens usuel. ~~(ou pour tout espace T l'application produit~~ les petits objets sont alors les espaces quasi-compacts.

Contrôle
Maîtrise

§ 7. L Connaissance des sous-objets. J(?)

7.1. Définition.

~~7.1.~~ Dans ce paragraphe, nous supposerons que les fibrations $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ considérées vérifient l'hypothèse suivante : pour tout mono $m : X' \rightarrowtail X$ dans $C(I)$ et pour tout $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$, l'image réciproque $u^*(m) : u^*X' \to u^*X$ est encore un mono. Tel est le cas lorsque C est à limites à gauche finies par exemple.

Sous l'hypothèse en question on peut associer à tout objet X de $C(I)$ un foncteur (métathéorique) ϕ_X, défini sur $(\mathbb{B}/I)^{op}$, qui envoie chaque $u : J \to I$ sur la classe des sous-objets de $u^*(X)$ dans $C(J)$. Nous allons nous intéresser au cas où ce foncteur est représentable.

De façon précise, on dira que la fibration C est well-powered si pour tout objet X de $C(I)$ il existe un morphisme $\delta^I_X : S(X) \to I$ dans $\mathbb{B}$ et un mono $s : X^s_0 \to (\delta^I_X)^* X$ dans $C(S(X))$ tel que pour tout $u : J \to I$ et tout mono $s' : X' \to u^*X$ dans $C(J)$ il existe une flèche unique $v : J \to S(X)$ telle que $\delta^I_X v = u$ et $s' = v^*(s)$.

Pour une fibration du type $\mathcal{E}ns(\mathcal{X}) \to \mathcal{E}ns$, le caractère well-powered revient à la propriété habituellement visée par ce terme pour une catégorie ordinaire : pour tout objet X (dans la fibre au-dessus de 1) on peut indiquer la famille de tous les sous-objets de X, à partir de laquelle on peut obtenir n'importe quelle famille de sous-objets, indexée par un ensemble J disons, via une application de J dans l'ensemble de tous les sous-objets.

7.2. Proposition. Pour $\mathbb{B}$ à limites à gauche finies la fibration $\partial : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ est well-powered ssi $\mathbb{B}$ est un topos élémentaire.

On sait bien que $\mathbb{B}$ ~~est~~ sera un topos si pour tout objet X le foncteur qui envoie l'objet I sur la classe des sous-objets de $X \times I$ est représentable donc s'il existe un objet Ω^X tel que les classes d'équivalences de monos $X' \rightarrowtail X \times I$ correspondent bijectivement aux flèches de I vers Ω^X, étant entendu qu'à $\varphi : J \to \Omega^X$ correspond le sous-objet image réciproque par $X \times \varphi$ du sous-objet générique $\varepsilon(X) \rightarrowtail X \times \Omega^X$ (correspondant à $\varphi = id_{\Omega^X}$).

L'intérêt de cette proposition est de faire pressentir la force considérable du ~~la propriété~~ caractère well-powered. Pour la fibration $B : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ ~~cette propriété~~ elle entraîne ~~plus que~~ le caractère localement petit ... qui ~~~~ découlant de l'existence de produits (les $\prod_u$) dans la base.
Pour une fibration quelconque C elle entraînera aussi le caractère localement petit, sous certaines hypothèses permettant de travailler dans les fibres de C comme on peut le faire dans celles de B ou l'existence de limites à gauche finies.

7.3. Proposition. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est well-powered alors pour tout objet I dans ~~la base~~ $\mathbb{B}$ et pour tout X dans $C(I)$ l'objet ~~$S(X)$ est ordo~~ $\delta^I_X : S(X) \to I$ est ordonné dans $\mathbb{B}/I$ et son ordre est représentable.

~~(ii) pour tout $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ on a un morphisme $u_X : S(u^*X) \to S(X)$ faisant du carré indiqué un produit fibré.~~

$$\begin{tikzcd} S(u^*X) \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "\delta^J_{u^*X}"'] & S(X) \arrow[d, "\delta^I_X"] \\ J \arrow[r, "u"] & I \end{tikzcd}$$

(~~~~).

nécessaire ici

Démonstration.

Pour voir que δ^I_X est ordonné dans $\mathbb{B}/I$, on commence par constater que pour tout $u : J \to I$, objet de $\mathbb{B}/I$, on a sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}/I}(u, \delta^I_X)$ un ordre obtenu par transport de l'ordre d'inclusion entre ~~sur~~ les sous-objets de u^*X. On constate aussi que pour tout morphisme $v : J' \to J$ le foncteur de composition avec v respecte l'ordre en question, vu que v^* respecte les inclusions.
Dire que l'ordre est représentable, c'est dire qu'il existe un sous-objet $O(X) \rightarrowtail S(X) \times_I S(X)$ tel qu'un couple de flèches $(u, v) : J \to S(X) \times_I S(X)$ se factorise à travers ce sous-objet ssi u est inférieur à v. Voyons comment l'obtenir. Soit $m_0 : X_0 \rightarrowtail (\delta^I_X)^*(X)$ la famille universelle de sous-objets de X, dans $C(S(X))$ et soit $m' : X_0' \rightarrowtail \varepsilon^*(X_0)$ (où $\varepsilon = \delta^{S(X)}_{X_0}$) la famille universelle de sous-objets de X_0, au dessus de $S(X_0)$. On a dans $C(S(X_0))$ le sous-objet $X_0' \xrightarrow{m'} \varepsilon^*(X_0) \xrightarrow{\varepsilon^*(m_0)} \varepsilon^*(\delta^I_X)^*(X)$, qui provient de m_0 via une flèche $\delta' : S(X_0) \to S(X)$ telle que $\delta^I_X \delta' = \delta\varepsilon$.
Le couple $(\delta', \varepsilon) : S(X_0) \rightarrowtail S(X) \times_I S(X)$ est le sous-objet cherché.
C'est un sous-objet, car si $k, l : J \to S(X_0)$ sont telles que $\varepsilon k = \varepsilon l$

et $\delta' k = \delta' l$, on a nécessairement l'égalité des sous-objets $k^*[\varepsilon^*(m)\, m']$ et $l^*[\varepsilon^*(m)\, m']$, d'où celle de $k^* m'$ et $l^* m'$ – puisque $(\varepsilon k)^*(m) = (\varepsilon l)^*(m)$ est un mono – et finalement $k = l$. De plus, dire qu'un couple $(u,v) : J \to S(X) \times_I S(X)$ est tel que $u \leq v$, c'est dire que dans $C(J)$ le sous-objet $u^*(m)$ se factorise à travers $v^*(m)$, donc qu'il y a une flèche $w : J \to S(X_0)$ telle que $u^*(m) = v^*(m)\, w^*(m')$, ~~$u^*(m) = v^*(m)\, w^*(m')$ et~~ $\varepsilon w = v$. ~~et $u^*(m) = v^*(m)\, w^*(m')$.~~ ~~Rapprochée de la première égalité~~ ~~Comme $u^*(m) = v^*(m)\, w^*(m') = w$~~ En présence de cette seconde égalité, la première se ramène à $u^*(m) = w^*[\varepsilon^*(m)\, m'] = (\delta' w)^*(m')$, soit à $u = \delta' w$. ~~$w^*[\varepsilon^*(m)\, m']$~~ $= (\delta' w)^*(m)$ ~~$u^*(m) = w^*[\varepsilon^*(m)\, m']$~~ ~~$(\delta' w)^*(m)$, soit~~

~~(ici la vérification, très simple, est laissée au lecteur.)~~

7.4. Opérations sur les sous-objets.

Si la fibration $C : \mathcal{C} \to \mathbb{B}$, supposée well-powered, possède certaines propriétés de complétude, les objets ordonnés $\delta^I_X : S(X) \to I$ seront munis de structures supplémentaires.

Par exemple, si C est à limites à gauche finies (2.2), alors ces objets seront des inf-demi-treillis avec plus grand élément.

Indiquons comment on obtient une flèche $\wedge : S(X) \times_I S(X) \longrightarrow S(X)$.

Le sous-objet universel $m : X_0 \rightarrowtail \delta^* X$ dans $C(S(X))$ admet deux images réciproques distinctes via les projections p_1, p_2 de $S(X) \times_I S(X)$ vers $S(X)$ (le produit fibré existe dans $\mathbb{B}$, voir 7.3(ii)) ~~soit $p_1^*(X_0)$~~ ; L'intersection de $p_1^*(m)$ et $p_2^*(m)$ provient de m via une flèche qui est le $\wedge$ cherché. On vérifie sans peine que si $X'_1 \rightarrowtail u^*X$ et $X'_2 \rightarrowtail u^*X$ sont des sous-objets de u^*X, pour $u : J \to I$, associés respectivement à des flèches v_1 et v_2 de J vers $S(X)$, alors leur intersection est bien donnée par $\wedge(v_1, v_2)$.

Pour ~~est~~ le plus grand élément, pas de problème : c'est, pour tout $u : J \to I$ la flèche de J vers $S(X)$ qui donne l'identité sur $u^*(X)$.

De manière plus générale, si on veut disposer d'une opération sur les objets δ^I_X, d'un connecteur $\vee$ ou $\to$ par exemple, l'opération en question doit exister dans les fibres de C et être préservée par les u^*. Notons que ces opérations peuvent très bien exister sans avoir les propriétés chères au logicien : pour la fibration des modules sur les anneaux par exemple, les sous-objets dans les fibres forment un treillis non distributif. Mais si dans chaque fibre certaines relations entre les opérations sont vérifiées, pa relations seront aussi vérifiées entre les opérations sur les δ^I_X, qui dans ~~exemple~~ ~~les cas de l'exemp~~ le cas cité seront des algèbres de Heyting internes.

7.5. Quantification existentielle.

7.5.1. Si la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est well-powered et admet des limites à gauche finies ~~et est well-powered~~ on peut non seulement associer à chaque X dans $C(I)$ un objet δ^I_X de $\mathbb{B}/I$, mais aussi associer à chaque flèche $f : X \to Y$ dans $C(I)$ un morphisme Sf ~~de~~ de $\mathbb{B}/I$ ~~entre~~ de δ^I_Y ~~et~~ vers δ^I_X. C'est le morphisme permettant d'obtenir dans $C(S(Y))$ ~~l'image réciproque~~ le produit fibré ~~par~~ de $(\delta^I_Y)^*(f)$ ~~du~~ et du mono universel, à partir du mono universel dans $C(S(X))$.
Pour chaque objet I de $\mathbb{B}$ on obtient de la sorte un foncteur ~~contravariant~~ de $C^{op}(I)$ vers $\mathbb{B}/I$.

Lemme. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est well-powered, alors pour tout $u : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ et tout X objet de $C(I)$, on a un morphisme $u_X : S(u^*X) \to S(X)$ faisant du carré ~~ci-dessous~~ indiqué un produit fibré.

$$\begin{array}{ccc} S(u^*X) & \xrightarrow{u_X} & S(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^J_{u^*X}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^I_X} \\ J & \xrightarrow{u} & I \end{array}$$

voir 7.3 (iii)

Tenant alors compte de la proposition 7.3 (iii), ~~Laissant au lecteur la vérification aisée de ce lemme~~, nous constatons qu'il ~~permet~~ est possible d'associer à chaque flèche de C^{op}, disons entre Y dans $C^{op}(J)$ et X dans $C^{op}(I)$, au-dessus de $u : J \to I$, une flèche de $S(Y)$ vers $S(X)$ (qui, suivie de δ^I_X, donne $u\,\delta^J_Y$)
Lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, on a ainsi un foncteur cartésien de C^{op} vers $\mathbb{B}$.

7.5.2. Supposons à présent que la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ soit well-powered et régulière. La régularité, pour une catégorie ordinaire, ~~Ceci~~ signifie qu'il y a des limites à gauche finies, ~~mais~~ que toute flèche se décompose de manière unique (à iso près) en un épi régulier suivi d'un mono et que les épis réguliers sont stables par produit fibré. Pour un foncteur ordinaire cela signifie qu'il commute aux limites à gauche finies et transforme [illegible] on dira ~~plus la~~ qu'une fibration $C : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ est régulière si chaque fibre $C(I)$ est une catégorie régulière et si les u^* sont des foncteurs réguliers.

Dans ce cas, on peut associer à chaque flèche $f : X \to Y$ dans $C(I)$ un morphisme $S(f)$ de $\mathcal{B}/I$, ~~entre~~ de δ_X^I ~~et~~ vers δ_Y^I cette fois. C'est le morphisme permettant d'obtenir dans $C(S(X))$ l'image du composé de $(\delta_X^I)^*(f)$ et du mono universel, ~~à partir du~~ sous-objet de $(\delta_X^I)^*(Y)$ à partir du sous-objet universel de Y dans $C(S(Y))$.

Pour chaque objet de I de $\mathcal{B}$ on obtient ainsi également un foncteur de $C(I)$ vers $\mathcal{B}/I$.

Utilisant ~~le lemme~~ ~~à nouveau~~ à nouveau la proposition 7.3.(ii) ~~précédent (7.5.1)~~ nous constatons la possibilité d'associer cette fois à chaque flèche de C, disons entre Y dans $C(J)$ et X dans $C(I)$, au-dessus de $u : J \to I$, une flèche de $S(Y)$ vers $S(X)$ (qui suivie de δ_X^I donne $u\,\delta_Y^I$).

D'où, lorsque $\mathcal{B}$ est à limites à gauche finies, un foncteur cartésien de C vers $\mathcal{B}$.

La remarque importante est que pour chaque $f : X \to Y$ dans $C(I)$ les morphismes $Sf : SY \to SX$ et $S(f) : SX \to SY$, dont l'existence est assurée si C est well-powered et régulière, définissent entre les objets ordonnés δ_X^I et δ_Y^I un couple de foncteurs adjoints.

Dans le cas particulier où $\mathcal{B}$ est un topos et où la fibration considérée est $\mathcal{B} : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ (~~qui est évidemment~~ qui est wellpowered (7.2) et régulière), pour $I = 1$, les flèches $S(f)$ et Sf sont respectivement

$$\exists f : \Omega^X \to \Omega^Y \quad \text{et} \quad \Omega^f : \Omega^Y \to \Omega^X .$$

7.6. <u>Théorème.</u> Soit $\mathcal{B}$ est à limites à gauche finies et si ~~Si~~ la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ est well-powered et régulière, alors ~~C~~ C est localement petite.

<u>Remarques.</u>

1. Ce théorème généralise le fait bien connu en théorie des topos que l'on peut obtenir ~~les~~ l'exponentiation à partir de l'existence des objets Ω^X.
2. Pour les catégories ordinaires le résultat est très simple. Si une catégorie $\mathbb{X}$ est régulière et si chaque objet admet un ensemble

de flèches ; parce que ces flèches correspondent exactement aux sous-objets de $X\times Y$ qui sont des relations fonctionnelles partout définies.

Ebauche de démonstration :

Soient X et Y deux objets de $C(I)$. On va montrer qu'il existe un objet des relations fonctionnelles partout définies de X vers Y, en supposant pour simplifier les notations que $I = 1$.

Dans un premier temps on montre l'existence d'un objet des relations fonctionnelles. Si X et Y sont des ensembles, une telle relation est caractérisée par l'affirmation $(\exists x)\,(R(x,y)\wedge R(x,y'))\Rightarrow y=y'$ ou, mieux, par la formule $R\circ R^{-1}\subseteq \Delta_Y$.

Dans les fibres de C, qui sont régulières, on a une bonne composition des relations. A partir de là on peut indiquer pour X, Y, Z dans $C(1)$ une flèche de composition c, de $S(X\times Y)\times S(Y\times Z)$ vers $S(X\times Z)$. En effet, si on a une flèche $(\alpha,\beta): J\longrightarrow S(X\times Y)\times S(Y\times Z)$, on a, dans $C(J)$, ~~des~~ un sous-objets de $J^*(X\times Y) = J^*(X)\times J^*(Y)$ et un sous-objet de $J^*(Y)\times J^*(Z)$ dont le composé correspond à une flèche $\gamma: J\longrightarrow S(X\times Z)$, associée ainsi à (α,β) de manière naturelle en J.

De $S(X\times Y)$ vers $S(Y\times X)$ on a une symétrie canonique σ, et on peut dès lors considérer le composé

$$S(X\times Y)\xrightarrow{\langle\sigma,\ id_{S(X\times Y)}\rangle} S(Y\times X)\times S(X\times Y)\xrightarrow{\ c\ } S(Y\times Y).$$

On a par ailleurs une flèche $\ulcorner\Delta_Y\urcorner: 1\longrightarrow S(Y\times Y)$, qui permet d'obtenir la diagonale sur Y à partir du sous-objet universel au-dessus de $S(Y\times Y)$. L'objet Fonc (X,Y) s'obtient alors en faisant le produit fibré de

$$S(X\times Y)\xrightarrow[\langle c\langle\sigma,\ id_{S(X\times Y)}\rangle,\ \ulcorner\Delta_Y\urcorner\rangle]{} S(Y\times Y)\times S(Y\times Y)$$

et du sous-objet représentant l'ordre sur $S(Y\times Y)$.

Une seconde étape consiste à mettre en évidence un objet des relations partout définies. Il s'agit de traduire le fait que $(\exists y)R(x,y)$ est vrai pour tout x. Soit donc π_1 la première projection de $X\times Y$. On a une flèche de quantification existentielle $\ulcorner S(\pi_1)$: $S(X\times Y)\longrightarrow S(X)$ (7.5.2), dont on peut faire le produit fibré avec $\ulcorner id_X\urcorner: 1\longrightarrow S(X)$. Cela donne un sous-objet $Def(X,Y)\rightarrowtail S(X\times Y)$.

Si on pose alors $\underline{Hom}_1(X,Y) = Def(X,Y)\cap Fonc(X,Y)$, comme sous-objet de $S(X\times Y)$, on obtient l'objet des flèches de X vers Y souhaité.

Remarques supplémentaires.

1. Au passage l'esquisse précédente nous indique ~~...~~ que les flèches partielles de X vers Y sont aussi représentables — par ~~...~~ les objets $\mathrm{Fonc}(X,Y)$.

2. On pourrait, à partir de $\underline{\mathrm{Hom}}_I(X,Y)$, montrer l'existence d'un objet $\underline{\mathrm{Mono}}_I(X,Y)$ ou $\underline{\mathrm{Epi}}_I(X,Y)$. Pour le premier par exemple, il suffit de considérer qu'un mono est une relation R fonctionnelle partout définie telle que R^{-1} soit fonctionnelle, ce qui mène au produit fibré suivant.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Mono}}_I(X,Y) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Fonc}(Y,X) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_I(X,Y) \arrow[r] & S(X\times Y) \arrow[r, "\sigma"] & S(Y\times X)
\end{tikzcd}$$
.

7.7. Lorsqu'une fibration C est well-powered, on peut parler non seulement de la famille de tous les sous-objets d'une famille donnée, mais aussi de beaucoup d'autres choses. Par exemple, si $m : Y \rightarrowtail X$ est un mono dans $C(I)$, on peut parler de la famille des sous-objets de X qui contiennent Y. Le foncteur qui donne pour chaque $u : J \to I$ la famille des sous-objets de u^*X qui contiennent u^*Y est représentable, par leur certain objet $S(X,Y)$ ~~qui s'obtient~~ de B/I, qui s'obtient en faisant le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
S(X) \simeq I \times_I S(X) \arrow[r, "\langle \ulcorner m \urcorner , id \rangle"'] & S(X) \times_I S(X) \\
S(X,Y) \arrow[u] \arrow[r] & O(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ou encore, si $m : Y \rightarrowtail X$ et $n : Z \rightarrowtail X$ sont deux monos dans $C(I)$, on peut parler de "l'ensemble des i tels que $Y_i \leq Z_i$", qui sera donné par le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
I' \arrow[r] \arrow[d] & O(X) \arrow[d] \\
I \simeq I \times I \arrow[r] & S(X) \times S(X)
\end{tikzcd}$$

Si la fibration C possède en outre de bonnes propriétés de complétude, en particulier si elle est régulière, et si $\mathbb{B}$ admet elle-même certaines constructions, alors les possibilités de ~~description~~ ~~description~~ ~~[illegible]~~ nommer des objets se trouvent multipliées considérablement. Le théorème précédent (7.6) en fournit un exemple. Mais plutôt que continuer à énumérer des observations de ce genre, nous allons les systématiser en un métathéorème aux applications multiples et variées.

7.8. "Théorème à tout faire".

7.8.1 Soit $\mathbb{B}$ un topos (bien que cette hypothèse ne soit pas essentielle) et C une fibration sur $\mathbb{B}$. ~~Soit $\mathbb{B}$ un topos et C une fibration sur $\mathbb{B}$~~ que nous supposerons au moins well-powered, et ~~régulière~~ finie [illegible]

~~7.8.1.~~ Soit $\mathcal{L}$ un langage du 1er ordre unisorte, avec un ensemble ~~fini~~ F fini de symboles fonctionnels $f, g \dots$ (dont les arités seront notées $|f|, |g|, \dots$) et un ensemble fini R de symboles relationnels $r, s, \dots$ (d'arités respectives $|r|, |s|, \dots$).
On suppose qu'il y a dans $\mathcal{L}$ un certain nombre ~~de connecteurs~~ d'opérateurs logiques et que la fibration considérée permet d'interpréter ces ~~connecteurs~~ opérateurs. Par exemple, si C est régulière, $\mathcal{L}$ pourra contenir $\wedge$, $\exists x$, $=$; si C est en outre à unions finies, on pourra ajouter le $\vee$; si les fibres sont des algèbres de Heyting et que les u^* respectent cette structure, on pourra encore mettre le $\rightarrow$.

Soit $X \in C(I)$. On sait ce qu'est une réalisation ρ, de base X, pour $\mathcal{L}$ notée $\rho : \mathcal{L} \dashrightarrow X$. Pour tout $u : J \to I$ on en déduit une réalisation $u^*\rho : \mathcal{L} \dashrightarrow u^*X$. ~~On peut~~

~~Première~~ Proposition : ~~on peut indiquer~~ ~~dans~~ Il existe dans $\mathbb{B}/I$ un objet $\delta : Re(\mathcal{L}, X) \to I$, ~~noté $Re(\mathcal{L}, X)$~~ ~~[illegible]~~ ~~de toutes les réalisations~~ où l'objet des réalisations ~~[illegible]~~, ~~objet~~ de $\mathcal{L}$ dans X, et, dans la fibre ~~[illegible]~~ $C(Re(\mathcal{L}, X))$ ~~[illegible]~~ une réalisation canonique $\rho_0 : \mathcal{L} \dashrightarrow \delta^* X$ telle que toute réalisation de $\mathcal{L}$ dans $u^* X$ ~~s'obtienne~~, pour $u : J \to I$, ~~s'obtienne à partir~~ puisse se déduire de celle-ci via une flèche convenable de u vers δ dans $\mathbb{B}/I$.

En effet, pour chaque opération f, on a une réalisation canonique de cette opération au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_I(X^{|f|}, X)$. De même, pour chaque relation r, on a une réalisation canonique de cette relation au-dessus de $S(X^{|r|})$. On fait le produit dans $\mathbb{B}/I$ de tous les objets indiqués (qui sont en nombre fini), et dans la fibre au-dessus de $\delta : Re(\mathcal{L}, X) \to I$ ainsi trouvé, on a bien une réalisation de toutes les opérations et relations du langage $\mathcal{L}$.

7.8.2 Supposons à présent que $I = 1$ (pour faciliter la présentation) et soit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ une formule à n variables libres de $\mathcal{L}$. Cette formule a via $\rho : \mathcal{L} \dashrightarrow X$ une interprétation $\|\varphi\|_\rho \rightarrowtail X^n$. Quel que soit l'objet J de $\mathbb{B}$, on aura une interprétation de φ via la réalisation $J^*\rho$, soit $\|\varphi\|_{J^*\rho} \rightarrowtail J^*(X^*)^n$, qui coïncidera avec $J^*[\|\varphi\|_\rho \rightarrowtail X^n]$

Si dans le langage $\mathcal{L}$ on se donne une théorie $\mathcal{T}$, par un nombre fini de séquents $\varphi \vdash \psi$, on peut dire quand la réalisation $\rho : \mathcal{L} \dashrightarrow X$ (toujours avec $X \in C(1)$) est un modèle de $\mathcal{T}$. Ce sera lorsque pour chaque séquent $\varphi \vdash \psi$ on a $\|\varphi\|_\rho \rightarrowtail \|\psi\|_\rho$ comme sous-objets d'une puissance de X convenable. Mais, que la réalisation ρ soit un modèle ou non, on peut considérer le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd}
U_{\varphi \vdash \psi} \arrow[r] \arrow[d] & O(X^n) \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "\langle \ulcorner \|\varphi\|_\rho \urcorner, \ulcorner \|\psi\|_\rho \urcorner \rangle"'] & S(X^n) \times S(X^n)
\end{tikzcd}$$

Cela nous donne un sous-objet $U_{\varphi \vdash \psi}$ de 1, que l'on peut penser comme la valeur de vérité de l'affirmation "$\varphi \vdash \psi$ dans la réalisation ρ".
Opérant de même avec tous les axiomes de $\mathcal{T}$, on obtient un nombre fini de sous-objets de 1, dont l'intersection U nous donne la valeur de vérité de l'affirmation " la réalisation ρ constitue un modèle de $\mathcal{T}$".
Cet objet U représente en fait le préfaisceau Φ sur $\mathbb{B}$ défini par $\Phi(J) = \{1\}$ si ~~la~~ la réalisation $J^*\rho$ est un modèle de $\mathcal{T}$ et $\Phi(J) = \emptyset$ si $J^*\rho$ n'est pas un modèle.

Si au lieu de prendre $I = 1$ on avait laissé I quelconque, on aurait pu de manière tout-à-fait analogue indiquer un sous-objet de I donnant la valeur de vérité de $\varphi \vdash \psi$ pour la réalisation $\rho : \mathcal{L} \dashrightarrow X$ donnée, ~~et~~ ou un sous-objet donnant la valeur de vérité de "ρ constitue un modèle de $\mathcal{T}$". En particulier, pour la réalisation canonique $\rho_0 : \mathcal{L} \dashrightarrow \delta^*(X)$, on aura un sous-objet de $Re(\mathcal{L}, X)$, qu'on désignera par $Mod(\mathcal{T}, X)$, et, dans la fibre sur ce sous-objet, le modèle canonique ~~Ceci qui précède~~ En bref, nous avons obtenu le résultat suivant.

<u>Théorème</u>. <u>Pour une théorie $\mathcal{T}$ axiomatisée dans $\mathcal{L}$ par un nombre fini de séquents, la classe des modèles est définissable parmi les réalisi</u>

7.8.3. Soit L' est un sous-langage de L et soit $\mathcal{T}'$ une théorie formulée dans le langage L' et contenue dans $\mathcal{T}$.
Toute réalisation $\rho : L \dashrightarrow X$ induit une réalisation $\rho' : L' \dashrightarrow X$, et on voit qu'il doit exister une flèche de $Re(L, X)$ vers $Re(L', X')$, qu'on peut désigner, de manière suggestive, par $|_{L'}$. A l'aide de cette flèche, on peut, pour une réalisation $\rho' : L' \dashrightarrow X$ donnée, obtenir l'objet des réalisations de L dans X dont la restriction à L' est ρ'.
On fait le produit fibré

$$\begin{tikzcd} Re(L/\rho', X) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\ulcorner \rho' \urcorner"] \\ Re(L, X) \arrow[r, "|_{L'}"'] & Re(L', X) \end{tikzcd}$$

Tout modèle de $\mathcal{T}$ induit un modèle de $\mathcal{T}'$, et on a donc une flèche de $Mod(\mathcal{T}, X)$ vers $Mod(\mathcal{T}', X)$, notée $|_{\mathcal{T}'}$. Et à nouveau, si on a une réalisation ρ' qui est un modèle de $\mathcal{T}'$, on peut obtenir l'objet des modèles de $\mathcal{T}$ de base X qui induisent le modèle de $\mathcal{T}'$ donné en faisant un produit fibré comme ci-dessus, avec $|_{\mathcal{T}'}$ ~~au~~ lieu de $|_{L'}$.

7.8.4. ~~Avant d'~~ Nous allons indiquer certaines applications des observations précédentes, en remarquant d'abord que tout ce qui a été dit peut être généralisé sans difficulté au cas d'un langage L à plusieurs sortes.

7.8.4.1. Proposition. Soit C une fibration well-powered, localement petite et à produits finis.
(i) La fibration $Ab(C)$ des groupes abéliens internes à C est localement petite.
(ii) $Ab(C)$ est well-powered.

Pour le (i), il s'agit essentiellement de voir que pour deux groupes abéliens, de base X et Y dans $C(1)$, on a un objet $\underline{Hom}^{ab}(X, Y)$ des homomorphismes de groupes abéliens. Soit L le langage à 2 sortes s_0 et s_1 avec les symboles fonctionnels $+_0 : s_0 \times s_0 \to s_0$, $+_1 : s_1 \times s_1 \to s_1$ et $f : s_0 \to s_1$. Soit $\mathcal{T}$ la théorie exprimant le fait que les objets associés aux deux sortes sont des groupes abéliens et que l'interprétation de f est un homomorphisme de groupes. On prend pour L' le langage L d'où l'on omet le symbole f et pour $\mathcal{T}'$ les axiomes de $\mathcal{T}$ qui restent. Un modèle de $\mathcal{T}'$ c'est un couple de groupes (X, Y)

abéliens. Les modèles de $\mathcal{T}$ qui induisent ce modèle-là, ce sont les homomorphismes de groupe entre X et Y.

Pour ce (ii), il s'agit de voir que pour un groupe abélien de base X dans $C(1)$ on peut indiquer un objet $S^{ab}(X)$ des sous-groupes de X.
Cette fois on prend pour $\mathcal{L}$ un langage à une seule sorte, avec un symbole fonctionnel $+$, d'arité 2, et un symbole relationnel r, d'arité 1. La théorie $\mathcal{T}$ dira que l'objet associé à la sorte est un groupe abélien et que l'interprétation de r est un sous-groupe. $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{T}'$ s'obtiennent en oubliant le symbole r. Les modèles de $\mathcal{T}$ qui prolongent un modèle donné de $\mathcal{T}'$ - c'est-à-dire un groupe abélien - ce sont les sous-groupes du modèle en question.

7.8.4.2. ~~Signalons quelques~~ Supposons que C soit une fibration well-powered et régulière. Dans un premier langage $\mathcal{L}'$, à deux sortes, on énonce la théorie des couples d'anneaux. Dans une extension $\mathcal{L}$ de ce langage, on ajoute l'exigence que ces anneaux soient locaux et reliés par un homomorphisme local. On obtient ainsi une généralisation de la construction suivante, effectuée dans le cadre des faisceaux d'anneaux sur un espace topologique par exemple : à deux faisceaux d'anneaux A et B donnés, on associe un faisceau F dont l'ensemble des sections au-dessus d'un ouvert U est constitué par l'ensemble des homomorphismes locaux entre les restrictions $A/_U$ et $B/_U$ ou par l'ensemble vide, selon que les restrictions sont des anneaux locaux ou non.

7.8.4.3. Supposons enfin que C soit well-powered, localement petite et à limites à gauche finies. On pourra alors parler des modèles de la théorie des catégories dans C. Pour deux catégories internes $\underline{A}$ et $\underline{B}$, on pourra parler de l'objet des foncteurs entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$. Pour deux foncteurs $\underline{F}$ et $\underline{G}$ ~~entre~~ de $\underline{A}$ ~~et~~ vers $\underline{B}$, on pourra parler de l'objet des transformations naturelles entre $\underline{F}$ et $\underline{G}$.
Et on pourra ainsi parler dans $\mathbb{B}$ d'un tas de choses qui se passent dans des catégories fibrées sur $\mathbb{B}$.

§ 8. Changements de base.

A. Restriction des ~~notations~~ indices.

8.1. Soit $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ un foncteur ordinaire quelconque.

8.1.1. le foncteur F^*. A toute catégorie fibrée C sur $\mathbb{B}$, on peut associer une image réciproque $F^* C$ (1.4.2), catégorie fibrée sur $\mathbb{B}'$.

Cette correspondance s'étend aux foncteurs cartésiens et aux transformations naturelles entre ces foncteurs, de sorte que F^* détermine en fait un 2-foncteur F^* de la 2-catégorie $\mathrm{Fib}(\mathbb{B})$ vers la catégorie $\mathrm{Fib}(\mathbb{B}')$. Pour chaque objet I' de $\mathbb{B}'$, F induit un foncteur $F/_{I'} : \mathbb{B}'/_{I'} \to \mathbb{B}/_{F}$. En envoyant une catégorie D, fibrée sur $\mathbb{B}/FI'$, sur $(F/_{I'})^*(D)$, on définit pour chaque I' un foncteur ~~de~~ $F^*(\mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B})(I')$ vers $(\mathrm{Fib}(\mathbb{B}') \to \mathbb{B}')(I')$ d'où un foncteur cartésien de $F^*(\mathrm{Fib}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B})$ vers $\mathrm{Fib}(\mathbb{B}') \to \mathbb{B}'$.

8.1.2. Quelques propriétés immédiates. ~~Quelques propriétés élémentaires~~

- Si C et D sont des fibrations sur $\mathbb{B}$, alors $F^*(C \times D) \simeq F^*(C) \times F^*(D)$.
- Si $\mathbb{X}$ est une catégorie quelconque et C une fibration sur $\mathbb{B}$, alors $F^*(C^{\mathbb{X}}) \simeq (F^* C)^{\mathbb{X}}$.
- On a toujours $F^*(C^{\mathrm{op}}) \simeq (F^* C)^{\mathrm{op}}$.
- Si f et g sont des foncteurs (cartésiens) adjoints dans $\mathrm{Fib}(\mathbb{B})$, alors $F^*(f)$ et $F^*(g)$ sont également des foncteurs cartésiens adjoints.

Par conséquent, si C ~~a~~ admet des produits finis ou ~~a~~ des noyaux, la même chose vaudra pour $F^*(C)$. De même, si C est à sommes finies ou à conoyaux, ~~ou encore si C est également~~ son image réciproque aura la même propriété.

8.2. Proposition. Si $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ commute aux produits fibrés, alors pour toute fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ à $\mathbb{B}$-sommes (à $\mathbb{B}$-produits), ~~l'image réciproque~~ la fibration $F^* C$ est à $\mathbb{B}'$-sommes (resp. à $\mathbb{B}'$-produits).

La vérification est très simple. Pour $u' : I' \to J'$ dans $\mathbb{B}$ et X dans $(F^* C)(I') = C(FI')$, on ~~posera~~ prendra naturellement ~~comme flèche $X \to \coprod_{u'} X$ dans F^*C~~ comme somme dans F^*C la flèche $X \to \coprod_{Fu'} X$ qui existe pour C. Mais si l'on veut que soit vérifiée la condition de

8.3. La préservation du caractère petit ou localement petit va exiger des hypothèses assez fortes sur F, comme le laisse prévoir l'exemple suivant. On prend pour F l'inclusion des ensembles finis dans les ensembles, et pour C la fibration $\mathrm{Ens}(\mathbb{X}) \to \mathrm{Ens}$ associée à une catégorie {localement petite} ordinaire. L'image réciproque F^*C ne sera localement petite que si $\mathbb{X}$ est localement finie.

<u>Proposition</u>. <u>Un foncteur $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ admet un adjoint à droite si pour toute petite fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ la fibration</u> F^*C est également ~~image réciproque~~ <u>petite</u>. <u>Dans ces conditions, si $\mathbb{B}'$ admet des produits fibrés, F^* préserve le caractère localement petit.</u>

Soit C une petite fibration sur $\mathbb{B}$. Supposons que F admette un adjoint à droite U. La fibre de F^*C en I' a comme objets les flèches de FI' vers l'objet des objets C_0 ~~est~~ lesquelles correspondent bijectivement aux flèches de I' vers UC_0. Et UC_0 est l'objet des objets d'une petite catégorie, puisque U commute aux limites à gauche finies. D'où, facilement, la condition nécessaire.

Réciproquement, soit I un objet de $\mathbb{B}$. La fibration $\underline{I}$ (1.7) est transformée en une fibration $F^*(\underline{I})$ qui est petite. Dans $\mathbb{B}'$ il existe donc un objet I_0^* tel que pour tout objet I' de $\mathbb{B}'$ les éléments de $F^*(\underline{I})(I')$, c'est-à-dire les flèches de FI' vers I, soient en bijection avec les flèches de I' vers I_0. En posant $UI = I_0$ on obtient un foncteur U, adjoint à droite de F.

Supposons enfin que $\mathbb{D}$ soit localement petite et montrons que la même chose vaut pour $F^*\mathbb{D}$. Soient X et Y dans $F^*\mathbb{D}(I')$, donc dans $\mathbb{D}(FI')$. Le foncteur $F/_{I'} : \mathbb{B}'/_{I'} \to \mathbb{B}/_{FI'}$, déduit de F, admet un adjoint à droite, que l'on applique à $\delta : \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathbb{D}}_{FI'}(X,Y) \to FI'$. Explicitement, on prend $U(\delta)$ et on fait le produit fibré avec l'unité $I' \to UFI'$, ce qui donne un objet de $\mathbb{B}'/_{I'}$, le $\underline{\mathrm{Hom}}^{F^*\mathbb{D}}_{I'}(X,Y)$ ~~cherché~~ voulu.

<u>Note du rédacteur</u>. Il paraît qu'il est évident que si F^* préserve le caractère localement petit, alors F préserve le caractère petit. Je n'ai pas vu comment le démontrer.

8.4. <u>Proposition.</u> <u>Si $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ admet un adjoint à droite et est exact à gauche, alors</u>

(i) F^* préserve la définissabilité de l'égalité ;

(ii) F^* préserve la définissabilité des isomorphismes;

(iii) si $\mathcal{C}$ est une classe définissable d'objets pour la fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, alors la classe $F^*(\mathcal{C})$ est à son tour définissable dans F^*C ;

(iv) F^* préserve le caractère well-powered.

Pour (i), soit $m : I_0 \rightarrowtail FI'$ le sous objet définissant l'égalité de f et g, flèches de X vers Y dans $C(FI') = F^*(C)(I')$. On peut prendre le sous-objet $U(m) : UI_0 \rightarrowtail UFI'$ et obtenir par produit fibré avec $\eta_{I'} : I' \to UFI'$ un sous-objet $m' : I'_0 \rightarrowtail I'$. Ce sous-objet définit l'égalité de f et g dans $F^*(C)(I')$ (dans $F^*(C)$, donc $(Fu')^*(f) = (Fu')^*(g)$ dans C). Soit en effet $u' : J' \to I'$ telle que $u'^*(f) = u'^*(g)$, $F(u')$ admet une factorisation unique à travers m_0, donc $\eta_{I'} u' = UF(u')\eta_{J'}$ se factorise à travers $U(m_0)$ et l'on a dès lors une factorisation α de u' à travers m', nécessairement unique (car m' est un mono).

Pour les autres points, on raisonne de manière analogue. Par exemple, si C est well-powered, soit X' un objet de $F^*(C)(I')$. On a une flèche $\delta^{FI'}_{X'} : S^C(X') \longrightarrow FI'$ et dans $C(S(X'))$ un sous-objet universel pour X'. Le produit fibré de $U(\delta^{FI'}_{X'})$ avec $\eta_{I'}$ fournit une flèche δ' de but I'. Dire qu'une flèche $u' : J' \to I'$ se factorise à travers δ', c'est dire que $\eta_{I'} u'$ se factorise à travers $U(\delta^{FI'}_{X'})$, donc, par adjonction, que Fu' se factorise à travers $\delta^{FI'}_{X'}$. A un sous-objet de $u'^*(X')$ dans $F^*(C)(J')$, donc à un sous objet de $F(u')^*(X)$ dans $C(J')$ se trouve donc bien associée une flèche de J' vers la source de δ'. Et le sous-objet universel au-dessus de cette source s'obtient facilement via l'adjonction.

8.5. <u>Remarques</u>. 1. Il résulte des propositions précédentes que si $(U,F) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est un morphisme géométrique de topos, on a exactement ce qu'il faut pour que soient conservées par restriction le long de F toutes les bonnes propriétés des fibrations : complétude, petitesse, propriétés de définissabilité et caractère well-powered.

2. Si l'on pense aux fibrations en termes de pseudo-foncteurs, la

avec le foncteur $F : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$, lequel induit notamment un foncteur bien connu ~~entre~~ de la catégorie usuelle $\hat{\mathbb{B}}$ (les préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbb{B}$) vers la catégorie usuelle $\hat{\mathbb{B}'}$. Un des problèmes de base en théorie des catégories ordinaires est d'étudier l'existence d'adjoints pour ce dernier foncteur. C'est l'analogue des problème d'extension des scalaires en algèbre linéaire, que l'on va ~~examiner~~ étudier ici dans un cadre très général.

B. Extension des indices.

8.6. Soit $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un foncteur ordinaire quelconque et C une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}$. Examinons la possibilité d'indiquer une catégorie fibrée $U_!(C)$ sur $\mathbb{B}'$ telle que pour tout C' sur $\mathbb{B}'$ on ait une ~~équivalence~~ ~~isomorphisme~~ équivalence entre $\mathrm{Cart}^{+}_{\mathbb{B}}(C, U^*C')$ et $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}'}(U_!C, C')$

8.6.1. Commençons par un cas très particulier, celui où $\mathbb{B}' = 1$.

D'après la définition de $U^*(C')$, il est clair qu'un foncteur cartésien de C vers $U^*(C')$ équivaut à un foncteur de $\mathbb{C}$ (source de C) vers $\mathbb{C}'$ (source de C') qui soit U-cartésien - c'est-à-dire qui associe à chaque flèche cartésienne au-dessus de v (flèche de ~~dans~~ $\mathbb{B}$) une flèche cartésienne de $\mathbb{C}'$ au-dessus de $U(v)$. Comme dans le cas particulier envisagé les flèches cartésiennes de $\mathbb{C}'$ sont les isomorphismes, un foncteur U-cartésien revient à un foncteur qui rend inversibles les flèches cartésiennes de C. On a dès lors un candidat tout trouvé pour $U_!(C)$: la catégorie de fractions de $\mathbb{C}$ pour la classe Σ des flèches cartésiennes. Cette catégorie sera notée $\underset{\longrightarrow}{\mathrm{Lim}}\ C$, compte tenu ~~du fait que~~ de l'observation suivante

Considérons le ~~cône~~ diagramme formé de $\mathbb{C}$, des injections canoniques de toutes les fibres et d'un foncteur image réciproque pour chaque flèche $v : J \to I$ dans $\mathbb{B}$

$$\begin{tikzcd}
C(I) \arrow[dr, "i_I"] \arrow[drr, bend left, "q_I = l_\Sigma \circ i_I"] \arrow[dd, "v^*"'] & & \\
& \mathbb{C} \arrow[r, "l_\Sigma"'] & \mathbb{C}[\Sigma^{-1}] \\
C(J) \arrow[ur, dashed, "i_J"'] \arrow[urr, bend right, "q_J = l_\Sigma \circ i_J"'] & &
\end{tikzcd}$$

et complétons-le à l'aide du ~~la projection~~ foncteur universel $l_\Sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[\Sigma^{-1}]$. On obtient un diagramme de 2-limite inductive. En effet, les triangles commutent

~~et~~ le 2-cône inductif est universel pour cette propriété.

Cette limite ne doit pas être confondue avec d'autres objets. Supposons par exemple que C soit la fibration associée à un foncteur $F : \mathbb{B} \to Cat$. La limite de ce foncteur dans Cat, que nous noterons $\underrightarrow{\lim}_{\mathbb{B}^{op}} F$ est un objet généralement différent de $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{\mathbb{B}^{op}} C$, comme le montre l'exemple suivant. Soit $\mathbb{B}$ un groupe non trivial et F le foncteur constant sur la catégorie $\mathbb{1}$. La fibration associée à F est l'identité sur $\mathbb{B}$, et $\mathbb{B}$ coïncide avec la catégorie de fractions, alors que $\underrightarrow{\lim}_{\mathbb{B}^{op}} F = \mathbb{1}$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

8.6.2. ~~Comme~~ Autre cas particulier : $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est quelconque mais la fibration C sur $\mathbb{B}$ est à fibres discrètes, associée à un préfaisceau d'ensembles ϕ_C sur $\mathbb{B}$. Il est bien connu que l'extension (de Kan à gauche) de ϕ_C le long de U se calcule comme suit. Pour I', objet de $\mathbb{B}'$ donné, on ~~prend~~ considère la catégorie comma (I', U), munie ~~d'un~~ du foncteur source $\partial_0 : (I', U) \to \mathbb{B}$, et on prend la limite ~~ensembliste~~ dans Ens du composé $\phi_C \circ \partial_0^{op}$. Ce composé, préfaisceau d'ensembles sur (I', U), est associé à la catégorie fibrée $\partial_0^*(C)$ sur (I', U), et l'on peut donc dire que la fibre de $U_!(C)$ en I' est $\underrightarrow{\lim}_{(I',U)^{op}} \phi_{\partial_0^*(C)}$, catégorie équivalente à $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{(I',U)^{op}} \partial_0^* C$, d'après la remarque terminant 8.6.1.

8.6.3 L'examen des cas particuliers suggère d'adopter la formule générale suivante, pour décrire la fibre de $U_! C$ en I', objet de $\mathbb{B}$. On pose $U_!(C)(I') = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{(I',U)^{op}} \partial_0^* C$, ∂_0 étant le foncteur usuel de la catégorie comma (I', U) vers $\mathbb{B}$. A cause des propriétés universelles des catégories de fractions, cette définition

défini sur $\mathbb{B}'$, et ~~donc~~ $U_!(C)$ sera la fibration associée à ce foncteur, fibration naturellement scindée.
Il s'agit alors de vérifier que l'on a bien l'équivalence entre les catégories $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C, U^*C')$ et $\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}'}(U_!C, C')$. C'est un travail fastidieux mais facile, ~~si l'on garde en mémoire~~ basé essentiellement sur la propriété de 2-limite inductive indiquée en 8.6.1.

Remarquons que même si U est l'identité sur ~~une~~ la catégorie $\mathbb{B}$, la fibration $U_!(C)$ ~~ne~~ est en général différente de C (les fibres sont "plus grosses").

8.6.4. L'extension des indices le long de $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ pour une fibration donnée $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ revient ~~donc~~, d'après la formule ~~donnée~~, à une opération de restriction, le long des ~~2~~ foncteurs ∂_0, suivie d'une opération que nous avons notée $\varinjlim$, sur les duales des ~~colonnes fibrées~~ catégories ~~catégories~~ (I', U).
Mais si la restriction se passe bien en général (cf. les propriétés établies ci-dessus sous A.) l'opération $\varinjlim_{\mathbb{B}}$, elle, n'aura de bonnes propriétés que si les catégories $(I', U)^{op}$ sont filtrantes.
Nous étudierons au paragraphe suivant les foncteurs U pour lesquels ~~cette propriété~~ ce caractère filtrant est assuré et nous ~~verrons~~ examinerons ensuite les propriétés de conservation de $U_!$ pour de tels foncteurs.

~~Changement de base général~~ ~~C. Changement de base général.~~

~~8.7.~~

8.7. Proposition. Si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ admet un adjoint à gauche F, alors pour tout $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ les fibrations $U_!(C)$ et $F^*(C)$ sont équivalentes.

Cette affirmation découle immédiatement des formules
$$U_!(C)(I') = \varinjlim_{(I',U)^{op}} \partial_0^* C \quad \text{et} \quad F^*(C)(I') = C(F(I')),$$
~~et~~ du fait que, vu l'adjonction, (I', U) admet un objet initial, et de l'observation suivante.

Lemme. Si $\mathbb{B}$ admet un objet initial 0, alors pour toute fibration $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ on a $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ équivalente à $C(0)$.

8.8. Nous avons déjà rencontré quelques exemples d'extension des cribles, notamment dans l'étude des sommes et produits pour $Fib(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ (2.6).

Si $u : I \to J$ dans $\mathbb{B}$, il y a un foncteur que nous avons noté $\underline{u}$ (de composition avec u) de $\mathbb{B}_{/I}$ vers $\mathbb{B}_{/J}$. Pour une filtration C sur $\mathbb{B}_{/I}$ on a simplement $\underline{u}_!(C) = \underline{u} \circ C$, ce qui a été ~~filtration~~ identifié en 2.6 comme somme le long de u pour la I-famille de filtrations sur $\mathbb{B}$ qui constitue C.

Lorsque $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies, le foncteur $\underline{u}$ est adjoint à gauche pour un foncteur que nous noterons ici u^{-1}. Si l'on cherche l'extension d'une filtration D sur $\mathbb{B}_{/J}$ via u^{-1}, on trouve, via la proposition 8.7, la restriction $\underline{u}^*(D)$ (à équivalence près). L'extension et la restriction le long de $\underline{u}$ sont des opérations adjointes, qui étendent le couple de foncteurs adjoints $(\underline{u}, u^{-1})$, lorsque u^{-1} existe, mais qui elles-mêmes existent en général.

Lorsque $\mathbb{B}$ est en outre telle que le foncteur u^{-1} admet un adjoint à droite $\prod_u$, on peut également chercher l'extension d'une filtration C sur $\mathbb{B}_{/I}$ via $\prod_u$, et on trouve cette fois, toujours par 8.7, ~~identifié en 2.6 comme produit le long de u pour~~ la fibration $(u^{-1})^*(C)$ (à équivalence près)*). A nouveau l'extension et la restriction le long de u^{-1} ~~[illegible]~~ sont des opérations adjointes, qui étendent le couple de foncteurs adjoints $(u^{-1}, \prod_u)$ lorsque $\prod_u$ existe, mais qui elles-mêmes existent avec u^{-1}.

*) identifié en 2.6 comme produit le long de u pour la I-famille de filtrations sur C qui constitue C.

C. Changements de base ~~généraux~~ via ~~par~~ distributeurs.

8.9. Supposons que les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ soient reliées, non plus par un foncteur ordinaire dans un sens ou dans l'autre, mais par un distributeur Φ, c'est-à-dire un bifoncteur de $\mathbb{B}'^{op} \times \mathbb{B}$ vers Ens. Alors encore on peut chercher à associer à une catégorie fibrée $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une catégorie fibrée sur $\mathbb{B}'$, d'une manière qui justifie la désignation de cette dernière par $\Phi_!(\mathbb{C})$. Mais ~~[illegible]~~ pour expliquer cela, rappelons quelques faits

8.9.0 Un distributeur ϕ, de source $\mathbb{B}$ et de but $\mathbb{B}'$ est donc un bifoncteur de $\mathbb{B}'^{op} \times \mathbb{B}$ vers Ens, canoniquement associé à un foncteur $\overline{\phi}$ de $\mathbb{B}$ vers $\widehat{\mathbb{B}'}$ (la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbb{B}'$).
Tout vrai foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ détermine un distributeur $\phi_U : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ défini canoniquement par la formule
$\phi_U(I', I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[I', U(I)]$ — ou, si l'on préfère, par le fait que $\overline{\phi}_U$ s'obtient en faisant suivre U du plongement de Yoneda de $\mathbb{B}'$ dans $\widehat{\mathbb{B}'}$.
Mais $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ détermine également un distributeur $\phi^U : \mathbb{B}' \Rightarrow \mathbb{B}$, défini lui par $\phi^U(I, I') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[U(I), I']$.
Si ~~ϕ~~ à côté de $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ on se donne $\phi' : \mathbb{B}' \Rightarrow \mathbb{B}''$, on peut décrire un distributeur composé $\phi' \circ \phi$. L'idée est de s'arranger pour que $\overline{(\phi' \circ \phi)} : \mathbb{B} \to \widehat{\mathbb{B}''}$ s'obtienne en faisant suivre $\overline{\phi} : \mathbb{B} \to \widehat{\mathbb{B}'}$ de l'extension de $\overline{\phi}' : \mathbb{B}' \to \widehat{\mathbb{B}''}$ via le plongement de Yoneda $\mathbb{B}' \xrightarrow{Y} \widehat{\mathbb{B}'}$.
Cette composition se décrit agréablement si l'on adopte la convention d'écriture suivante. Pour $\varphi \in \phi(I', I)$, $\beta' : J' \to I'$ dans $\mathbb{B}'$ et $\beta : I \to J$ dans $\mathbb{B}$, l'élément $\phi(\beta', I)(\varphi)$ sera noté $\varphi\beta'$ et $\phi(I', \beta)(\varphi)$ sera noté $\beta\varphi$. Le caractère bifonctoriel de ϕ s'exprime alors par les équations $(\varphi\beta')\beta'_1 = \varphi(\beta'\beta'_1)$, $\varphi\, id_{I'} = \varphi$,

$$\beta_1(\beta\varphi) = (\beta_1\beta)\varphi, \quad id_I\,\varphi = \varphi \quad \text{et} \quad (\beta\varphi)\beta' = \beta(\varphi\beta')$$

Avec ces notations, l'objet $(\phi' \circ \phi)(I'', I)$ peut se décrire comme l'ensemble des couples (φ', φ') — avec $\varphi' \in \phi'(I'', I')$ et $\varphi \in \phi(I', I)$ — modulo ~~une~~ la relation d'équivalence engendrée par l'exigence que les classes d'équivalence $\varphi \otimes \varphi'$ vérifient les relations

$$\cancel{\beta(\varphi\otimes\varphi)}\; \beta(\varphi \otimes \varphi') = (\beta\varphi) \otimes \varphi', \quad (\varphi\beta') \otimes \varphi' = \varphi \otimes (\beta'\varphi'),$$
$$(\varphi \otimes \varphi')\beta'' = \varphi \otimes (\varphi'\beta'').$$

Cette composition est associative à isomorphisme près et ce que l'on obtient est en fait une bicatégorie (cf.   , par exemple, ou   )
La composition des distributeurs prolonge la composition des foncteurs, en ce sens que pour $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ et $U' : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}''$, on a $\phi_{(U' \circ U)} \cong \phi_{U'} \circ \phi_U$.
On a par ailleurs une notion de distributeur adjoint qui étend la notion de foncteur adjoint : si U admet un adjoint à droite F, les distributeurs ~~ϕ_U et ϕ_F~~ $\phi_U = \mathrm{Hom}[-, U(-)]$ ~~et $\phi_F = \mathrm{Hom}[-, F(-)]$~~ admet $\phi_F = \mathrm{Hom}[-, F(-)]$ comme adjoint à droite. En fait ϕ_U admet toujours un distributeur adjoint à droite, ~~qui est~~ à savoir $\phi^U = \mathrm{Hom}[U(-), -]$, et dire que le foncteur U admet un adjoint à droite ~~F~~, c'est dire qu'il existe un foncteur F tel que $\mathrm{Hom}[U(-), -] \cong \mathrm{Hom}[-, F(-)]$.
On montre que tout distributeur ϕ peut s'écrire comme composé de distributeurs de la forme $\phi_{\cdot\cdot}$ ~~et~~ ϕ^U, à partir de la remarque suivante.

Le distributeur $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ étant donné, il existe une catégorie $\mathbb{C}(\phi)$ obtenue en faisant la somme de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ et en ajoutant pour chaque couple d'objets (I', I) (resp. dans $\mathbb{B}'$ et $\mathbb{B}$) les éléments de $\phi(I', I)$ comme flèches. Les composés de $\varphi \in \phi(I', I)$ avec $\beta' : J' \to I'$ dans $\mathbb{B}'$ et avec $\beta : I \to J$ dans $\mathbb{B}$ sont les éléments notés $\varphi\beta'$ et $\beta\varphi$ ci-dessus. Il y a des foncteurs d'inclusion $\delta_0 : \mathbb{B}' \to \mathbb{C}(\phi)$ et $\delta_1 : \mathbb{B} \to \mathbb{C}(\phi)$ et ~~le~~ l'on ~~distributeur ϕ~~ a la formule $\phi \cong \phi_{\delta_1}^{\delta_0} \circ \phi_{\delta_1}$.

Notons finalement que la composition des distributeurs est telle que la catégorie $\mathbb{C}(\phi' \circ \phi)$ s'obtient en faisant la somme amalgamée de $\delta_0 : \mathbb{B}' \to \mathbb{C}(\phi)$ et $\delta_1' : \mathbb{B}' \to \mathbb{C}(\phi')$.

8.9.1. A partir des faits que l'on vient de rappeler, la manière de définir $\phi_!$ s'impose. ~~D'une part~~ Il est d'abord naturel d'exiger que $(\phi_U)_!$ coïncide avec U. Il est aussi normal de ~~exiger~~ vouloir que $(\phi' \circ \phi)_! \cong (\phi'_!) \circ (\phi_!)$. Et si l'on demande enfin que par extension de la proposition 8.7 on ait $(\phi^U)_! = U^*$, l'on aboutit à la formule $\phi_! = \delta_0^* \circ (\delta_1)_!$ qui permet d'obtenir $\phi_!(C)$ à partir des opérations d'extension et de restriction des indices déjà étudiées.

~~Explicitement on trouve~~ ~~Explicitons la valeur de~~ Ainsi on aura $\phi_!(C)(I') = \varinjlim_{(I', \delta_1^*)} \partial_0^* C$ / où ~~le~~ ∂_0 est le foncteur de projection usuel de (I', δ_1^*) vers $\mathbb{B}$)..

Et comme en 8.6.3 on peut remarquer que la fibration $\phi_!(C)$ ainsi définie sera naturellement scindée.

8.10. Finalement, en présence d'un distributeur $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$, on peut encore examiner la possibilité d'associer à chaque fibration C' sur $\mathbb{B}'$ une fibration désignée par $\phi^*(C')$ sur $\mathbb{B}$.

La remarque utilisée pour aboutir à la formule donnant $\phi_!$ ne nous sert plus ici, car ~~la restriction~~ on aurait besoin d'une formule ~~du type~~ $(\phi^U)^* = U_! \ldots$ qui n'existe pas (l'extension le long de l'adjoint à droite n'est pas la restriction le long de l'adjoint à gauche)

Mais on peut s'en sortir en ~~trouvant~~ considérant la relation que devrait vérifier un $\phi^*(C')$ convenable, à savoir

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}'}(\phi_!(C), C') \cong \mathrm{Cart}_{\mathbb{B}}(C, \phi^*(C')),$$

, définit la ...

La définition de $\phi^*(C')(I)$ s'impose donc : on prendra

$$\mathrm{Cart}_{\mathbb{B}'}(\phi, (\underline{I}), C').$$

Laissant au lecteur le soin de vérifier que cette formule fournit effectivement la fibration souhaitée, nous terminerons par la remarque suivante.

Si U est un foncteur de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}'$, le distributeur ϕ^U donne lieu à des foncteurs adjoints $(\phi^U)_!$ et $(\phi^U)^*$ entre ~~entre~~ $Fib(\mathbb{B}')$ et $Fib(\mathbb{B})$. Comme $(\phi^U)_!$ coïncide avec U^*, on en déduit que ce dernier foncteur admet non seulement un adjoint à gauche (qui est $U_!$) mais aussi un adjoint à droite.

§ 9. Platitude.

9.1. Définition.

~~9.1.~~ On dit qu'un foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) Pour tout I' objet de $\mathbb{B}'$ il existe un objet I de $\mathbb{B}$ et une flèche de I' vers UI.

(ii) Pour tout couple de flèches $\alpha : I' \to UI$, $\beta : I' \to UJ$, il existe ~~un couple~~ des flèches $a : K \to I$, $b : K \to J$ et $\gamma : I' \to UK$ telles que $U(a)\gamma = \alpha$ et $U(b)\gamma = \beta$.

(iii) Pour tous $\alpha : I' \to UI$ et $a, b : I \to J$ telles que $(Ua)\alpha = (Ub)\alpha$, il existe $c : K \to I$ qui égalise a et b et $\beta : I' \to UK$ telle que ~~$(Uc)\beta = \alpha$~~. $(Uc)\beta = \alpha$.

Lorsque $\mathbb{B}' = \mathbb{1}$, dire que U est plat revient à dire que $\mathbb{B}$ est cofiltrante (ou que $\mathbb{B}^{op}$ est filtrante). En général, les conditions de la définition expriment que pour tout objet I' de $\mathbb{B}'$, la catégorie (I', U) est cofiltrante.

Si $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ sont des groupes, alors U est plat ssi U est un isomorphisme. Si $\mathbb{B}$ est un groupe et $\mathbb{B}' = \mathbb{E}ns$, alors U est plat ssi U est un torseur sous $\mathbb{B}$.

9.2. ~~Propos~~ Caractérisations des foncteurs plats.

9.2.1. Proposition. Un foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat ssi pour tout diagramme D fini dans $\mathbb{B}$ et tout objet I' de $\mathbb{B}'$ muni d'un cône projectif vers $U(D)$, il existe un cône projectif dans $\mathbb{B}$, d'un objet I vers D, et une flèche de I' vers $U(I)$ qui factorise le cône donné dans $\mathbb{B}'$ à travers l'image par U du cône ~~existant~~ en question dans $\mathbb{B}$.

~~Cette proposition éclaire la notion de~~

Les conditions mises dans la définition expriment la propriété indiquée pour les diagrammes D d'un des trois types suivants : le diagramme vide, celui formé de deux objets distincts et celui formé de deux flèches parallèles. Il n'est pas difficile de ~~voir~~ se convaincre que ces conditions sont suffisantes pour ~~en~~ avoir la propriété indiquée.

9.2.2. <u>Proposition</u>. (1) Le foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat ssi le foncteur

$$U_! : \hat{\mathbb{B}} \to \hat{\mathbb{B}}'$$ est exact à gauche.

(2) Si $\mathbb{B}$ ~~et $\mathbb{B}'$ sont~~ est à limites à gauche finies, alors U est plat ssi U est exact à gauche.

Pour le (1), supposons que U soit plat. Si F est un préfaisceau sur $\mathbb{B}$, le préfaisceau $U_!(F)$ se calcule en I' en prenant la limite inductive d'un diagramme filtrant dans Ens (résultant de l'application à (I',U) du foncteur "source", suivi de F qui change la variance). La commutation dans Ens des limites inductives filtrantes aux limites à gauche finies fournit l'exactitude à gauche de $U_!$. Réciproquement, si $U_!$ est exact à gauche, on obtient facilement les trois conditions énoncées en 9.1. en traduisant respectivement que $U_!$ respecte l'objet final, les produits finis (de représentables) et les égalisateurs. Par exemple, ~~l'égalité~~ la relation

$$U_![[-,I]\times[-,J]] \cong U_![-,I] \times U_![-,J]$$

se traduit ~~s'écrit encore~~ pour I' objet de $\mathbb{B}'$ par ~~l'égalité~~ la relation

$$\varinjlim_{[I',U]} [-,I]\times[-,J] \cong [I',UI]\times[I',UJ]$$

qui contient clairement la condition (ii).

Pour le (2), il est immédiat qu'un foncteur exact à gauche est plat. Dans l'autre sens, on utilise le fait que dans Ens les limites inductives filtrantes commutent aux limites à gauche finies. Soit en effet (L, l_α) la limite à gauche dans $\mathbb{B}$ d'un diagramme fini D. Pour voir que (UL, Ul_α) est limite à gauche de UD dans $\mathbb{B}'$, il suffit de voir que pour tout objet I' de $\mathbb{B}'$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[I', UL]$ est limite à gauche des $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[I', UD_\alpha]$.

Or $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[I', UL] = \varinjlim_{(I',U)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}[I, L] = \varinjlim_{(I',U)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}[I, \varprojlim D_\alpha]$$

$$\cong \varprojlim \varinjlim_{(I',U)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}[I, D_\alpha] = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}'}[I', UD_\alpha].$$

<u>Remarque</u>. La preuve du (2) montre en fait qu'un foncteur plat respecte les limites à gauche finies "qui veulent bien exister" dans $\mathbb{B}$.

9.2.3 Une autre manière de caractériser les foncteurs plats repose sur la notion de "limite à gauche finie faible". On dit qu'une catégorie <u>$\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies faibles</u> si pour tout diagramme fini D dans $\mathbb{B}$ on peut trouver un cône projectif de base D tel que tout autre cône projectif de base D se factorise à travers lui .. de manière non [illegible] (Cette notion est utilisée en topologie algébrique

Proposition. Si $\mathbb{B}$ est à limites à gauche finies faibles, alors $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat ssi U commute aux limites à gauche finies faibles.

marquer chemins ! C'est immédiat, compte tenu de la proposition 9.2.1.

9.3. ~~Pour tout cardinal~~
Si α est un cardinal régulier infini, on dira que U est α-plat s'il vérifie les conditions de la définition 9.1. en admettant cette fois que le couple (α, β) de la ~~de~~ condition (ii) et le couple (a, b) de la condition (iii) soient remplacés respectivement par des familles de flèches de cardinal strictement inférieur à α.
On dira que U est ∞-plat s'il est α-plat pour tout cardinal régulier α.
On observe sans peine le résultat suivant.

Proposition Si U admet un adjoint à gauche, il est ∞-plat.

9.4. ~~Propriétés de stabilité~~ Construction des foncteurs plats.

9.4.1. Le composé de deux foncteurs plats est plat. ~~C'est immédia~~
~~9.4.2~~: C'est immédiat, à partir de la caractérisation donnée ~~en~~ par 9.2.2.(7) par exemple, et du fait qu'un composé de foncteurs exacts à gauche est exact à gauche.

9.4.2. Un rétracte d'un foncteur plat est plat.. Ceci signifie que si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat et si $U' : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est tel qu'il y ait des transformations naturelles $m : U' \to U$ et $e : U \to U'$ vérifiant $e\,m = id_{U'}$, alors U' est plat également. La vérification est immédiate.

9.4.3. Le produit d'une famille de foncteurs plats est plat. Si pour chaque $\alpha \in A$ le foncteur $U_\alpha : \mathbb{B}_\alpha \to \mathbb{B}'_\alpha$ est plat, alors le foncteur $\prod U_\alpha : \prod \mathbb{B}_\alpha \to \prod \mathbb{B}'_\alpha$ est encore plat.

Remarque. Contrairement à ce qui se passe pour les limites fortes, l'existence d'un objet final faible et de produits fibrés, même forts, n'entraîne pas l'existence de produits faibles. Pour s'en convaincre, on peut regarder la catégorie ayant pour objets les ensembles dénombrables et pour flèches les injections : elle admet l'ensemble des entiers comme objet final faible et des produits fibrés forts, mais pas des produits faibles

9.4.4. <u>Si $\mathcal{X}$ est une catégorie de présentation finie et si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est un foncteur plat, alors le foncteur $U^{\mathcal{X}} : \mathbb{B}^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{B}'^{\mathcal{X}}$ est encore plat.</u>

Cette affirmation ne surprendra pas compte tenu de la proposition 9.2.1. Un diagramme fini formé de diagrammes finis d'un certain type est encore un diagramme fini. Encore faut-il s'assurer que les objets trouvés par application répétée de 9.2.1. s'organisent bien en un diagramme fini du type voulu, avec ses flèches et relations de commutation.
Illustrons ceci par un exemple, en montrant que le foncteur $U^2 : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}'^2$ vérifie la condition (ii) mettons.
Soit donné dans $\mathbb{B}'$ le diagramme commutatif à traits pleins ~~suivant~~ ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
 & UI_1 \arrow[rrr, "Uu_1"] & & & UJ_1 \\
I' \arrow[ur] \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right, "u_1"'] \arrow[dr] & UL \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[rr, dashed, bend left] & J \arrow[r, dashed] \arrow[urr] \arrow[drr] & UK \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
 & UI_2 \arrow[rrr, "Uu_2"'] & & & UJ_2
\end{tikzcd}$$

Le couple de flèches issues de J' se factorise à travers UK (condition (ii) pour U). Le cône issu de I' ~~vers la~~ ~~tête~~ vers le diagramme comprenant UK se factorise à travers UL (proposition 9.2.1.) et l'image par U d'un diagramme dans $\mathbb{B}$. ~~lequel~~ ~~puis constitue~~ Ce dernier constitue le lien voulu entre les flèches u_1 et u_2.

9.4.5. <u>Si $U, V : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ sont tous deux plats, si $\mathbb{B}'$ est à produits finis et $\mathbb{B}$ à sommes finies, alors le foncteur $U \underline{\times} V : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$, défini par $(U \underline{\times} V)(I) = U(I) \times V(I)$, est plat lui aussi.</u>

En effet, $U \underline{\times} V$ se décompose en $\mathbb{B} \xrightarrow[\Delta_{\mathbb{B}}]{} \mathbb{B} \times \mathbb{B} \xrightarrow[U \times V]{} \mathbb{B}' \times \mathbb{B}' \xrightarrow[\times_{\mathbb{B}'}]{} \mathbb{B}'$.
~~Or~~ $U \times V$ est plat (9.4.3). D'autre part, $\Delta_{\mathbb{B}}$ admet un adjoint à gauche et ~~$\times$ est~~ $\times_{\mathbb{B}'}$ est adjoint à droite au foncteur ~~diagon~~ diagonal $\Delta_{\mathbb{B}'}$; ils sont donc également plats (9.3). Le résultat suit (9.4.1).

9.4.6. <u>La limite d'une famille inductive filtrante de foncteurs plats $U_i : \mathbb{B}_i \to \mathbb{B}'_i$</u> ~~est un foncteur plat~~ ~~donne~~ <u>est un foncteur plat ~~entre~~ $\varinjlim \mathbb{B}_i$ et $\varinjlim \mathbb{B}'_i$</u>

9.4.7. <u>Si le composé $F \circ U$ est plat et si F est pleinement fidèle, alors U est déjà plat.</u>

~~9.4.8 Si Σ est une classe de flèches de $\mathbb{B}$ admettant un calcul de fractions à droite, le foncteur canonique $\mathbb{B} \to \mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ est plat. De plus, un foncteur $K : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ rendant inversibles les flèches de Σ est plat si sa factorisation à travers $\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ est plat.~~

9.5. Platitude de catégories de fractions.

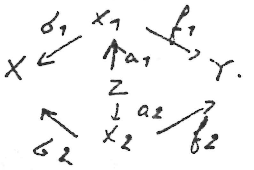
9.5.1. Rappelons qu'une classe de flèches Σ dans $\mathbb{B}$ admet un <u>bon calcul de fractions à droite</u> si les conditions suivantes sont réalisées.

(i) Σ contient les identités et est stable par composition.

(ii) Pour tout couple (f,σ) de flèches ~~(f,σ)~~ de même but, avec $\sigma \in \Sigma$, il existe un couple (f', τ), de flèches de même source, avec $\tau \in \Sigma$, tel que $\sigma f' = f \tau$.

(iii) Pour tout couple (f, g) de flèches parallèles coégalisées par une flèche σ de Σ $(\sigma f = \sigma g)$, il existe une flèche τ de Σ qui les égalise $(f\tau = g\tau)$.

On sait que dans ces conditions la catégorie de fractions $\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ se décrit agréablement. Les objets sont ceux de $\mathbb{B}$ et une flèche de X vers Y dans $\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ est représentée par un couple (σ_1, f_1), avec $\sigma_1 : X_1 \to X$ dans Σ et $f_1 : X_1 \to Y$. Deux tels couples (σ_1, f_1) et (σ_2, f_2) sont identifiés s'il existe des flèches $a_1 : Z \to X_1$ et $a_2 : Z \to X_2$ telles que $\sigma_1 a_1 = \sigma_2 a_2$, $f_1 a_1 = f_2 a_2$ et $a_1 \in \Sigma$. La composition se définit via des représentants, de la manière que suggère la condition (ii), et qui est bonne.

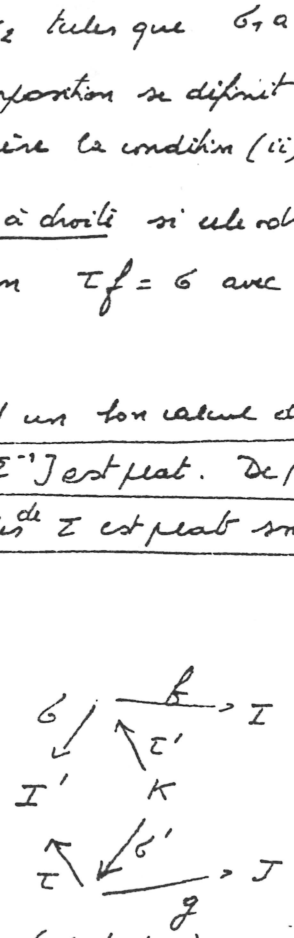


On dit que Σ admet un <u>très bon calcul de fractions à droite</u> si elle admet un bon calcul de fractions et si en outre la relation $\tau f = \sigma$ avec σ et τ dans Σ entraîne que f est dans Σ.

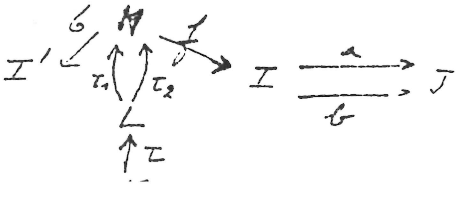
9.5.2. <u>Proposition.</u> <u>Si la classe Σ de flèches dans $\mathbb{B}$ admet un bon calcul des fractions à droite, le foncteur canonique $P_\Sigma : \mathbb{B} \to \mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ est plat. De plus, un foncteur $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ rendant inversibles les flèches de Σ est plat ssi sa factorisation à travers $\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$ est plate.</u>

La première condition de platitude pour P est triviale.

Pour la deuxième condition, si $(\sigma, f) : I' \to I$ et $(\tau, g) : I' \to J$ sont donnés, on peut trouver σ' et τ' de source commune K tels que $\sigma\tau' = \tau\sigma'$ soit dans Σ. Les composés $f\tau'$ et $g\sigma'$ jouent les rôles de a et b et ~~f~~ la classe de $(\sigma\tau', id_K)$ sera y.



Pour la troisième condition, si les couples (σ, af) et (σ, bf) définissent la même classe, on peut trouver d'abord $\tau_1, \tau_2 : L \to M$ tels que $af\tau_1 = bf\tau_2$ et ... K ... égalisant τ_1 et τ_2



En ce qui concerne la seconde affirmation, supposons que l'on ait $U = U_\Sigma \circ P_\Sigma$. Si U_Σ est plat, alors U l'est aussi comme composé de foncteurs plats. ~~Et c'est un exercice facile de voir que~~ Maintenant si U est plat alors U_Σ doit l'être également : la vérification des deux premières conditions est immédiate, et pour la troisième c'est un exercice facile à partir du fait que l'image par U_Σ de la classe de (σ, f) c'est $U(f)[U(\sigma)]^{-1}$.

9.5.3. Corollaire. Si la classe Σ de flèches dans $\mathbb{B}$ admet un bon calcul des fractions à droite, alors la catégorie $\widehat{\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]}$ (des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]$) est une sous-catégorie réflexive exacte de $\widehat{\mathbb{B}}$.

En effet, le foncteur $P_\Sigma^* : \widehat{\mathbb{B}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]}$ est pleinement fidèle et le foncteur d'extension $(P_\Sigma)_!$, son adjoint à gauche, est exact à gauche (cf. 9.2.2). Il existe donc une topologie sur $\widehat{\mathbb{B}}$ telle que $\widehat{\mathbb{B}[\Sigma^{-1}]}$ soit la catégorie des faisceaux pour cette topologie. Un crible $R \hookrightarrow \hat{I}$ sera couvrant s'il contient une flèche $\sigma : J \to I$ de Σ.

9.5.4. Proposition. Soit $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration, avec $\mathbb{B}$ cofiltrante. La classe des flèches cartésiennes admet un très bon calcul de fractions à droite.

La vérification ~~de ce fait~~ ne pose aucun problème.

9.6. Distributeurs plats.

9.6.1. Si $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ est un distributeur, on peut considérer pour chaque objet I' de $\mathbb{B}'$ la catégorie (I', ϕ) suivante. Les objets sont les couples (I, φ), avec $\varphi \in \phi(I', I)$, et les flèches de (I, φ) vers (J, ψ) sont les triples (φ, ψ, β), avec $\beta : I \to J$ dans $\mathbb{B}$, tels que $\beta\varphi = \psi$ (avec les notations ~~rappelées en~~ introduites en 9.6.0). Au cas où ϕ est de la forme Φ_U pour un foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$, on retrouve la catégorie (I', U) usuelle. En général on remarque que (I', ϕ) coïncide avec (I', δ_1) (δ_1 ayant le sens dit en 8.9.0).
Il est naturel de poser la définition suivante. On dira que $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow$ est ~~plat~~ un distributeur plat, si pour tout objet I' de $\mathbb{B}'$ la catégorie

9.6.2. Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) le distributeur $\phi : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ est plat.

(ii) Le foncteur $\delta_1 : \mathbb{B} \to \mathbb{C}(\phi)$ est plat.

(iii) Le foncteur $\phi_!$, restreint aux fibrations discrètes, est exact à gauche.

(iv) Pour toute catégorie ordinaire $\mathbb{X}$, le foncteur de composition avec ϕ, soit $\phi\circ - : \mathrm{Dist}(\mathbb{X}, \mathbb{B}) \longrightarrow \mathrm{Dist}(\mathbb{X}, \mathbb{B}')$ est exact à gauche.

L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate en vertu des définitions. ~~Il est clair par~~ L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) découle de la formule $\phi_! = \delta_0^* \circ (\delta_1)_!$ et ~~des~~ de la proposition 9.2.2 ($(\delta_1)_!$ est exact à gauche car δ_1 est plat), ~~9.3 (δ_0^* est plat car il admet un adjoint à gauche) et 9.4~~ jointe au fait que δ_0^* est exact à gauche (ayant un adjoint à gauche).

Pour (iii) $\Rightarrow$ (ii), on observe que si F est un objet de $\hat{\mathbb{B}}$, alors $\phi_!(F)$ s'évalue en I', objet de $\mathbb{B}'$, par la formule $\varinjlim_{(I', \delta_1^*)^{op}} F \circ \partial_0$, où $\partial_0 : (I', \delta_1^*) \to \mathbb{B}$ est la projection usuelle. En utilisant le fait que l'opération $\varinjlim_{\mathbb{C}^{op}}$ n'est exact à gauche que si $\mathbb{C}$ est filtrante, on obtient que $(I', \delta_1^*)^{op}$ est cofiltrante, donc que δ_1 est plat.

Pour voir ~~que~~ le lien entre (iii) et (iv), on observe que $\phi_!$ restreint aux ~~catégo~~ fibrations discrètes n'est rien d'autre (à iso près) que l'extension de Kan de $\bar{\phi} : \mathbb{B} \to \hat{\mathbb{B}}'$ via le plongement de Yoneda. Et comme $\phi\circ-$ revient à ~~compo~~ faire suivre de cette extension les foncteurs de $\mathbb{X}$ vers $\hat{\mathbb{B}}$ ~~de cette extension~~, il s'agit bien là d'un foncteur exact à gauche pour tout $\mathbb{X}$, dès que $\phi_!$ (restreint aux fibr. discrètes) l'est.

Dans l'autre sens, si $\phi\circ-$ est toujours exact à gauche, il l'est en particulier pour $\mathbb{X} = \mathbb{1}$; mais ~~alors~~ dans le ~~domaine~~ cas particulier il s'identifie à $\phi_!$, restreint aux fibres discrètes, ce qui donne (iii).

9.6.3. Voyons pour terminer quelques exemples de distributeurs plats.

- Si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est plat, alors $\phi_U : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}'$ est plat. ~~Et~~ réciproquement, comme le montrent les définitions.
- Pour tout $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$, le distributeur $\phi^U : \mathbb{B}' \Rightarrow \mathbb{B}$ est plat. En effet $(\phi^U)_!$ coïncide avec ~~admet~~ ~~la~~ $U^{*\vee}$ (8.10), lequel est exact à gauche ~~un adjoint à gauche et est donc exact~~
- Soit G un groupe et $\phi : G \Rightarrow \mathbb{1}$ un distributeur plat. Notons X l'ensemble des objets de $(1, \phi)$. Dire que cette catégorie

§10. Extension plate.

L'objectif principal de ce paragraphe est de montrer que l'extension plate préserve les différentes propriétés ~~envisagées~~ examinées précédemment pour les fibrations : propriétés de complétude, de petitesse, de définissabilité ou caractère well-powered. L'essentiel du travail consistera à montrer que l'opération $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}$ conserve ces propriétés lorsque $\mathbb{B}$ est cofiltrante.

10.1 Existence de limites finies (calcul "à la main").

10.1.1. Soit C une fibration sur $\mathbb{B}$ (cofiltrante) muni d'un objet final. Alors la catégorie $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ admet-elle aussi un objet final.

En effet, ~~En effet~~, soit I un objet de $\mathbb{B}$ et 1_I objet final de $C(I)$. Cet objet 1_I convient comme objet final de $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$, car si X, de $C(J)$, est un autre objet de ~~cette~~ la catégorie de fractions, on peut toujours trouver $u : K \to J$ et $v : K \to I$ et considérer l'unique flèche de u^*X vers $v^*(1_I)$ dans $C(K)$. Celle-ci détermine ~~une flèche~~ de manière unique une flèche de X vers 1_I dans la catégorie de fractions. La vérification est aisée puisque l'on a un bon calcul de fractions (9.5.4) ~~[illegible]~~).

10.1.2. Supposons que dans C on ait des produits finis. Alors la même chose vaut pour $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ ($\mathbb{B}$ cofiltrante toujours).

Soient en effet X objet de $C(I)$ et Y objet de $C(J)$. On prend K dans $\mathbb{B}$ avec $\partial_0 : K \to I$ et $\partial_1 : K \to J$, et, dans $C(K)$, on prend un produit $\partial_0^*(X) \times \partial_1^*(Y)$, muni de projections p et q ~~vers~~ ∂_0^*X et ∂_1^*Y respectivement. En composant ces projections respectivement avec les flèches cartésiennes $\partial_0^*X \to X$ et $\partial_1^*Y \to Y$, on construit l'objet $\partial_0^*(X) \times \partial_1^*(Y)$ comme produit de X et Y dans la catégorie de fractions. Comme on le constate, il n'est pas difficile de trouver un diagramme candidat au titre de produit. Mais il reste à vérifier que ce candidat est bon, ce qui ~~n'est pas di~~ est assez long à écrire en détail, en jouant sur le caractère filtrant de $\mathbb{B}$ et la préservation des produits par ~~[illegible]~~ image réciproque.

10.1.3. Si C est munie d'un objet initial, $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ le sera également.

La vérification est l'analogue exact de ce qui a été fait pour l'objet final (10.1.1).

10.1.4. Supposons à présent que C ait des ~~sommes finies~~. A nouveau la propriété sera vraie pour $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{\mathbb{B}^{\mathrm{op}}}\, C$.

Soient X dans C(I) et Y dans C(J). A nouveau on prend K dans avec $\partial_0 : K \to I$ et $\partial_1 : K \to J$, et, dans C(K), on prend une somme $\partial_0^* X \amalg \partial_1^* Y$, avec les injections i et j depuis $\partial_0^* X$ et $\partial_1^* Y$ respectivement. Cette fois l'injection de X (resp. de Y) dans $\partial_0^* X \amalg \partial_1^* Y$ (~~resp de Y~~) sera la classe du couple $(\partial_0^* X \to X, i)$ ~~$\partial_0^* \ldots \partial_1^* \ldots$~~ (resp. du couple $(\partial_1^* Y \to Y, j)$). A nouveau la vérification du fait que le candidat trouvé est bon demande un certain travail.

10.1.5. Si l'on étudie le problème pour les noyaux, la mise en évidence d'un bon candidat est un peu moins immédiate, mais les choses marchent encore quand même. ~~Ce qui~~ On voit se dégager ~~comme procédé~~ ~~commun aux~~ dans les différents cas particuliers envisagés jusqu'ici le procédé commun suivant. On a dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{\mathbb{B}^{\mathrm{op}}}\, C$ un certain diagramme ~~fini~~ de type Π disons. Ce diagramme provient d'un diagramme Π' dans la catégorie globale de $\mathbf{C}$, un peu plus complexe puisque chaque flèche ~~peut~~, représentée par un couple formé d'une flèche cartésienne et d'une flèche quelconque, de sommet commun, introduit le sommet commun comme objet supplémentaire. Le diagramme Π' se projette dans $\mathbb{B}$ sur un diagramme fini pour lequel on peut trouver un cône projectif, de sommet I disons. Par image réciproque on ~~obtient~~ un retrouve dans C(I) un diagramme de type Π — compte tenu de ~~via~~ la transitivité des images réciproques. On prend la limite (à droite ou à gauche selon le cas) de ce diagramme dans la fibre, et celle-ci fournit, modulo les flèches cartésiennes vers les sommets du diagramme initial, la limite dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{\mathbb{B}^{\mathrm{op}}}\, C$. L'objet I n'est pas unique, mais l'on peut montrer que si on avait pris dans $\mathbb{B}$ un cône projectif différent, de sommet I', on aurait obtenu quelque chose d'équivalent, en remarquant que les deux cônes projectifs dans $\mathbb{B}$ peuvent être englobés dans un cône plus vaste, de sommet I'' disons, et en utilisant bien sûr le fait que les limites de diagrammes de type Π dans les fibres sont préservées par image réciproque.

10.2. Existence de limites finies (méthode "synthétique" ~~globale~~)

Reprenons le cas où C, ~~filtrée sur~~ filtration sur $\mathbb{B}$ (cofiltrante toujours), admet des produits finis (des sommes finies). Cela signifie que le foncteur diagonal $\Delta : C \to C\times C$ admet un adjoint à droite (à gauche). Vu le caractère 2-fonctoriel de l'opération $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}$, il en résulte l'existence de foncteurs adjoints entre $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ et $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} (C\times C)$. On pourrait en déduire l'existence de produits finis (de sommes finies) dans $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}$ de C si l'on savait que $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}(C\times C)$ équivaut à $(\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C)\times(\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C)$.

Or, on a le résultat plus général suivant.

10.2.1. Proposition. Soient C et D deux filtrations sur la catégorie cofiltrante $\mathbb{B}$. Les catégories $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}(C\times D)$ et $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}(C)\times \varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}(D)$ sont équivalentes.

On sait que la filtration $C\times D$ ~~se déduit par~~ est image réciproque le long du foncteur diagonal $\Delta_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}\to\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ de la filtration sur $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ obtenue en faisant le produit ordinaire des foncteurs C et D. La proposition résulte ~~alo~~ alors des lemmes suivants, joints à la proposition 9.5.4.

Lemme 1. Si Σ (resp. Σ') est une classe de flèches de $\mathcal{X}$ (resp. de $\mathcal{X}'$) qui admet un bon calcul de fractions à droite, alors la classe produit $\Sigma\times\Sigma'$ admet un bon calcul de fractions et les catégories

$\mathcal{X}\times\mathcal{X}'[\Sigma\times\Sigma']^{-1}$ et $\mathcal{X}[\Sigma]^{-1}\times\mathcal{X}'[\Sigma']^{-1}$ sont équivalentes.

Lemme 2. Si $\mathbb{B}$ est cofiltrante, alors le foncteur diagonal $\Delta_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}\to\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ est coinitial.

Rappelons que $U : \mathbb{B}\to\mathbb{B}'$ est dit coinitial si
(i) pour tout objet I' de $\mathbb{B}'$ il existe un objet I dans $\mathbb{B}$ et une flèche $\varphi : U(I)\to I'$ dans $\mathbb{B}'$, et
(ii) pour tout couple de flèches $\varphi, \varphi' : UI\to I'$, il existe une flèche $u : J\to I$ telle que $\varphi U(u) = \varphi' U(u)$.

Lemme 3. Si $U : \mathbb{B}\to\mathbb{B}'$ est coinitial, alors pour toute filtration $C' : \mathbb{C}'\to\mathbb{B}'$ les catégories $\varinjlim_{\mathbb{B}'^{op}} C$ et $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} U^*(C')$ sont équivalentes.

La preuve de ces lemmes est immédiate, soit à partir de la description des morphismes dans la catégorie de fractions en présence d'un bon calcul, soit à partir de la définition de catégorie cofiltrante, soit enfin à partir de la description de $\varinjlim_{\mathbb{B}'^{op}}$ comme 2-limite inductive d'un diagramme

~~10.2.1~~. Si l'on veut regarder le cas où C admet d'autres limites finies, des noyaux ou des conoyaux par exemple, on peut à nouveau ~~[illegible]~~ formuler ces propriétés en termes d'existence d'adjoints à ~~des~~ un foncteur diagonal convenable et renvoyer à utiliser ~~[illegible]~~ le caractère 2-fonctoriel de $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}$ (préservant l'adjonction entre flèches). Pour ~~cela~~ le faire on aimerait disposer du résultat général que voici.

10.2.2. Proposition. Soit $\mathbb{X}$ une catégorie de présentation finie et soit C une fibration sur la catégorie cofiltrante $\mathbb{B}$. Les catégories $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}}(C^{\mathbb{X}})$ et $(\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C)^{\mathbb{X}}$ sont équivalentes.

Pour établir cette affirmation, ~~du lemme 3 précédent et d'une généralisation du lemme 2~~ ~~on pourra se servir comme précédemment~~ ~~[illegible]~~ ~~le lemme 3 servira toujours~~ le lemme 3 précédent servira toujours et la généralisation du lemme 2 ne pose pas de problème.

Lemme 2-$\mathbb{X}$. Si $\mathbb{X}$ est de présentation finie et $\mathbb{B}$ cofiltrante, alors le foncteur diagonal $\Delta_{\mathbb{X}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ est coinitial.

Pour voir ceci, on peut remarquer d'abord que si Π désigne le type de diagramme sous-jacent à $\mathbb{X}$, le foncteur diagonal $\Delta_{\Pi} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{\Pi}$ est coinitial. On observe ensuite que Δ_{Π} se factorise en $\Delta_{\mathbb{X}}$ suivi de l'inclusion de $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ dans $\mathbb{B}^{\Pi}$. Et à cause de la pleine fidélité de cette dernière, le foncteur $\Delta_{\mathbb{X}}$ hérite du caractère coinitial de Δ_{Π}.

~~Mais~~ En ce qui concerne le lemme 1 par contre, on voit mal comment le généraliser, de sorte que pour établir la proposition 10.2.2 on se trouve renvoyé à un travail à la main ... fastidieux.

Devant ce problème, on est tenté de se tourner vers la remarque suivante

Proposition Soit $C : \mathcal{C} \to \mathbb{B}$ une catégorie fibrée scindée sur $\mathbb{B}$ cofiltrante et $F_C : \mathbb{B}^{op} \to \mathcal{C}at$ le foncteur correspondant. Alors les catégories $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} C$ et $\varinjlim_{\mathbb{B}^{op}} F_C$ sont équivalentes.

Comme on sait ~~Or on sait en effet~~ que dans $\mathcal{C}at$ le calcul de limites inductives filtrantes commute à l'exponentiation par une catégorie de présentation finie, on obtient par ce biais le résultat souhaité pour les catégories fibrées scindées. ~~Et~~ Or on sait ~~par ailleurs~~ bien que toute catégorie fibrée est équivalente à une catégorie scindée et la proposition 10.2.2. devient donc légitime.

[illegible] ce cheminement repose sur une utilisation intensive on devra passer par un calcul à la main sur des diagrammes

Exercice. Montrer, à la main, que les catégories

$$\underset{\mathbb{B}^{op}}{\underline{Lim}} (C^2) \text{ et } (\underset{\mathbb{B}^{op}}{\underline{Lim}} C)^2 \text{ sont équivalentes.}$$

10.3. ~~Petitesse~~ ~~Petitesse~~ Préservation des limites finies par $U!$.

Les résultats précédents sur $\underset{\mathbb{B}^{op}}{\underline{Lim}}$ pour $\mathbb{B}$ cofiltrante et les résultats ou plutôt sur la restriction des indices (8.1) nous ~~pour~~ fournissent immédiatement le comportement de l'extension plate par rapport aux limites ~~[illegible]~~ finies.

D'une part, il est clair que si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ (quelconque cette fois) admet ~~toutes sorte~~ des limites de tel ou tel type fini et si U est plat, alors la catégorie $U!C$ admettra des limites du même type. L'existence fibre à fibre est déjà acquise et la préservation par image réciproque se vérifie ~~[illegible]~~ sans problème

D'autre part un résultat tel que 10.2.1. fournit le fait que $U!$ transforme ~~à équivalence~~ ~~les~~ produit de fibrations $C \times D$ en le produit $U!(C) \times U!(D)$ - à équivalence près. et ~~[illegible]~~ à partir de 10.2.2. on obtient l'équivalence des catégories $U!(C^{\mathbb{X}})$ et $(U!C)^{\mathbb{X}}$ pour toute catégorie $\mathbb{X}$ de présentation finie.

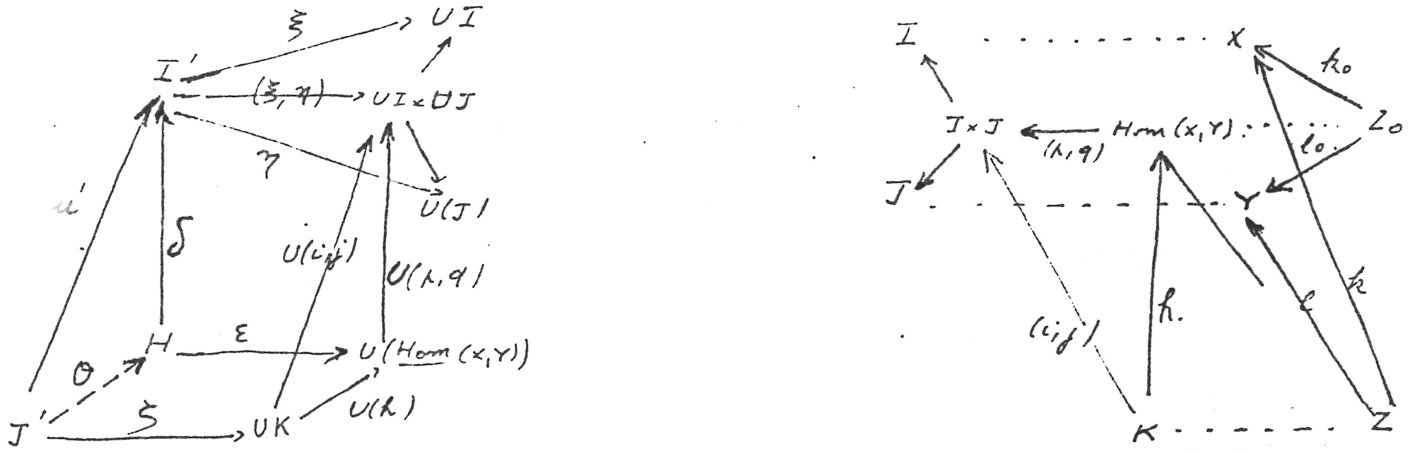
10.4. ~~Petitesse~~ Fibrations petites et localement petites.

10.4.1 Proposition. Si $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est une fibration petite et si U est plat, alors $U!C$ est petite également

Cette remarque est triviale.

10.4.2. Proposition. ~~Si [illegible] est une catégorie à limites à gauche finies et si~~ Si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est un foncteur plat entre catégories à limites à gauche finies et si ~~Si~~ $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ est localement petite, ~~et si U est plat~~, alors $U!$ est également localement petite.

Partons de deux objets dans la fibre de $U!(C)$ en I'. Ce sont des triples (I, ξ, X) et (J, η, Y) avec $\xi : I' \to U(I)$, $\eta : I' \to U(J)$, ~~et~~ X ~~dans~~ objet de $C(I)$ et Y objet de $C(J)$. On a dans $\mathbb{B}$ un objet $\underline{Hom}(X, Y)$ au-dessus de $I \times J$, dont on peut prendre l'image par U. Cela donne une flèche de $U(\underline{Hom}(X,Y))$ vers $U(I) \times U(J) (\cong U(I \times J))$ dont on peut faire le produit fibré avec $(\xi, \eta) : I' \to U(I) \times U(J)$. Et on obtient de cette façon une flèche $H \to I'$, dans $\mathbb{B}'$, qui sera le $Hom_{I'}((X, \xi), (Y, \eta))$ cherché.



Pour le voir, explicitons d'abord ce que signifie l'existence pour $u': J' \to I'$ d'une flèche entre les images réciproques de (X, ξ) et (Y, η) dans la fibre $U_!(C)(J')$. Cela veut dire qu'il existe un objet K, muni de flèches $i: K \to I$ et $j: K \to J$, et une flèche $\zeta : J' \to UK$ telle que $U(i,j)\zeta = (\xi, \eta)u'$, avec un objet Z dans $C(K)$ muni de $k: Z \to X$, cartésienne au-dessus de i, et $l: Z \to Y$, au-dessus de j. Si cela existe, le couple (i,j) doit se factoriser à travers $h: K \to \mathrm{Hom}(X,Y)$, et le couple formé de u' et de $U(h)\zeta$ se factorise à travers $\theta : J' \to H$.

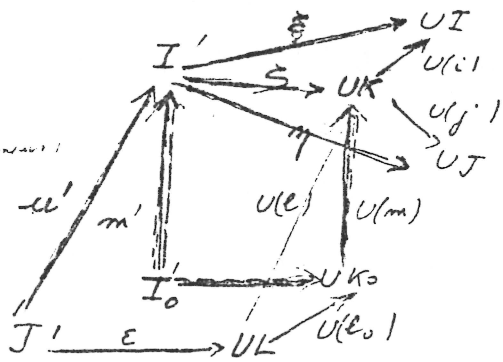
Il y a une flèche universelle entre les images réciproques de (X, ξ) et (Y, η) dans la fibre $U_!(C)(H)$: elle est constituée par le couple universel (k_0, l_0) (~~cf.~~), issu de Z_0 dans $C(\mathrm{Hom}(X,Y))$ (cf. 3.2.2), avec k_0 cartésienne au-dessus de p et l_0 au-dessus de q ; et par construction même, on a bien une flèche ε ~~de~~ $\varepsilon : H \to U(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))$ ~~qui~~ vérifiant $U(p,q)\varepsilon = (\xi, \eta)\delta$. L'image réciproque de la flèche universelle le long de θ, c'est ~~est même~~ toujours le couple (k_0, l_0), mais regardé comme flèche entre $(X, \xi\delta\theta)$ et $(Y, \eta\delta\theta)$ et ceci équivaut bien à la flèche initialement donnée dans la fibre $U_!C(J')$, car le couple (k, l) provient de (k_0, l_0) via une flèche cartésienne au-dessus de h (vérifiant $(p,q)h = (i,j)$).

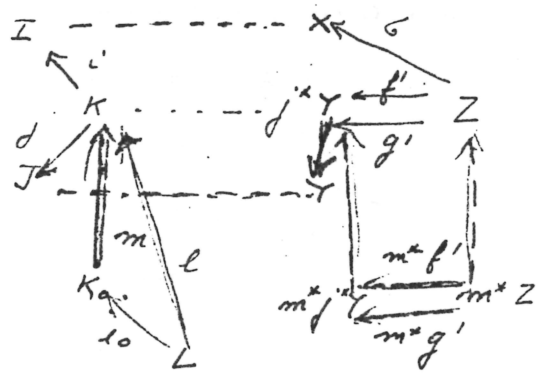
10.5. Définissabilité de l'égalité et des isos.

10.5.1. Proposition. Si $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est un foncteur plat inter catégorisé limites à gauche finies et si dans la fibration C sur $\mathbb{B}$ l'égalité est définissable, elle l'est aussi dans la fibration $U_!C$, sur $\mathbb{B}$

Partons cette fois de deux ~~flèches~~ morphismes dans la fibre de $U_!(C)$ en I', ayant même source (X, ξ) et même but (Y, η). ~~Quitte à faire des appels~~ Les deux morphismes sont représentés

$f : Z \to Y$ et σ cartésienne. En faisant appel à la platitude de U ~~platitude de~~, on peut se ramener au cas où la flèche cartésienne est commune aux deux couples (en utilisant la condition (ii) de 9.1) et ensuite au cas où les deux autres flèches ont ~~la~~ même projection dans $\mathcal{B}$ (en utilisant la condition (iii) de 9.1). On peut donc supposer que la situation est celle du diagramme ci-dessous (traits pleins marqués), où les deux flèches de Z vers Y ont été factorisées par une flèche cartésienne au-dessus de leur projection commune j, et où ξ est la flèche indexant K dans ~~Ел~~(I', U).





Soit alors $m : K_0 \to K$ le sous-objet définissant l'égalité des factorisations ~~de~~ f' et g'. On peut en prendre l'image par U (toujours un mono, puisque U est plat) et faire dans $\mathcal{B}'$ le produit fibré avec ξ. Cela donne un sous-objet $m' : I_0' \to I'$, lequel définit bien l'égalité entre les morphismes ~~flèches~~ donnés au départ dans $U!C(I')$. La vérification est analogue à ce qui a été fait en 10.4.2. Dire que les deux ~~flèches~~ morphismes deviennent égaux dans $(U!C)(J')$ par image réciproque le long de $u' : J' \to I'$, c'est dire que dans (J', U) on a un objet $\varepsilon : J' \to UL$, avec une flèche $l : L \to K$, vérifiant $U(l)\varepsilon = \xi u'$ ~~d'autre part~~, et pour laquelle $l^*(f') = l^*(g')$. La flèche l se factorise en $m\, l_0$, le couple formé de u' et $U(l_0)\varepsilon$ se factorise à travers I_0', et le raisonnement s'achève comme précédemment.

10.5.2 <u>Proposition</u>. Si $U : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ est un foncteur plat entre catégories à limites à gauche finies ~~et~~ si dans la fibration C, sur $\mathcal{B}$, ~~les~~ les isos sont définissables, la même chose vaut pour la fibration $U!C$.

Nous laisserons au lecteur le soin d'établir cette affirmation. ~~Les~~ Cela ~~choses se passent~~ peut se faire de manière fort semblable à ce qui a été fait pour la proposition ~~qui~~ précédente. On remarquera toutefois qu'on doit cette fois moins faire appel à la platitude de U ~~pour~~ ~~de~~ pour simplifier ~~...~~ les données initiales.

10.6. Caractère well-powered.

Proposition. Soit $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un foncteur plat entre catégories à limites à gauche finies et soit $C : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ une fibration well-powered (on suppose, comme en 7.2, que si $m : X' \to X$ est un mono dans $C(I)$, alors pour tout $u : J \to I$, $u^*(m) : u^* X' \to u^* X$ est un mono dans $C(J)$). La fibration $U_! C$ est également well-powered.

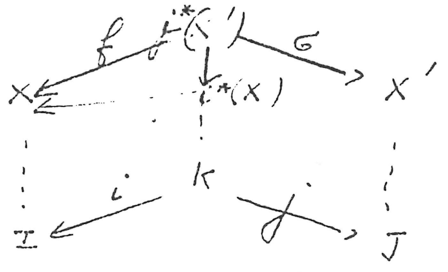
Soit (X, ξ) un objet de $U_! C(I')$. Par hypothèse, il existe dans $\mathbb{B}$ une flèche $\delta_X^I : S(X) \longrightarrow I$, avec un mono universel $s : X_0 \to (\delta_X^I)^*(X)$ dans la fibre $C(S(X))$. On peut prendre l'image par U de δ_X^I et faire le produit fibré avec ξ dans $\mathbb{B}'$. Cela donne une flèche $\delta_{(X,\xi)}^{I'} : S(X, \xi) \to I'$, avec comme mono universel la classe du couple formé par l'identité sur X_0 ~~$(\delta_X^I)^* X$~~ et par la flèche composée ~~$X_0 \to (\delta_X^I)^* X$~~ ~~de s et de la flèche cartésienne $(\delta_X^I)^*(X) \to X$.~~ $X_0 \xrightarrow{s} (\delta_X^I)^*(X) \longrightarrow X$

(où la seconde flèche est cartésienne sur δ_X^I).

Le fait que le couple en question représente bien un mono s'obtient aisément à partir de la caractérisation suivante. ~~des monos~~

Lemme. Soit $\mathbb{X}$ une catégorie ordinaire et Σ une classe de flèches admettant un bon calcul de fractions à gauche. Un couple (σ, f) (avec σ ~~cartésienne~~ dans Σ) représente un mono dans $\mathbb{X}[\Sigma^{-1}]$ ssi f possède la propriété suivante : chaque fois que f égalise deux flèches g et h, celles-ci sont égalisées par une flèche de Σ (dans $\mathbb{X}$).

[Je ne vois pas comment achever la démonstration .. car je ne vois pas comment à partir d'un mono dans $U_! C(I')$, soit



(σ, f) ci-contre, on peut obtenir un bon sous-objet d'une image réciproque de X.

(Si la factorisation $j^*(X') \to i^*(X)$ est un mono dans $\mathbb{C}(K)$, alors (f, σ) est un mono .. mais dans l'autre sens, je ne vois pas).]

Peut-être faut-il penser à choisir autre chose ...

10.7. Sommes et produits (infinis) de catégories.

Soient $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ deux catégories à limites à gauche finies. On sait que les fibrations $\mathrm{Fib}\,\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $\mathrm{Fib}\,\mathbb{B}' \to \mathbb{B}'$ sont toutes deux à sommes et à produits (2.6)
~~Il est On se pose la question de savoir~~ On peut se demander dans quelle mesure l'extension locale d'~~un~~ foncteur $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ respecte les sommes et produits.

10.7.1. Pour les sommes, la situation est particulièrement simple. Soit en effet $u : I \to J$ dans $\mathbb{B}$ et C une fibration sur $\mathbb{B}/I$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & \mathbb{B}/I \arrow[r, "\underline{u}"] \arrow[d, "U/I"'] & \mathbb{B}/J \arrow[d, "U/J"] \\ & \mathbb{B}'/UI \arrow[r, "\underline{Uu}"] & \mathbb{B}'/UJ \end{tikzcd}$$

Le diagramme ci-contre est commutatif et on a $(U/J)_!(\underline{u})_!(C) \cong (\underline{Uu})_!(U/I)(C)$ ou — d'après ~~les~~ remarques faites en 8.8 —

$$(U/J)_! \coprod_u (C) \cong \coprod_{Uu} (U/I)_!(C).$$

C'est au sens de cette dernière formule qu'on peut parler de commutation aux sommes infinies de catégories. ~~Et~~ Elle a lieu ~~[illegible]~~ sans hypothèse de platitude sur U.

10.7.2. Pour les produits, les choses sont moins faciles.
Si dans $\mathbb{B}$ (resp. $\mathbb{B}'$) les $\prod_u$ ~~et~~ (resp. les $\prod_{Uu}$) existent, et si on peut ~~[illegible]~~ former ~~le~~ diagramme commutatif, à iso près, ci-dessous, ~~et en déduire que~~ alors on peut en déduire que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & \mathbb{B}/I \arrow[r, "\prod_u"] \arrow[d, "U/I"'] & \mathbb{B}/J \arrow[d, "U/J"] \\ & \mathbb{B}'/UI \arrow[r, "\prod_{Uu}"] & \mathbb{B}'/UJ \end{tikzcd}$$

$$(U/J)_! \big(\prod_u\big)_! (C) \cong \big(\prod_{Uu}\big)_! (U/I)_! C .$$

Toujours d'après 8.8 cette formule revient à

$$(U/J)_! \prod_u (C) \cong \prod_{Uu} (U/I)_!(C),$$

où les $\prod_u$ (resp. $\prod_{Uu}$) ont cette fois le sens d'un produit pour $\mathrm{Fib}\,\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (resp. $\mathrm{Fib}\,\mathbb{B}' \to \mathbb{B}'$).
Autrement dit, si on peut former des produits infinis de catégories discrètes, tant par rapport à $\mathbb{B}$ qu'à $\mathbb{B}'$, il suffit que U soit compatible avec la formation de ces produits pour qu'il soit compatible avec la formation de tout produit infini de catégories. (La condition ~~étant~~ est clairement nécessaire).

Mais même si les $\prod_{\mathbb{B}}$ (resp. $\prod_{U_!}$) n'existent pas, les produits de familles infinies de catégories existent par rapport à $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ (supposés à limites à gauche finies, rappelons-le) et on peut rechercher à quelles conditions l'extension ~~par~~ le long de U respecte ces produits.

Supposons que U soit plat et soit I un objet fixé de $\mathbb{B}$, identifié à la flèche canonique $I \to 1$. De $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}/I$ on a un foncteur I^* (produit par I) et le produit le long de $I \to 1$ d'une fibration C sur $\mathbb{B}/I$,

noté $\prod_I (C)$, n'est autre que son image réciproque par I^*. Si l'extension ~~par~~ le long de U commute aux produits, on aura en particulier l'équivalence de $U_! \prod_I (C)$ et $\prod_{UI} \cdot (U/I)_!(C)$. Calculons la fibre en K', objet de $\mathbb{B}'$, de ces deux catégories. ~~Comme~~ Pour représentants les objets on trouve d'un côté des couples formés d'un morphisme $\xi : K' \to UK$ et d'un objet dans $C(K \times I \to I)$, et de l'autre des ~~couples~~ triplets formés d'un morphisme ξ_* de $K' \times UI \to UI$ vers $U\alpha : UJ \to UI$ et d'un objet dans $C(\alpha)$ ~~d'un objet~~ $\alpha : J \to I$ de $\mathbb{B}/I$,

On s'aperçoit que les fibres en K' seront équivalentes si dans $\mathbb{B}'/UI$ chaque morphisme ξ peut se factoriser à travers un $\xi \times UI$ et l'image par U d'une flèche de $K \times I \to I$ vers $\alpha : J \to I$. De manière ~~De manière plus~~ précise, pour chaque objet α de $\mathbb{B}/I$, on peut considérer la catégorie comma $(I^*, \alpha) = \mathbb{K}_\alpha$ et, ~~de même~~ la catégorie comma $((UI)^*, U\alpha) = \mathbb{K}'_\alpha$, reliées entre elles par un foncteur canonique V_α. La condition visée ~~peut~~ s'exprime en disant que pour tout objet α de $\mathbb{B}/I$ le foncteur V_α est plat, ou qu'il est cofinal.

On peut démontrer le résultat suivant.

<u>Proposition</u>. $U_!$ commute aux produits infinis à la condition nécessaire et suffisante que pour tout $\alpha : J \to I$ dans $\mathbb{B}$ le foncteur $V_\alpha : \mathbb{K}_\alpha \to \mathbb{K}'_\alpha$ soit plat ou cofinal.

note du rédacteur [Je ne suis pas sûr de l'énoncé exact de cette proposition, que je n'ai pas cherché à démontrer. La condition nécessaire ne découle-t-elle pas des résultats ~~et~~ auxiliaires techniques de la proposition 8.1.3 de SGA 4, exposé I (p. 62 dans l'édition Springer LN) ?

10.8 Foncteur de comparaison.

10.8.1. Soit $U: \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un foncteur plat. Soient $C: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ et $C': \mathbb{C}' \to \mathbb{B}$ des fibrations et $V: \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ un foncteur U-cartésien. (Ceci signifie, rappelons-le, que l'image par V d'une flèche cartésienne associée à $u: J \to I$ et X dans $C(I)$ est une flèche cartésienne associée à $Uu: UJ \to UI$ et $V(X)$ dans C'.

Dans cette situation, on a clairement un foncteur cartésien entre les filtrations C et $U^*(C')$ (sans hypothèse sur U d'ailleurs). Mais on peut aussi ~~dire~~ donner une description commode d'un foncteur cartésien entre les fibrations $U_! C$ et C', que nous appelerons "foncteur de comparais[on]" et notrons W.

Si $(X, \bar\xi)$ désigne un objet de $U_! C(I')$ (avec $\bar\xi: I' \to UI$ et X dans $C(I)$), on lui associera l'objet $W(X,\bar\xi) = \bar\xi^*(V(X))$ dans $C'(I')$.

Si l'on a une flèche de $(X,\bar\xi)$ vers (Y,η) dans $U_! C(I')$, c'est-à-dire s'il existe $\partial_0: K \to I$, $\partial_1: K \to J$, $k: Z \to X$, cartésienne au-dessus de ∂_0, et $\varphi: Z \to Y$, au-dessus de ∂_1, ainsi que $\xi: I' \to UK$, telles que $\bar\xi = U(\partial_0)\xi$ et $\eta = U(\partial_1)\xi$, alors il existe φ' dans $C(K)$, donc $V(\varphi')$ dans $C'(UK)$ telle que $\xi^*(V(\varphi'))$ ait comme source

$$\xi^*(V(Z)) = \xi^*(U(\partial_0)^*(V(X)))$$
$$= \bar\xi^*(V(X)) = W(X,\bar\xi)$$

$$\begin{tikzcd} & UI \\ I' \arrow[ur, "\bar\xi"] \arrow[r, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"'] & UK \arrow[u, "U(\partial_0)"'] \arrow[d, "U(\partial_1)"] \\ & UJ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \\ K \arrow[u, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_1"'] \\ J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X & \\ \partial_0^* X = Z \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & \partial_1 \arrow[dl, "\varphi"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

et comme but

$$\xi^*(V(\partial_1^* Y)) = \xi^*(U(\partial_1)^*(V(Y)))$$
$$= W(Y,\eta) \; ; \quad \text{on prendra} \quad \cancel{W(k,\varphi,\xi)} \; W(k,\varphi,\xi) = \xi^*(V(\varphi'$$

Nous allons examiner différentes propriétés possibles pour W.

10.8.2. W est <u>essentiellement surjectif</u> ssi <u>pour tout objet $\mathbf{Z}'$ de $\mathbb{C}'$ il existe un objet $\mathbf{Z}$ de $\mathbb{C}$ et une flèche cartésienne de $\mathbf{Z}'$ vers $V\mathbf{Z}$.</u> ne pas souligner.

~~Cette caractérisation est immédiate~~.

10.8.3. W est <u>plein</u> ssi pour tout couple de flèches (k', φ') dans $\mathbb{C}'$, avec $k': \mathbf{Z}' \to VX$, cartésienne, et $\varphi': \mathbf{Z}' \to VY$ quelconque, il existe un couple de flèches (k, φ) dans $\mathbb{C}$, avec $k: Z \to X$ cartésienne et $\varphi: Z \to Y$, ainsi qu'une flèche cartésienne $k'': \mathbf{Z}' \to VZ$ telle que l'on ait $k' = V(k) \circ k''$ et $\varphi' = V(\varphi) \circ k''$.

10.8.4. W est fidèle si dans $\mathcal{C}'$ ~~pour~~ tout diagramme commutatif du type indiqué en traits pleins ci-dessous peut être complété par les flèches indiquées en traits interrompus, étant entendu que les flèches k_i, k_i', $\bar{k}_i$ $(i=1,2)$ et k' sont toutes cartésiennes.

$$\begin{tikzcd}
 & & VZ_1 \arrow[d, "Vk_1"] \arrow[dr, "V\varphi_1"] & \\
Z' \arrow[urr, "k_1'"] \arrow[r, dashed, "k'"'] \arrow[drr, "k_2'"'] & VZ \arrow[ur, dashed, "V\bar{k}_1"] \arrow[dr, dashed, "V\bar{k}_2"'] & VX & VY \\
 & & VZ_2 \arrow[u, "Vk_2"'] \arrow[ur, "V\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Regardons un instant cette dernière affirmation, en laissant au lecteur le soin de vérifier les caractérisations précédentes.

La condition est bien nécessaire. Posons en effet $C(X) = I$, ~~et~~ $C(Y) = J$, $C'((Vk_1)\circ k_1') = \xi : I' \to UI$ ~~et~~, $C'((V\varphi_1)\circ k_1') = \eta : I' \to UJ$ et enfin $(Z_i) = K_i$, $C'(k_i') = \zeta_i : I' \to UK_i$. La commutativité du diagramme ~~des traits pleins~~ en traits pleins signifie que $W(k_1, \varphi_1, \zeta_1) = W(k_2, \varphi_2, \zeta_2)$, entre $Z' = \xi^*(V(X))$ et $\eta^*(V(Y))$. Par fidélité de W, les triplets $(k_1, \varphi_1, \zeta_1)$ et $(k_2, \varphi_2, \zeta_2)$ représentent la même flèche de ~~X vers Y~~ (X, ξ) vers (Y, η). Il existe donc des flèches ~~un objet~~ $\delta_i : K \to K_i$ ~~et~~, un objet $Z = (U(k_i)\delta_i)^*(X)$ ~~avec les~~ ~~conditions~~ ~~$\xi : I' \to UK$ avec les conditions~~ muni des flèches $\bar{k}_i : Z \to Z_i$, cartésiennes sur δ_i, et enfin $\zeta : I' \to UK$ telles que $\zeta_i = U(\delta_i)\zeta$. Il est clair ~~[illegible]~~ que la factorisation de k_1' à travers $V\bar{k}_1$, la flèche ~~[illegible]~~ cartésienne k', ~~rend commutatifs~~ vérifie aussi ~~[illegible]~~ $(V\bar{k}_2)k' = k_2'$.

La condition est bien suffisante. Le lecteur le constatera sans peine.

Variante de la condition.

W est fidèle si dans $\mathcal{C}'$ tout diagramme commutatif du type indiqué en traits pleins ci-dessous peut être complété par les flèches indiquées en traits interrompus, étant entendu que k, k' et k'' sont cartési[ennes]

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "k'"] \arrow[dr, dashed, "k'"'] & VX \arrow[r, shift left, "V\varphi"] \arrow[r, shift right, "V\psi"'] & VY \\
 & VZ \arrow[u, dashed, "Vk"'] &
\end{tikzcd}$$

10.8.5. Mettant ensemble ces caractérisations données en 10.8.2, 10.8.3 et 10.8.[4] on voit que si W est une équivalence de catégories, alors pour tout objet Z' de $\mathcal{C}'$ la catégorie comma (Z', V) est filtrante, autrement dit le foncteur V est plat. Il s'agit même d'une platitude très forte, qu'on pourrait appeler "platitude par flèches cartésiennes".