

Introduction. Maintenant que la notion de topos est dégagée, il est souhaitable de pouvoir développer la théorie des catégories dans un topos.

La structure de topos est souvent trop riche pour notre propos : une partie des résultats et constructions de la théorie des catégories classique peut s'écrire dans une catégorie ayant des limites projectives finies. C'est le ~~chapitre~~ paragraphe 1.

Étant donné un univers  $\mathcal{U}$ , la théorie des catégories classique distingue quatre sortes de catégories :

- les petits catégories dont l'ensemble des objets et l'ensemble des flèches appartiennent à  $\mathcal{U}$ .
- les catégories essentiellement petits, équivalents aux petits catégories.
- les catégories localement petits, telles que l'ensemble des flèches d'un objet vers un autre soit un objet de  $\mathcal{U}$ .
- les grosses catégories.

Nous retrouverons ces différentes notions dans le cadre des catégories fibrées sur une catégorie ayant des limites projectives finies ( paragraphes 2 et 3 ) Ainsi des notions de la théorie classique qui perdaient tout intérêt restreintes aux catégories internes d'un topos ou d'une catégorie à limites projectives finies sont elles récupérées ( théorème de Kan, ou les notions de complétude ... )

Le lecteur pourra peut-être noter un lien avec les idées de Thom pour qui, au cours d'un récent séminaire, il y avait des ensembles finis, ... et autre chose. Cet ailleurs pourrait être pensé non pas comme des ensembles infinis, mais comme des objets d'une catégorie.

---

J. BENABOU, Logique Catégorique

[ A series of lectures presented at the Séminaire de mathématiques supérieures  
Université de Montréal, Montréal, 1974. ]

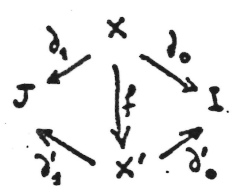
Now notons  $\mathbf{Ens}$  la catégorie des ensembles,  $\text{cat}(\mathbf{Ens})$  la catégorie des petits catégories,  $\text{Cat}(\mathbf{Ens})$  la catégorie des catégories non nécessairement petits; le lecteur persévère pourra mettre les univers qu'il faut là où il faut. La catégorie des ensembles finis est notée  $\mathbf{Ens}_f$ .  
 Dans tout le texte les lettres grasses  $A, D, E, \dots$ , désignent des catégories, des types de diagrammes, ..., au sens ordinaire; les lettres  $B$  et  $B'$  désigneront, sauf mention contraire, des catégories à limites projectives finies.

Paragraphe 1. Constructions dans les catégories à limites projectives finies

1. Pont. Rappelons ce qui est écrit dans [ ] p22.

"Span"

Un "pont" dans  $B$  de  $I$  vers  $J$  est un couple de flèches  $d_0, d_1$  de  $B$  représenté par un diagramme  $S = \begin{matrix} & X & \\ d_1 \swarrow & & \searrow d_0 \\ & J & \end{matrix}$ .  
 On note  $I$  le pont  $\begin{matrix} & I & \\ d_1 \swarrow & & \searrow d_0 \\ & J & \end{matrix}$ . Une flèche  $f$  du pont  $S$  vers le pont  $S' = \begin{matrix} & X' & \\ d_1' \swarrow & & \searrow d_0' \\ & J & \end{matrix}$  est un diagramme commutatif de  $B$



Pour chaque couple  $(I, J)$  d'objets de  $B$  on définit ainsi une catégorie  $\text{Pon}(B)(I, J)$ .

Supposons choisi pour chaque diagramme  $A \xrightarrow{u} c$  de  $B$  un carré cartésien  $\begin{matrix} A \times B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow v \\ A & \xrightarrow{u} & c \end{matrix}$  dans  $B$ . Pour chaque

triplet  $(I, J, K)$  d'objets de  $B$  on définit un foncteur  $*$  :  $\text{Pon}(B)(J, K) \times \text{Pon}(B)(I, J) \rightarrow \text{Pon}(B)(I, K)$ ; donnons la

construction sur les objets : à  $S = \begin{matrix} & X & \\ d_1 \swarrow & & \searrow d_0 \\ & J & \end{matrix}$  et à  $S' = \begin{matrix} & X' & \\ d_1' \swarrow & & \searrow d_0' \\ & J & \end{matrix}$  on associe  $S' * S = \begin{matrix} & X' \times X & \\ d_1' \swarrow & & \searrow d_0' \\ & K & \end{matrix}$ , où  $p: X' \times X \rightarrow X$ ,  $q: X' \times X \rightarrow X'$  sont les projections canoniques choisies.



$(Uc, U\eta, U\mu)$ , où  $Uc$  est le pont  $U\delta_1 \xrightarrow{Uc} U\delta_0$ , est une  $B'$ -catégorie; nous la noterons  $Uc$ . Cette proposition

s'applique en particulier au foncteur  $(T, \cdot) : B \rightarrow \text{IEus}$  pour tout objet  $T$  de  $B$ , et au foncteur de Yoneda  $: B \rightarrow \hat{B}$ .

3.3. Proposition Un triplet  $(c, \eta, \mu)$  formé d'un type de diagramme  $c$  de  $B$  et de deux flèches  $\eta : c_0 \rightarrow c$ ,  $\mu : c * c \rightarrow c$  de  $\text{Pon}(B)(c_0, c_0)$  est une  $B$ -catégorie si, et seulement si, pour tout objet  $T$  de  $B$  le triplet  $((T, c), (T, \eta), (T, \mu))$  est une petite catégorie.

#### 4. B-foncteurs, B-transformation naturelles.

4.1. Soient  $c$  et  $c'$  deux  $B$ -catégories. Un couple de flèches  $f = (f_0, f_1)$ ,  $f_0 : c_0 \rightarrow c'_0$ ,  $f_1 : c_1 \rightarrow c'_1$  est appelé B-foncteur de  $c$  vers  $c'$  si

pour tout objet  $T$  de  $B$  le couple  $((T, f_0), (T, f_1))$  définit un foncteur de  $(T, c)$  vers  $(T, c')$  (que nous noterons  $(T, f)$ ).

4.2. Soient  $c$  et  $c'$  deux  $B$ -catégories,  $f$  et  $g$  deux  $B$ -foncteurs de  $c$  vers  $c'$ . Une flèche  $\lambda : c_0 \rightarrow c'_0$  de  $B$  est appelée une B-transformation naturelle de  $f$  vers  $g$  si pour tout objet  $T$  de  $B$  la flèche  $(T, \lambda) : (T, c_0) \rightarrow (T, c'_0)$  définit une transformation naturelle de  $(T, f)$  vers  $(T, g)$ .

4.3 Les  $B$ -foncteurs et les  $B$ -transformations naturelles vérifient, les équations attendues dans  $B$  :  $\delta'_i f_i = f_0 \delta_i$  pour  $i = 0, 1$ ;  $f_1 \eta = \eta' f_0$ ;  $\mu' f_1 * f_2 = f_1 \mu$ ;  $\delta'_0 \lambda = f_0$ ;  $\delta'_1 \lambda = g_0$ .  
 $\mu'(g_1, \lambda \delta_0) = \mu'(\lambda \delta_1, f_1)$ , avec les notations ci-dessus.

Les définitions de  $B$ -catégories isomorphes, de couple de  $B$ -foncteurs définissant une équivalence entre deux  $B$ -catégories sont claires.

4.4. On définit ainsi une 2-catégorie (la définition précise de 2-catégorie est dans [1], nous la rappelons brièvement en 1.17) que nous noterons  $\text{cat}(B)$ . Pour  $B = \text{IEus}$  on retrouve  $\text{cat}(\text{IE})$ .

4.5 Si  $U: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  est un foncteur commutant aux limites projectives finies,  $f: c \rightarrow c'$  un  $\mathcal{B}$ -foncteur entre  $\mathcal{B}$ -catégories, le couple  $(Uf, Uf_1)$  définit un  $\mathcal{B}'$ -foncteur de  $Uc$  vers  $Uc'$  que nous noterons  $Uf$ ; si  $\lambda: c_0 \rightarrow c'_1$  est une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle du  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f$  vers le  $\mathcal{B}$ -foncteur  $g$ ,  $U\lambda$  est une  $\mathcal{B}'$ -transformation naturelle de  $Uf$  vers  $Ug$ . Il est clair que  $U$  détermine un 2-foncteur de  $\text{cat}(\mathcal{B})$  vers  $\text{cat}(\mathcal{B}')$

### 5 Représentabilité.

5.1. Toute  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  détermine un foncteur  $\mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{cat}(\mathbb{E}u_0)$ , noté  $(\cdot, \mathcal{C})$ , qui associe à tout objet  $T$  de  $\mathcal{B}$  la petite catégorie  $(T, \mathcal{C})$ .

Soit  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{cat}(\mathbb{E}u_0)$  un foncteur. Un couple formé d'une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  et d'un isomorphisme  $\psi: \phi \rightarrow (\cdot, \mathcal{C})$  est appelé représentation de  $\phi$ . Si un tel couple existe  $\phi$  est appelé représentable; la  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  est appelée représentant de  $\phi$ . Deux représentants de  $\phi$  sont isomorphes.

5.2. Commentaire. Les  $\mathcal{B}$ -catégories que nous allons définir dans la suite de ce paragraphe sont construites comme représentants de certains foncteurs  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{cat}(\mathbb{E}u_0)$ ; les  $\mathcal{B}$ -foncteurs et les  $\mathcal{B}$ -transformations naturelles par des procédés analogues.

Notons  $\mathcal{O}_b, \mathcal{F}_b$  les foncteurs  $\text{cat}(\mathbb{E}u_0) \rightarrow \mathbb{E}u_0$  qui associent à une petite catégorie l'ensemble de ses objets, l'ensemble de ses flèches. Le lemme suivant, dont la démonstration détaillée est omise, permettra de simplifier considérablement les calculs, en évitant d'explicitier les flèches  $\partial_0, \partial_1, \eta, \mu$  du représentant (ces flèches sont obtenues à partir des transforma

tion naturelle "source", "but", "unité" entre  $\mathcal{O}b$  et  $\mathcal{F}l$  et de la transformation naturelle définie par la composition, le foncteur de Yoneda étant pleinement fidèle)

6. Lemme de représentabilité.

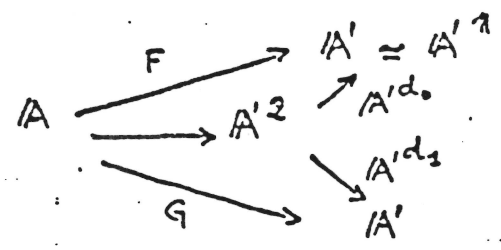
6.1 Première partie. Un foncteur  $\phi: \mathcal{B}^{\mathcal{O}b} \rightarrow \text{cat}(\mathbb{E}us)$  est représentable si, et seulement si, le foncteur composé  $\mathcal{O}b \circ \phi$  et

$\mathcal{F}l \circ \phi$  sont des foncteurs représentables (au sens ordinaire) de  $\mathcal{B}^{\mathcal{O}P}$  dans  $\mathcal{E}ns$ . Des représentants  $B$  de  $\mathcal{O}b \circ \phi$  et  $B'$  de  $\mathcal{F}l \circ \phi$  déterminent de manière unique un représentant  $C$  de  $\phi$  tel que  $C_0 = B, C_1 = B'$ .

6.2. Soient  $\phi, \phi' : \mathcal{B}^{\mathcal{O}P} \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E}ns)$  deux foncteurs représentables,  $(C, \varphi)$  une représentation de  $\phi$  et  $(C', \varphi')$  une représentation de  $\phi'$ . La deuxième partie du lemme s'énonce:  
 L'application  $f \rightarrow \varphi'^{-1}(\cdot, f) \cdot \varphi$  est une bijection de l'ensemble des  $\mathcal{B}$ -foncteurs de  $C$  vers  $C'$  sur l'ensemble de transformations naturels de  $\phi$  vers  $\phi'$ .

6.3. Il faut enfin voir à quoi correspond une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle entre deux  $\mathcal{B}$ -foncteurs de  $C$  vers  $C'$ :

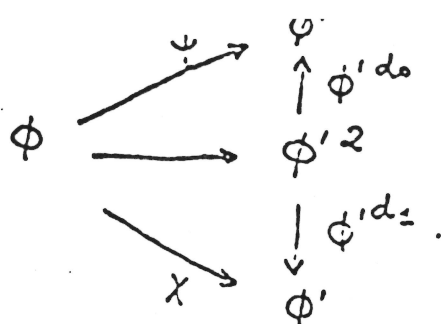
Notons  $\mathcal{I}$  la catégorie  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{I}$  et  $d_0, d_1$  les deux flèches de  $\mathcal{I} = \cdot$  vers  $\mathcal{I}$ ; on sait qu'étant donné deux foncteurs  $F, G : A \rightarrow A'$  dans  $\text{cat}(\mathcal{E}ns)$  une transformation naturelle  $F \rightarrow G$  s'identifie à un foncteur  $A \rightarrow A'^{\mathcal{I}}$  rendant commutatif le diagramme:



Soient alors  $\phi, \phi', C; C', \varphi, \varphi'$  comme ci-dessus. Soient  $\psi, \chi$  deux transformations naturels de  $\phi$  vers  $\phi'$  et  $f, g : C \rightarrow C'$  les  $\mathcal{B}$ -foncteurs correspondants. Une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle  $\lambda$  de  $f$  vers  $g$  détermine une transformation naturelle  $\bar{\lambda} : (\cdot, C) \rightarrow (\cdot, C')^{\mathcal{I}}$

La troisième partie du lemme est:

L'application  $\lambda \rightarrow (\varphi'^{-1})^{\mathcal{I}} \cdot \bar{\lambda} \cdot \varphi$  est une bijection de l'ensemble des  $\mathcal{B}$ -transformations naturelles de  $f$  vers  $g$  sur l'ensemble de transformations naturels  $\phi \rightarrow \phi'^{\mathcal{I}}$  rendant commutatif le diagramme:



7 Duale. La  $\mathbb{B}$ -catégorie duale d'une  $\mathbb{B}$ -catégorie  $c$  se décrit aisément : il suffit d'inverser le rôle de  $d_0$  et  $d_1$ .

On peut aussi appliquer 1.6.1 au foncteur composé

$$\phi = \mathbb{B}^{\text{op}} \xrightarrow{(\cdot, c)} \text{cat}(\mathbb{E}u_0) \xrightarrow{\text{op}} \text{cat}(\mathbb{E}u_1)$$

où  $\text{op}$  est le foncteur covariant qui associe à chaque petite catégorie sa duale : en effet  $c_0$  est un représentant de  $\text{Ob} \circ \phi$  et  $c_1$  un représentant de  $\text{FL} \circ \phi$  ; il existe donc une unique  $\mathbb{B}$ -catégorie, que nous noterons  $c^{\text{op}}$ , telle que  $(c^{\text{op}})_0 = c_0$ ,  $(c^{\text{op}})_1 = c_1$  et telle que pour tout objet  $T$  de  $\mathbb{B}$  on ait  $\phi(T) = (T, c)^{\text{op}} \cong (T, c^{\text{op}})$ .

Soulignons que c'est cette propriété qui permet d'appeler la  $\mathbb{B}$ -catégorie  $c^{\text{op}}$  duale de  $c$ .

### 8. Limites projectives finies dans $\text{cat}(\mathbb{B})$ .

8.1. Soient  $c$  et  $c'$  deux  $\mathbb{B}$ -catégories. Le foncteur composé :  $\phi = \mathbb{B}^{\text{op}} \xrightarrow{((\cdot, c), (\cdot, c'))} \text{cat}(\mathbb{E}u_0) \times \text{cat}(\mathbb{E}u_1) \xrightarrow{\times} \text{cat}(\mathbb{E}u)$ , où  $\times$  note le foncteur produit cartésien, est représentable d'après 1.6.1. par une  $\mathbb{B}$ -catégorie, notée  $c \times c'$ , telle que  $(c \times c')_0 = c_0 \times c'_0$  et  $(c \times c')_1 = c_1 \times c'_1$ , et telle que pour tout objet  $T$  de  $\mathbb{B}$  on ait  $\phi(T) = (T, c) \times (T, c') \cong (T, c \times c')$ . Il est clair que  $c \times c'$  est le produit de  $c$  et de  $c'$  dans  $\text{cat}(\mathbb{B})$ .

8.2. De manière analogue, on montre l'existence d'égalisateurs dans  $\text{cat}(\mathbb{B})$  ;  $1$  étant objet final de  $\text{cat}(\mathbb{B})$ , la catégorie  $\text{cat}(\mathbb{B})$  a des limites projectives finies. En outre, si  $U: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'$  commute aux limites projectives finies, il en est de même du foncteur  $\text{cat}(\mathbb{B}) \rightarrow \text{cat}(\mathbb{B}')$  associé à  $U$ .



9. Construction de  $C^2$  . Soit  $C$  une  $B$ -catégorie.

Le foncteur composé  $\phi = B^{op}(C, C) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} \text{cat}(\mathbb{E}us) \xrightarrow{(\cdot)^2} \text{cat}(\mathbb{E}us)$  est représentable. En effet, on vérifie que  $C_1$  représente  $\text{Ob} \circ \phi$ ; puis on construit un représentant  $A$  de  $\text{Fl} \circ \phi$  de la manière suivante: soient  $p, q$  les flèches définies par:

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times C_1 & \xrightarrow{p} & C_1 \\ \downarrow q & \text{p.f.} & \downarrow \partial_1 \\ C_1 & \xrightarrow{\partial_0} & C_0 \end{array}$$

puis  $p', q'$  les flèches définies par:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p'} & C_1 \times C_1 \\ q' \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow (\partial_1 q, \partial_0 p) \\ C_1 \times C_1 & \xrightarrow{(\partial_1 q, \partial_0 p)} & C_0 \times C_0 \end{array}$$

;  $A$  est obtenue comme égalisateur de  $\mu p', \mu q'$ . L'unique représentant de  $\phi$  dont l'objet des objets est  $C_1$  et l'objet des flèches  $A$  sera noté  $C^2$ ; cette  $B$ -catégorie a été construite comme on fait dans  $\mathbb{E}us$ , mais ici encore, son intérêt est que

$$\phi(T) = (T, C)^2 \simeq (T, C^2)$$

pour tout objet  $T$  de  $B$ ; et même, pour toute  $B$ -catégorie  $C'$  on a:  $\text{cat}(B)(C', C^2) \simeq (\text{cat}(B)(C', C))^2$ . De plus, si  $U: B \rightarrow B'$  commute aux limites projectives finies, on a  $U(C^2) \simeq (UC)^2$ .

10. Construction de  $C^D$ .

10.1. Proposition. Soient  $D = \begin{array}{ccc} & D_1 & \\ d_1 \swarrow & & \searrow d_0 \\ D_0 & & D_0 \end{array}$  un type de diagramme fini (i.e. dans  $\mathbb{E}us_f$ ), et  $C$  une  $B$ -catégorie. Le foncteur composé  $\phi_D = B^{op}(C, C) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} \text{cat}(\mathbb{E}us) \xrightarrow{(\cdot)^D} \text{cat}(\mathbb{E}us)$  est représentable.

10.2 Démonstration. D'abord  $\phi_D$  est représentable pour  $D=1, 2$ , et  $|2|=1+1=2$ . Notons  $j$  l'inclusion  $|2| \rightarrow 2$ ;  $q_f: |2| \rightarrow \coprod_{f \in D} 1$ ,  $q_A: 1 \rightarrow \coprod_{A \in D} 1$ .

les flèches canoniques;  $q: \coprod_{f \in D_1} |2| \longrightarrow \coprod_{A \in D_0} 1$  la flèche unique telle que  $q \circ q_f(i) = q_{d_i(f)}$  pour  $i = 0, 1$ . La limite induite du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{f \in D_1} |2| & \xrightarrow{q} & \coprod_{f \in D_1} 2 \\ q \downarrow & & \\ \coprod_{A \in D_0} 1 & & \end{array}$$

est  $\mathbb{D}$ . Le foncteur  $\Phi_{\mathbb{D}}$ , limite projective finie de foncteurs représentables, et donc représentable. Nous notons  $\mathcal{C}^{\mathbb{D}}$  le représentable de  $\Phi_{\mathbb{D}}$  déterminé par un choix de limites projectives dans  $\mathcal{B}$ .

10.3 D'après 1.6.2, un diagramme  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  entre types de diagrammes finis détermine un  $\mathcal{B}$ -foncteur  $c^f: \mathcal{C}^{\mathbb{D}'} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{D}}$ ; un  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  détermine un  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f^{\mathbb{D}}: \mathcal{C}^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathcal{C}'^{\mathbb{D}}$ ; on a donc obtenu un foncteur qui commute aux limites projectives finies.

$$\begin{array}{ccc} \text{Diag}(\text{Eus}_f)^{\text{op}} = \text{cat } \mathcal{B} & \longrightarrow & \text{cat}(\mathcal{B}) \\ (\mathbb{D}, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\mathbb{D}} \end{array}$$

10.4 On peut aussi vérifier l'isomorphisme:

$$\text{cat}(\mathcal{B})(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\mathbb{D}}) \cong \text{cat}(\text{Eus}_f)(\mathbb{D}, \text{cat}(\mathcal{B})(\mathcal{C}', \mathcal{C}))$$

et pour  $U: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  commutant aux limites projectives finies  $U(\mathcal{C}^{\mathbb{D}}) \cong (U\mathcal{C})^{\mathbb{D}}$

### 11 "Comma-catégorie". $\mathcal{B}$ -foncteurs adjoints

11.1. Soient  $f: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $g: \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}$  deux  $\mathcal{B}$ -foncteurs et notons  $(f, g)$  la  $\mathcal{B}$ -catégorie limite projective du diagramme suivant de  $\text{cat}(\mathcal{B})$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}' & & \mathcal{C}^2 & & \mathcal{C}'' \\ f \searrow & & \swarrow^{c^d_0} & & \swarrow^{c^d_1} \\ & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}^1 & & \mathcal{C} \\ & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & \mathcal{C} \end{array}$$

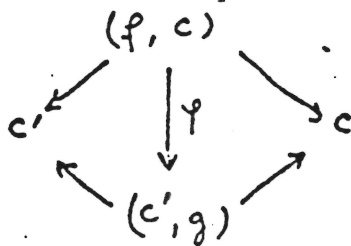
( $d_0, d_1$  comm. 1.6.2). c'est la construction interne de

la comm:  $\varphi$  (f, g). Pour tout objet T de  $\mathcal{B}$  on a  $(T, (f, g)) \cong ((T, f), (T, g))$  et pour toute  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{D}$  la donnée d'un  $\mathcal{B}$ -foncteur de  $\mathcal{D}$  dans  $(f, g)$  équivaut à celle de deux  $\mathcal{B}$ -foncteurs  $\varphi' : \mathcal{D} \rightarrow C'$ ,  $\varphi'' : \mathcal{D} \rightarrow C''$  et d'une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle  $f\varphi' \rightarrow g\varphi''$ , soit plus formellement

$$\text{cat}(\mathcal{B})(\mathcal{D}, (f, g)) \cong \text{cat}(\text{Ens})(\mathcal{D}, f), (\mathcal{D}, g))$$

11.2. Soient  $f : C' \rightarrow C$ ,  $g : C \rightarrow C'$  deux  $\mathcal{B}$ -foncteurs. Le  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f$  sera dit adjoint à gauche du  $\mathcal{B}$ -foncteur  $g$  s'il existe un isomorphisme  $\varphi : (f, C) \rightarrow (C', g)$  rendant commutatif le

diagramme :



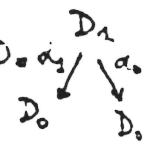
où les quatre flèches autres que  $\varphi$  sont les  $\mathcal{B}$ -foncteurs canoniques. Ceci équivaut à : pour tout objet T de  $\mathcal{B}$ ,  $(T, \varphi)$  définit une

adjonction entre  $(T, f)$  et  $(T, g)$ . on peut donner une définition équivalente avec la transformation naturelle  $f\varphi \rightarrow C, C' \rightarrow g\varphi$  vérifiant les équations habituelles.

12 Limites dans les  $\mathcal{B}$ -catégories. Soit  $\mathcal{D}$  un type de diagramme fini et  $k$  la flèche  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ . Une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  est dite avoir des  $\mathcal{D}$ -limites (resp :  $\mathcal{D}$ -colimites) si le foncteur  $\mathcal{C}^k$  a un adjoint à droite (resp : à gauche), — que nous noterons  $\lim_{\mathcal{D}}$  (resp :  $\lim_{\mathcal{D}}$ ) —, ou de façon équivalente si pour tout objet T de  $\mathcal{B}$  le foncteur  $(T, \mathcal{C})^k$  a un adjoint à droite (resp : à gauche). Une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  est dite à limites projectives (resp : inductives) finies si pour tout type de diagramme  $\mathcal{D}$  fini elle a des  $\mathcal{D}$ -limites (resp :  $\mathcal{D}$ -colimites), ou, de manière équivalente, si  $\mathcal{C}$  a des produits finis et des égalisateurs (resp : des sommes finies et des coégalisateurs) ; on peut aussi remarquer que  $\mathcal{C}$  a des  $\mathcal{D}$ -limites si, et seulement si, la  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}^k$  a des  $\mathcal{D}$ -colimites.

### 13. Catégorie de présentation finie

13.1 Soit  $\mathbb{D}$  un type de diagramme de  $\mathbb{E}$  us,  $\mathbb{D}_0 = d_0 / \mathbb{D}_1 = d_1$



Une flèche  $a$  de  $\mathbb{D}$  est un élément de  $\mathbb{D}_2$ , son origine est  $d_0 a$ , son extrémité  $d_1 a$ ;  $a$  s'identifie à un diagramme  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{D}$ . Un chemin  $c = a_n \dots a_1$  de  $\mathbb{D}$  est une suite finie de flèches de  $\mathbb{D}$  telle que  $d_0 a_{i+1} = d_1 a_i$ ,  $i=1, \dots, n-1$ ; l'origine de  $c$  est  $d_0 a_0$ , son extrémité  $d_1 a_n$ . Une flèche  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{D}$  détermine un foncteur  $C^a: C^{\mathbb{D}} \rightarrow C^{\mathbb{Z}}$  (10.3); un chemin  $c = a_2 a_1$  détermine un foncteur  $f = (C^{a_2}, C^{a_1}): C^{\mathbb{D}} \rightarrow C^{\mathbb{Z}} \times C^{\mathbb{Z}}$  tel que  $f$  factorise par  $C_1 \times C_1$ , donc une flèche  $\bar{c} = \rho f_0: (C^{\mathbb{D}})_0 \rightarrow C_1$ ; ceci se généralise à un chemin quelconque de  $\mathbb{D}$ .

13.2 On appelle équation dans  $\mathbb{D}$  la donnée: soit d'un couple  $(c, c')$  de chemins de  $\mathbb{D}$  de même origine et même extrémité, soit d'un chemin fermé  $c''$  de  $\mathbb{D}$ . Nous notons  $c = c'$ ,  $c'' = id$  les équations dans  $\mathbb{D}$ . Un diagramme  $f: \mathbb{D} \rightarrow A$ ,  $A$  petite catégorie, satisfait l'équation  $c = c'$  si  $f c = f c'$  dans  $A$ ;  $f$  satisfait l'équation  $c'' = id$  si  $f c''$  est une identité dans  $A$ .

13.3 Etant donné un ensemble  $E$  d'équations de  $\mathbb{D}$ , il existe une petite catégorie  $P(\mathbb{D}, E)$  et un diagramme  $\mathbb{D} \rightarrow P(\mathbb{D}, E)$  solution du problème universel évident. Une catégorie  $P$  est dite de présentation finie s'il existe un diagramme fini  $\mathbb{D}$  et un ensemble fini  $E$  d'équations de  $\mathbb{D}$  tels que  $P \simeq P(\mathbb{D}, E)$ .

### 14 Construction de $C^P$

14.1 Proposition. Soit  $P = P(\mathbb{D}, E)$  une catégorie de présentation finie, et  $C$  une B. catégorie. Le foncteur canonique

$$\Phi : \mathcal{B}^{\text{op}}(C) \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{P}}} \text{cat}(\text{Ens}) \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{P}}} \text{cat} \text{Ens}$$

est représentable. Nous notons  $C^{\mathbb{P}}$  un représentant : pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{B}$

$$\text{on a } \Phi(T) = (T, C)^{\mathbb{P}} \cong (T, C^{\mathbb{P}}).$$

14.2 Montrons  $\text{Ob} \circ \Phi$  est représentable par un sous-objet

$A$  de  $(C^{\mathbb{D}})_0$ . Pour chaque équation  $c = c'$  de  $E$  considérons

le diagramme  $(C^{\mathbb{D}})_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{c}} \\ \xrightarrow{\bar{c}'} \end{array} C_1$ , et pour chaque équation  $c'' = \text{id}$

de  $E$  le diagramme  $(C^{\mathbb{D}})_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{c}''} \\ \xrightarrow{\bar{c}''} \end{array} C_1$ . Le représentant  $A$

de  $\text{Ob} \circ \Phi$  est l'intersection des égalisateurs des diagrammes

précédents.

14.3 Etant donné une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $C$  et un monomorphisme

$C'_0 \rightarrow C_0$ , la sous-catégorie pleine  $C'$  de  $C$  ayant  $C'_0$  pour objet de

objets se définit ainsi : l'objet  $C'_1$  de flèches et la flèche

$\partial_0, \partial_1 : C'_1 \rightarrow C'_0$  sont définis par le produit fibré.

$$\begin{array}{ccc} C'_1 & \longrightarrow & C_1 \\ (\partial_0, \partial_1) \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ C'_0 \times C'_0 & \longrightarrow & C_0 \times C_0 \end{array}$$

Pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{B}$ ,  $(T, C')$  est la sous-catégorie pleine de  $(T, C)$  dont l'ensemble des objets est  $(T, C'_0)$ .

La  $\mathcal{B}$ -catégorie  $C^{\mathbb{P}}$  est la sous-catégorie pleine de  $C^{\mathbb{D}}$  telle que  $(C^{\mathbb{P}})_0 = A$ .

Le lecteur se fera un plaisir d'énoncer, (et de vérifier?) des propriétés du genre :

$$(C \times C')^{\mathbb{P}} \cong C^{\mathbb{P}} \times C'^{\mathbb{P}}$$

$$C^{\mathbb{P}} \times Q \cong (C^{\mathbb{P}})^Q$$

$$\text{cat}(\mathcal{B})(C, C'^{\mathbb{P}}) \cong (\text{cat}(\mathcal{B})(C, C'))^{\mathbb{P}}$$

14.5. Soit  $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  un foncteur commutant aux

limites projectives finies ; on a  $(U(C))^{\mathbb{P}} \cong U(C^{\mathbb{P}})$ , puisque la

construction de  $C^{\mathbb{P}}$  n'utilise que de limites projectives finies.

2

14.6 Soit  $D'$  un type de diagramme fini ; si  $C$  a des  $D'$ -limites (resp :  $D'$ -colimites), la  $B$ -catégorie  $C^{\mathbb{P}}$  a des  $D'$ -limites (resp :  $D'$ -colimites). En effet, notons la flèche  $D' \rightarrow 1$  ; si  $C^k$  a un adjoint à droite (resp : à gauche),  $(C^k)^{\mathbb{P}}$  aussi ( puisque  $( )^{\mathbb{P}}$  préserve les limites projectives finies ) et par conséquent  $(C^{\mathbb{P}})^k$  aussi puisque le triangle :

$$\begin{array}{ccc}
 C^{\mathbb{P}} & \xrightarrow{(C^{\mathbb{P}})^k} & (C^{\mathbb{P}})^{D'} \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 (C^k)^{\mathbb{P}} & & (C^{D'})^{\mathbb{P}}
 \end{array}$$

commute.

15. Construction de Iso(C), Mono(C)

15.1 Soit  $C$  une  $B$ -catégorie. Nous nous proposons de construire deux sous-catégories de  $C$  : Iso(C) et Mono(C) ( la seconde seulement quand  $C$  a des limites projectives finies ) telles que, pour tout objet  $T$  de  $B$  on ait :

$$\begin{aligned}
 (T, \text{Iso } C) &\cong \text{Iso}(T, C) \\
 (T, \text{Mono } C) &\cong \text{Mono}(T, C)
 \end{aligned}$$

où Iso(T, C), Mono(T, C) désignent les catégories dont l'ensemble de objets est celui de (T, C) et dont les flèches sont respectivement les isomorphismes, les monomorphismes de (T, C).

Pour cela, nous construisons des sous-catégories pleines de  $C^2$  :  $\underline{Iso}(C)$ ,  $\underline{Mono}(C)$  telle que pour tout objet  $T$  de  $B$  on ait.

$$(T, \underline{Iso}(C)) = \underline{Iso}(T, C)$$

$$(T, \underline{Mono}(C)) = \underline{Mono}(T, C)$$

où  $\underline{Iso}(T, C)$ ,  $\underline{Mono}(T, C)$  sont les sous-catégories pleines de  $(T, C)^2$  dont les objets sont les isomorphismes, les monomorphismes de  $(T, C)$ .

Si  $C$  a des sommes amalgamées, on peut de même construire une B-catégorie  $\underline{Epi}(C)$ ,  $Epi(C)$ .

15.2. Considérons la catégorie à présentation finie  $\underline{Iso}$  définie par le type de diagramme  $\begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{t} \end{array}$  et les équations  $st = id$  ;  $ts = id$  ;  $\underline{Iso}(C)$  et la B-catégorie  $C^{\underline{Iso}}$ .

15.3. Pour construire  $\underline{Mono}(C)$ , notons  $Q = 2 \times 2$  ;  
 $Q_0 = \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot} \\ \downarrow \end{array}$ ,  $Q_1 = \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot} \\ \downarrow \end{array}$  les sous-catégories de  $Q$  ;  
 $i_0: Q_0 \rightarrow Q$ ,  $i_1: Q_1 \rightarrow Q$  les inclusions ;  $v$  (resp:  $\wedge$ ) les diagrammes  $2 \times 2 \rightarrow 2$  tels que  $v(i, j) = 0$  (resp:  $\wedge(i, j) = 1$ ) si, et seulement si,  $i = j = 0$  (resp:  $i = j = 1$ ) ;  $v: Q_0 \rightarrow 2$  et  $\wedge: Q_1 \rightarrow 2$  leurs restrictions. Enfin  $\psi$  le B-foncteur, adjoint à droite de  $C^{\underline{Iso}}$ , correspondant à la transformation naturelle :  
 $(\cdot, C)^{Q_1} \rightarrow (\cdot, C)^Q$  qui associe, pour chaque objet  $T$  de  $B$ , à un diagramme de type  $Q_1$  de  $(T, C)$  son complété par produit fibré (1.11.2 et 1.5).  
 La B-catégorie  $\underline{Mono}(C)$  est la limite projective du diagramme suivant de  $\text{cat}(B)$  :

$$C^2 \xrightarrow{C^\wedge} C^{Q_1} \xrightarrow{\psi} C^Q \xrightarrow{C^v} C^{Q_0}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow C^v \\ C^2 \end{array}$$

Dans le cas  $B = \text{IEus}$ , le composé des flèches horizontales associé à une flèche  $u$  d'une petite catégorie  $A$  le diagramme  $q \downarrow \xrightarrow{P}$  ici que  $q \downarrow \xrightarrow{P} \downarrow u$  soit un carré cartésien, et la flèche verticale  $u$  associée à une flèche  $v$  le diagramme  $v \downarrow \xrightarrow{v}$ ; la limite projective est bien la catégorie des monomorphismes de  $A$ .

15.4. Les catégories  $\text{Iso}(C)$  et  $\text{Mono}(C)$  sont alors définies par  $(\text{Iso}(C))_0 = (\text{Mono}(C))_0 = C_0$  et  $(\text{Iso}(C))_1 = (\underline{\text{Iso}}(C))_0$ ,  $(\text{Mono}(C))_1 = (\underline{\text{Mono}}(C))_0$ . (noter l'analogie avec  $C_1 = (C^2)_0$ .)

### 16 Construction de $C^{\mathcal{E}}$

16.1 Soit  $C$  une catégorie à limites projectives finies. Dans ce numéro nous construisons, étant donnée une théorie algébrique  $\mathcal{E}$  (groupes, catégories...) une  $B$ -catégorie  $C^{\mathcal{E}}$  qui sera la  $B$ -catégorie des structures algébriques de type  $\mathcal{E}$  dans  $C$ .

16.2 Une théorie algébrique  $\mathcal{E}$  est la donnée d'une catégorie de présentation finie  $P$ , d'un ensemble fini  $J$ , et, pour chaque élément  $j$  de  $J$ , d'un type de diagramme  $I_j$  fini, d'un objet  $p_j$  de  $P$ , d'un diagramme  $\varphi_j: I_j \rightarrow P$  et d'une transformation naturelle (cône)  $k_j: p_j \rightarrow \varphi_j$ . L'idée de cette définition est due à Chevalley.

Si  $A$  est une catégorie à limites projectives finies, un modèle de  $\mathcal{E}$  dans  $A$  est un foncteur  $M: P \rightarrow A$  tel que les cônes  $k_j$  soient transformés par  $M$  en une limite projective dans  $A$ . On désigne par  $A^{\mathcal{E}}$  la sous-catégorie pleine de  $A^P$  dont les objets sont les modèles de  $\mathcal{E}$ .

La  $B$ -catégorie  $C^{\mathcal{E}}$  que nous nous proposons de construire sera caractérisée par le fait que pour tout objet  $T$  de  $B$  on a  $(T, C)^{\mathcal{E}} \cong (T, C^{\mathcal{E}})$ .



16.3 Donnons la construction de  $c^{\mathbb{I}}$  quand  $\mathbb{I}$  a un élément le cas général s'en déduira aisément. Notons  $\mathbb{I}, p, \varphi, k$  les données. On appelle cone projectif sur  $\mathbb{I}$ , et on note  $c(\mathbb{I})$  le type de diagramme obtenu en adjoignant à  $\mathbb{I}$  un objet  $s$  dit sommet, et pour tout élément  $i$  de  $\mathbb{I}$ , une flèche  $c_i: s \rightarrow i$ ; notons  $b: \mathbb{I} \rightarrow c(\mathbb{I})$  l'inclusion et  $\bar{\varphi}$  l'extension de  $\varphi$  à  $c(\mathbb{I})$  telle que  $\bar{\varphi}(s) = p$  et  $\bar{\varphi}(c_i) = k_i$ .

Le diagramme suivant commut:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{b} & c(\mathbb{I}) & \xleftarrow{s} & 1 \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} & \swarrow p & \\ & & p & & \end{array}$$

Puisque  $c$  a des limites projectives finies, le  $\mathcal{B}$ -foncteur  $\lim_{\leftarrow \mathbb{I}}: c^{\mathbb{I}} \rightarrow c$  existe. Pour chaque objet  $T$  de  $\mathcal{B}$  on a deux foncteurs de  $(T, c)^{c(\mathbb{I})}$  vers  $(T, c): (T, c)^s$  et  $\lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \circ (T, c)^b$ ; soit  $K: c(\mathbb{I}) \rightarrow (T, c)$ ; la donnée de flèches canoniques  $K(s) \rightarrow \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} K \circ b$  détermine une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle  $\lambda: c^{\mathbb{I}} \rightarrow \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \circ c^b$ .

de  $C^{\mathbb{P}}$  dont l'objet des objets est défini par :

$$\begin{array}{ccc} (C^{\mathbb{E}})_0 & \longrightarrow & (\text{Iso}(C))_1 \\ \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \\ (C^{\mathbb{P}})_0 & \xrightarrow{\lambda} & C_1 \end{array}$$

16.4. Soit  $U: B \rightarrow B'$  un foncteur commutant aux limites projectives finies,  $\mathbb{E}$  une théorie algébrique et  $C$  une  $B$ -catégorie. Si  $C^{\mathbb{E}}$  existe,  $(U(C))^{\mathbb{E}}$  existe aussi et on a :

$$(U(C))^{\mathbb{E}} \simeq U(C^{\mathbb{E}}) \quad (\text{cf } 1.14.5)$$

16.5. Exemple. cas où  $B = \text{Ens}$ . Soit  $\Pi$  le type algébrique de la théorie de groupes, et  $\Pi_3$  la sous-catégorie pleine de  $\Pi$  dont les objets sont  $0, 1, 2, 3$

petite catégorie

Soit  $A$  une

l'utilisation

de trois cônes permet de définir les diagrammes  $F: \Pi_3 \rightarrow A$  tels que les flèches canoniques  $F(i) \rightarrow (F(i))^{i+1}$ ,  $i=0, 2, 3$ , soient des isomorphismes, et on construit ainsi la catégorie de groupes de  $A$ .

Dans le cas où  $B$  est quelconque et  $C$  une  $B$ -catégorie à produits finis, la construction précédente donne la  $B$ -catégorie  $\text{grp}(C)$  des groupes de  $C$ .

16.6 Exemple.  $\mathbb{I} = \emptyset$ ,  $\mathbb{P} = \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{D}$ . Dans le cas où  $B = \text{Ens}$ , étant donné une petite catégorie  $A$  ayant un objet initial,  $A^{\mathbb{E}}$  est la catégorie dont les objets sont les diagrammes

$1 \rightarrow A \mathbb{D}$  de  $A$ . Dans le cas général, on dira qu'une

$B$ -catégorie  $C$  satisfait l'axiome de l'infini si la  $B$ -

catégorie  $C^{\mathbb{E}}$  a un objet initial. Il est clair que même dans le cas où  $B = \text{Ens}$ , cet axiome n'a d'intérêt qu'en présence d'autres axiomes.

## 17. La 2. catégorie cat(B).

Les constructions faits sur les B. catégories, ainsi que celles que nous verrons dans le cas des catégories fibrées rentrent dans le cadre général de bicatégories que nous allons brièvement ébaucher. Par contre, la notion de B. catégorie cartésienne fermée (cf 1.10) suppose plus de structure, ce qui motivera l'introduction de distributeurs en 1.18.

17.1 La définition détaillée de bicatégorie est dans [ ]

Rappelons brièvement qu'une bicatégorie  $\underline{S}$  est la donnée d'une classe dont les éléments sont appelés objets de  $\underline{S}$ ; pour tout couple  $(A, A')$  d'objets de  $\underline{S}$ , d'une catégorie  $\underline{S}(A, A')$  dont les objets sont appelés flèches de  $\underline{S}$  et les flèches 2. cellules; pour tout triplet d'objets  $(A, A', A'')$  d'un "foncteur de composition":  
$$c(A, A', A'') : \underline{S}(A, A') \times \underline{S}(A', A'') \rightarrow \underline{S}(A, A'')$$
; pour tout objet  $A$  d'une flèche notée  $1_A$  de  $\underline{S}(A, A)$  appelée flèche identité sur  $A$ ; enfin d'isomorphismes naturels permettant d'écrire l'associativité du foncteur de composition et les propriétés des flèches identiques, vérifiant des conditions de cohérence que nous ne récrivons pas ici. Dans la suite du texte, nous omettons souvent les isomorphismes d'associativité et d'unité.

Si les isomorphismes précédents sont des identités la bicatégorie est appelée 2-catégorie. Dans ce cas les objets et les flèches, avec leur loi de composition, constituent une catégorie que nous noterons  $S$ .

Etant donné deux objets  $A, A'$  de  $\underline{S}$  et une 2-cellule  $\alpha$  de  $\underline{S}$  vers  $g$  dans  $\underline{S}(A, A')$ , nous écrivons :

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{\alpha} \\ \downarrow g \end{array} A'$$

17.2 Exemple :  $\text{cat}(\mathcal{B})$  est une 2-catégorie dont les objets sont les  $\mathcal{B}$ -catégories, les flèches les  $\mathcal{B}$ -foncteurs, les 2-cellules les  $\mathcal{B}$ -transformations naturelles.

17.3 Exemple :  $\text{Pon}(\mathcal{B})$  est une bicatégorie dont les objets sont ceux de  $\mathcal{B}$  ; si  $I$  et  $J$  sont deux objets de  $\mathcal{B}$ ,  $\text{Pon}(\mathcal{B})(I, J)$  a été défini en 1.1. Le foncteur de composition est le foncteur  $*$  défini en 1.1.

2. La 2-catégorie est  $(B)$  a une "supplémentaire" structure: par exemple on peut calculer une limite projective finie de B-catégories, ou, étant donné une B-catégorie  $C$ , on peut <sup>construire</sup> définir des B-catégories  $C^2, C^P, C^E$ . Ces notions peuvent se définir en terme de bicatégorie; indiquons comment soit  $\underline{S}$  une bicatégorie:

17.5  $\underline{S}$  a des produits si pour tout couple d'objets  $A, A'$  de  $\underline{S}$  il existe un objet  $A \times A'$  et deux flèches  $p_A: A \times A' \rightarrow A, p_{A'}: A \times A' \rightarrow A'$  vérifiant la propriété universelle suivante: pour tout objet  $B$  de  $\underline{S}$  et foncteurs de composition avec  $p_A$  et  $p_{A'}$  définissent un isomorphisme de catégories:

$$\underline{S}(B, A \times A') \cong \underline{S}(B, A) \times \underline{S}(B, A')$$

on définit de même les limites projectives finies dans  $\underline{S}$ .

17.6.  $\underline{S}$  a une exponentiation par 2 si pour tout objet  $A$  de  $\underline{S}$  il existe un objet  $A^2$  de  $\underline{S}$ , deux flèches  $A^{d_0}, A^{d_1}: A^2 \rightarrow A$  et une 2-cellule  $A^{d_0} \Rightarrow A^{d_1}$  tels que, pour tout objet  $T$  de  $B$ , ces données définissent un isomorphisme de catégories:  $\underline{S}(B, A^2) \cong \underline{S}(B, A)^E$

17.7. Soient  $A, A'$  deux objets de  $\underline{S}$ ,  $f: A \rightarrow A', g: A' \rightarrow A$  deux flèches de  $\underline{S}$ . On dira que  $f$  est adjoint à gauche de  $g$  s'il existe des deux cellules  $\eta: 1_A \Rightarrow g f, \varepsilon: f g \Rightarrow 1_{A'}$  vérifiant les égalités habituelles, aux isomorphismes de structure près:

$$\begin{array}{ccc} \cong & 1_A g \xrightarrow{\eta g} & (g f) g \\ \cong & \parallel & \parallel \\ \cong & g 1_{A'} \xleftarrow{g \varepsilon} & g (f g) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \cong & 1_{A'} f \xleftarrow{\varepsilon f} & (f g) f \\ \cong & \parallel & \parallel \\ \cong & f 1_A \xrightarrow{f \eta} & f (g f) \end{array}$$

17.8. on vérifie que si  $\underline{S}$  est à limites projectives finies et a une exponentiation par 2, on peut définir en termes de bicatégorie les notions suivantes:  $A^D$  ( $D$  type de diagramme fini), objet de  $\underline{S}$  ayant des limites inductives, ou projectives, finies;  $A^P$  pour  $P$  catégorie de présentation finie;  $A^E$  pour  $E$  théorie algébrique (cf 1.12 à 1.16)

13. B. distributeurs.

Afin de faciliter la compréhension, rappelons d'abord ce qu'est la notion de distributeur dans le cas  $\mathbb{B} = \mathbb{E}us$ ; on pourra aussi consulter : [ ].

13.1. Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{A}'$  deux petites catégories. Un distributeur  $\phi$  de  $\mathbb{A}$  vers  $\mathbb{A}'$ , noté  $\phi: \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{A}'$ , et un foncteur  $\phi: \mathbb{A}'^{op} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}us$ . Un distributeur  $\phi: \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{A}'$  peut donc être vu comme un foncteur  $\mathbb{A} \rightarrow \hat{\mathbb{A}'}$  et généralise en un certain sens (cf [ ]) la notion de foncteur  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ .

13.2. Exemples. Soit  $F$  un foncteur  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ . On définit un distributeur  $\phi_F: \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{A}'$  et un distributeur  $\phi^F: \mathbb{A}' \dashrightarrow \mathbb{A}$  en posant :

$$\phi_F = \mathbb{A}'(\cdot, F \cdot) \quad \phi^F = \mathbb{A}'(F \cdot, \cdot).$$

13.3. Soit  $\phi: \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{A}'$  un distributeur. La donnée de  $\phi$  équivaut aux données suivantes :

- pour tout objet  $A'$  de  $\mathbb{A}'$  et tout objet  $A$  de  $\mathbb{A}$  d'un ensemble  $\phi(A', A)$ ,
- pour toute flèche  $u': A'_2 \rightarrow A'_1$  de  $\mathbb{A}'$  et tout objet  $A$  de  $\mathbb{A}$  d'une flèche  $\phi(u', A): \phi(A'_2, A) \rightarrow \phi(A'_1, A)$ ,
- pour tout objet  $A'$  de  $\mathbb{A}'$  et toute flèche  $u: A_3 \rightarrow A_2$  de  $\mathbb{A}$  d'une flèche  $\phi(A', u): \phi(A', A_3) \rightarrow \phi(A', A_2)$ ,

ces données satisfaisant les conditions :

$$\phi(\text{id } A', A) = \phi(A', \text{id } A) = \text{id } \phi(A', A)$$

$$\phi(v' u', A) = \phi(u', A) \phi(v', A)$$

$$\phi(A', v u) = \phi(A', v) \phi(A', u)$$

$$\phi(u', A_3) \phi(A'_2, u) = \phi(A'_2, u) \phi(u', A_1)$$

pour tout  $A, A'$ ,  $u: A_1 \rightarrow A_2$ ,

$v: A_2 \rightarrow A_3$ ,  $u': A'_3 \rightarrow A'_2$ ,  $v': A'_2 \rightarrow A'_3$ .

18.4. Rappelons maintenant qu'étant donné une bicatégorie  $\underline{\mathcal{C}}$  et un objet  $A$  de  $\underline{\mathcal{C}}$ , une triple sur  $A$  est un triplet  $T = (T, \eta, \mu)$  formé d'une flèche  $T: A \rightarrow A$  et de deux 2-cellules  $\eta: 1_A \Rightarrow T$  et  $\mu: TT \Rightarrow T$  telles que les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc}
 T(TT) \cong (TT)T \xrightarrow{\mu T} TT & & 1_A T \xrightarrow{\eta T} TT \xleftarrow{T\eta} T1_A \\
 \mu T \downarrow & & \swarrow \sim \quad \downarrow \mu \quad \searrow \sim \\
 TT & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}$$

commutent.

18.5. Exemple: Dans  $\text{Pon}(\mathbb{B})$  un objet  $C_0$  muni d'une triple  $T$  est une  $\mathbb{B}$ -catégorie ( $T$ , flèche de  $C_0$  vers  $C_0$  dans  $\text{Pon}(\mathbb{B})$  est un pont  $(\delta_1^{C_1}, \delta_0^{C_0})$ ).

18.6 Bimodules Soient  $A$  et  $A'$  deux objets d'une bicatégorie  $\underline{\mathcal{C}}$ , munis respectivement de triples  $T, T'$ . Un  $T$ - $T'$ -bimodule  $\phi$  de  $A$  vers  $A'$  est un triplet  $\phi = (\phi, m, m')$  où  $\phi: A' \rightarrow A$  est une flèche (attention au sens de la flèche  $\phi$ ),  $m: T\phi \Rightarrow \phi$ ,  $m': \phi T' \Rightarrow \phi$  deux 2-cellules vérifiant les axiomes:

$$\begin{array}{ccc}
 (TT)\phi \cong T(T\phi) \xrightarrow{Tm} T\phi & & \phi(TT') \cong (\phi T')T' \xrightarrow{m'T'} \phi T' \\
 \mu\phi \downarrow & & \downarrow \phi\mu' \\
 T\phi \xrightarrow{m} \phi & & \phi T' \xrightarrow{m'} \phi \\
 1_A \phi \xrightarrow{\eta\phi} T\phi & & \phi T' \xleftarrow{\phi\eta'} \phi 1_{A'} \\
 \swarrow \sim & & \downarrow m' \quad \searrow \sim \\
 & & \phi
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 (T\phi)T' \cong T(\phi T') \xrightarrow{Tm'} T\phi & & \\
 mT' \downarrow & & \downarrow m \\
 \phi T' \xrightarrow{m'} \phi & &
 \end{array}$$

18.7 Définition : Soient  $C$  et  $C'$  deux  $B$ -catégories.

Un  $C, C'$  bimodule  $\phi \in \text{Pon}(B)$  est appelé  $B$ -distributeur de  $C$  vers  $C'$  et noté  $\phi: C \dashrightarrow C'$ ;  $\phi$  est donc un pont de  $C'$  vers  $C_0$  :

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ \delta_1 \swarrow & & \searrow \delta_0 \\ C_0 & & C'_0 \end{array}$$

et  $m: C * \phi \rightarrow \phi$ ,  $m': \phi * C' \rightarrow \phi$  sont des flèches de  $\text{Pon}(B)(C'_0, C_0)$ .

18.8. Exemple. Quand  $B = \text{Eus}$ , si  $A$  et  $A'$  sont deux petits catégories, un  $\text{Eus}$ -distributeur  $\phi$  défini par un pont

$$\begin{array}{ccc} \delta_1 \swarrow & \phi & \searrow \delta_0 \\ \text{Ob}(A) & & \text{Ob}(A') \end{array}$$

est un distributeur au sens de 1.18.1; en effet, pour chaque objet  $A'$  de  $A'$  et chaque objet  $A$  de  $A$  on définit  $(\delta_0, \delta_1)^{-1}(A', A) \dots$  et ces données satisfont aux conditions de 1.18.3.

18.9 Proposition. Soient  $C$  et  $C'$  deux  $B$ -catégories.

Un triplet  $\phi = (\phi, m, m')$ , où  $\phi$  est un pont  $\begin{array}{ccc} \delta_1 \swarrow & \phi & \searrow \delta_0 \\ & C & C' \end{array}$  et  $m: C * \phi \rightarrow \phi$ ,  $m': \phi * C' \rightarrow \phi$  des flèches de  $\text{Pon}(B)(C'_0, C_0)$ , et un  $B$ -distributeur  $\pi$ , et seulement si, pour tout objet  $T$  de  $B$   $((T, \phi), (T, m), (T, m'))$  est un distributeur  $(T, C) \dashrightarrow (T, C')$ .

18.10. Soit  $f: C \rightarrow C'$  un  $B$ -foncteur. On définit deux  $B$ -distributeurs  $\phi_f: C \dashrightarrow C'$ ,  $\phi^f: C' \dashrightarrow C$  tels que, pour tout objet  $T$  de  $B$  on ait  $(T, \phi_f) = (T, \phi)_{(T, f)}$  et  $(T, \phi^f) = (T, \phi)^{(T, f)}$  (cf 1.13.2). Les ponts  $\phi_f$  et  $\phi^f$  sont définis par:

$$\begin{array}{ccc} \phi_f \longrightarrow C'_2 & & \phi^f \longrightarrow C'_2 \\ \downarrow (\delta_0, \delta_1) & \text{Rf.} & \downarrow (\delta_0, \delta_1) \\ C_0 * C_0 \xrightarrow{C_0 * f_0} C_0 * C'_0 & & C_0 * C'_0 \xrightarrow{f_0 * C'_0} C'_0 * C'_0 \end{array}$$

18.11 Représentabilité. Soient  $\phi, \phi': A, A'$  deux petits catégories, et  $\phi, \phi': A' \text{ op. } \times A \rightarrow \text{Eus}$  deux distributeurs; une flèche de  $\phi$  vers  $\phi'$  et une transformation naturelle.



La définition de distributeur isomorphe est donc claire.

Un distributeur  $\phi : A \dashrightarrow A'$ , défini par un pont

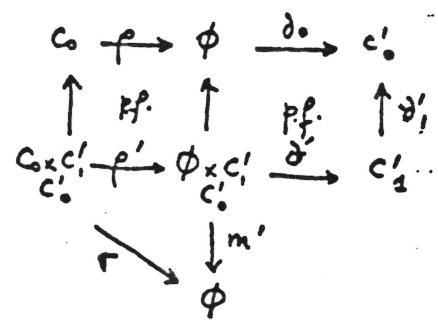
$\begin{array}{ccc} \text{Ob } A & \xrightarrow{\phi} & \text{Ob } A' \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_0 \end{array}$ , et représentable s'il existe un foncteur  $F : A \rightarrow A'$  et un isomorphisme de distributeur  $\gamma : \phi_F \rightarrow \phi$ . Pour tout objet

$A'$  de  $A'$  et tout objet  $A$  de  $A$  on a un isomorphisme  $\varphi_{A',A} : A' (A', FA) \rightarrow \phi(A', A)$ ; pour  $\rho_A = \varphi_{FA,A} (\text{id } FA)$ . La donnée de  $\rho_A$  va permettre de donner une condition suffisante de représentabilité dans le cas interne.

18.12.

Soient  $C$  et  $C'$  deux  $B$ -catégories;

un  $B$ -distributeur  $\phi : C \dashrightarrow C'$  sera dit représentable s'il existe une flèche  $\rho : C_0 \rightarrow \phi$  telle que  $\partial_1 \rho = \text{id } C_0$  et telle que la flèche  $\sigma = m' \rho'$  du diagramme:

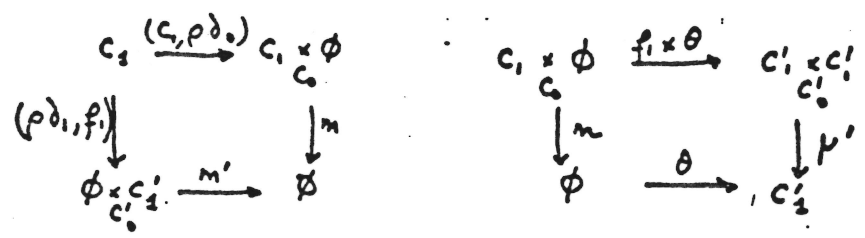


soit un isomorphisme; la flèche  $\rho$  sera appelée représentation de  $\phi$

La seconde condition correspond, dans  $\text{Kus}$ , à l'isomorphisme entre  $\phi(A', A)$  et le couple  $(A, A' \xrightarrow{u} FA)$  donné par la formule  $\varphi_{A',A}(u) = \phi(u, A) \rho_A$ .

18.13 Proposition. Soient  $C$  et  $C'$  deux  $B$ -catégories,

$\phi : C \dashrightarrow C'$  un  $B$ -distributeur,  $\rho : C_0 \rightarrow \phi$  une représentation de  $\phi$ . Il existe un  $B$ -foncteur unique  $f : C \rightarrow C'$  tel que  $\partial_0 \rho = f$  et tel que le diagramme:



commutent ( $\theta$  désigne la flèche  $\partial' \rho' \sigma^{-1}$ ).

Dans  $\text{Kus}$  ces conditions expriment respectivement:

Noter que

$$\phi(Fu, A_2) \rho_{A_2} = \phi(FA_1, u) \rho_{A_1}$$

$$Fu \varphi_{A',A_1} = \varphi_{A',A_2} \phi(A', u) \text{ pour } u : A_1 \rightarrow A_2$$

## 19. B. catégories cartésiennes fermées.

La définition interne de catégorie cartésienne fermée utilise les distributeurs. En effet, bien que l'on puisse définir la notion de flèches adjointes dans une 2-catégorie, l'exponentiation n'est pas l'adjoint à droite du produit cartésien; on s'en convainc en notant que  $(A, B) \rightarrow B^A$  et  $(A, B) \rightarrow A \times B$  sont des foncteurs  $A^{\text{op}} \times A \rightarrow A$  et  $A \times A \rightarrow A$  respectivement dans une catégorie cartésienne fermée  $A$ . La phrase: "pour tout objet  $A$  de  $A$  le foncteur  $A \times \_$  a un adjoint à droite" n'a plus de sens non plus quand  $A$  est remplacé par une  $B$ -catégorie laquelle n'a pas d'objets.

Soit  $C$  une  $B$ -catégorie avec produits, et notons  $p: C \times C \rightarrow C$  le  $B$ -foncteur adjoint à droite du foncteur diagonal  $C \rightarrow C \times C$ . Le  $B$ -distributeur  $\Phi^p: C \times C \rightarrow C$  définit

un pont  $(d_1, d_2) \xrightarrow{\Phi^p} C$  ; on vérifie que

le pont  $(d_1, d_2) \xrightarrow{\Phi^p} C$  définit un  $B$ -distributeur  $\phi: C \rightarrow C^{\text{op}} \times C$ .

La  $B$ -catégorie  $C$  est dite cartésienne fermée si le  $B$ -distributeur  $\phi$  est représentable par un  $B$ -foncteur  $C^{\text{op}} \times C \rightarrow C$ . Vérifier que c'est la bonne définition dans le cas  $B = \text{Ens}$  est facile.

## 20 Remarques finales.

Nous avons vu qu'il suffisait, jusqu'à présent, de supposer que l'univers de référence  $B$  était une catégorie à limites projectives finies pour pouvoir faire bien des constructions de la théorie des catégories. Il y a beaucoup d'autres possibilités que nous n'utiliserons pas dans la suite. Mentionnons, à titre d'exemple:

20.1. Une B. catégorie multiplicative est un sextuplet formé d'une B. catégorie  $C$ , d'un B. foncteur  $\otimes: C \times C \rightarrow C$  d'une flèche  $1 \xrightarrow{I} c_0$  et d'isomorphismes d'associativité et d'unité vérifiant les conditions écrites dans [ ] .

20.2 Soit  $C = (C, \otimes, I, \dots)$  une B. catégorie multiplicative. Une B. catégorie relative à  $C$  est un quadruplet  $(c'_0, h, m, n)$  où  $c'_0$  est un objet de  $B$ ,  $h: c'_0 \times c'_0 \rightarrow c'_0$

$$m: c'_0 \times c'_0 \times c'_0 \rightarrow c_1, \quad n: c'_0 \rightarrow c_2$$

de flèches de  $B$  telles que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 c'_0 \times c'_0 & \xrightarrow{h} & c_0 & & 1 \xrightarrow{I} c_0 \\
 \uparrow p_2 & & \uparrow d_1 & & \uparrow & \uparrow d_0 \\
 c'_0 \times c'_0 \times c'_0 & \xrightarrow{m} & c_2 & \xrightarrow{d_1} & c_0 & c'_0 \xrightarrow{n} c_1 \\
 p_3 = p_2 \downarrow & & \uparrow \otimes & & (c'_0, c'_0) \downarrow d_1 \\
 (c'_0 \times c'_0) \times (c'_0 \times c'_0) & \xrightarrow{h \times h} & c_0 \times c_0 & & c'_0 \times c'_0 \xrightarrow{h} c_0
 \end{array}$$

commutent, et vérifiant en outre les conditions de [ ] p 45, 46.

20.3 Notons, par contre, que si  $C$  et  $D$  sont deux B. catégories, il n'est pas possible de définir  $C^D$  avec la seule hypothèse que  $B$  est à limites projectives finies: il faudrait aussi supposer que les foncteurs  $\prod_f$  adjoint à droite des changements de base existent dans  $B$ . Cette situation sera clarifiée au paragraphe suivant.

## Paragraphe 2. Catégories fibrées

La condition B a des limites projectives finies n'est souvent pas nécessaire dans les définitions et résultats énoncés.

Pour compléter les nombreux rappels, le lecteur pourra consulter [ ] ou [ ] ou [ ]

### 1 Catégories fibrées.

Plusieurs exemples ont été rassemblés en 2.2.

1.1. Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  une catégorie non nécessairement petite, et soit  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  un foncteur. On dit qu'une flèche  $\varphi$  de  $\mathbb{E}$ , un objet  $X$  de  $\mathbb{E}$  sont au-dessus d'une flèche  $u$  de  $\mathbb{B}$ , d'un objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  si  $p\varphi = u$ ,  $pX = I$  respectivement. Pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$ , on définit la sous-catégorie de  $\mathbb{E}$ , notée  $\mathbb{E}(I)$  et appelée fibre au-dessus de  $I$ , des objets au-dessus de  $I$  et des flèches au-dessus de  $\text{id}_I$ .

1.2. Une flèche  $\varphi: Y \rightarrow X$  de  $\mathbb{E}$  est cartésienne au-dessus d'une flèche  $u$  de  $\mathbb{B}$  si  $\varphi$  est au-dessus de  $u$  et si, pour toute flèche  $\psi: Z \rightarrow X$  au-dessus de  $u$ , il existe une flèche unique  $\chi: Z \rightarrow Y$  au-dessus de  $\text{id}_Y$  telle que  $\varphi\chi = \psi$ .

1.3. Une flèche  $\varphi: Y \rightarrow X$  de  $\mathbb{E}$  est hypercartésienne au-dessus d'une flèche  $u$  de  $\mathbb{B}$  si  $\varphi$  est au-dessus de  $u$  et si, pour toute flèche  $\psi: Z \rightarrow X$  de  $\mathbb{E}$  telle qu'il existe une flèche  $v$  de  $\mathbb{B}$  telle que  $p\psi = uv$ , il existe une flèche unique  $\chi: Z \rightarrow Y$  au-dessus de  $v$  vérifiant  $\varphi\chi = \psi$ .

Une flèche hypercartésienne est cartésienne

1.4. Un foncteur  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  est dit fibrant si pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}$  et toute flèche  $u$  de but  $pX$  de  $\mathbb{B}$  il existe une flèche hypercartésienne de but  $X$  au-dessus de  $u$ .

De manière équivalente,  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  est fibrant si pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}$  et toute flèche  $u$  de but  $pX$  de  $\mathbb{B}$ , il existe une flèche cartésienne de but  $X$  au-dessus de  $u$  et si les composés de flèches cartésiennes sont cartésiens.

On omettra parfois le foncteur  $p$  et on dira que la catégorie  $\mathbb{E}$  est fibrée sur  $\mathbb{B}$ .

1.5 Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  une catégorie fibrée,  $u: I \rightarrow J$  une flèche de  $\mathbb{B}$ , et  $X$  un objet de  $\mathbb{E}(J)$ . Une flèche cartésienne de but  $X$  au-dessus de  $u$  est définie à isomorphisme près. La donnée, pour chaque objet  $X$  de  $\mathbb{E}(J)$  d'une flèche cartésienne  $u^*X \rightarrow X$  détermine un foncteur noté  $u^*: \mathbb{E}(J) \rightarrow \mathbb{E}(I)$  appelé image réciproque par  $u$ : si  $\psi: X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathbb{E}(J)$ ,  $u^*\psi: u^*X \rightarrow u^*Y$  est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} u^*X & \longrightarrow & X \\ u^*\psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ u^*Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches cartésiennes choisies.

Dans notre texte nous supposerons avoir choisi des images réciproques pour toute flèche de  $\mathbb{B}$ , tels que pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  on ait  $\text{id}_I^* = \text{id}_{\mathbb{E}(I)}$ .

1.5 Une catégorie cofibrée est un triple  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  tel que le foncteur  $p^{op}: \mathbb{E}^{op} \rightarrow \mathbb{B}^{op}$  soit fibrant. Une flèche de  $\mathbb{E}$  est cocartésienne si la flèche correspondante de  $\mathbb{E}^{op}$  est cartésienne; la propriété universelle est facile à voir.

Pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$ , <sup>on note</sup> pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}(I)$   $X \rightarrow u_* X$  la flèche cocartésienne de source  $X$  au-dessus de  $u$  ;  
 La donnée, pour chaque objet  $X$  de  $\mathbb{E}(I)$  d'une flèche cocartésienne de source  $X$  au-dessus de  $u$ , détermine un foncteur, noté  $u_*$ , de la fibre  $\mathbb{E}(I)$  vers la fibre  $\mathbb{E}(J)$ , qu'on appellera image directe par  $u$ .

1.7 Il est facile de vérifier que le composé de deux foncteurs fibrants est fibrant et que si le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}' & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ p' \downarrow & p.f. & \downarrow p \\ \mathbb{B}' & \xrightarrow{U} & \mathbb{B} \end{array}$$

est un produit fibré, si  $p$  est fibrant alors  $p'$  est fibrant.

1.8 Foncteurs cartésiens

1.8.1 Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{p'} \mathbb{B}$  deux catégories fibrées.  
 Un foncteur  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  au-dessus de  $\mathbb{B}$  qui transforme une flèche (co)cartésienne en une flèche (co)cartésienne et appelé foncteur (co)cartésien de la première catégorie fibrée vers la seconde.

1.8.2. On définit ainsi une catégorie Cart<sub>B</sub>(E, E') (le  $\mathbb{B}$ , le  $p$ , le  $p'$  sont finiralement ouïs) dont les objets sont les foncteurs cartésiens de  $\mathbb{E}$  vers  $\mathbb{E}'$  et les flèches les transformations naturelles au-dessus de  $\mathbb{B}$ .

on note  $\text{Fib}(\mathbb{B})$  la 2. catégorie dont les objets sont les catégories fibrées au-dessus de  $\mathbb{B}$ , et telle que  $\text{Fib}(\mathbb{B})(\mathbb{E}, \mathbb{E}') = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ .

1.8.3 Soient  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $p': \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{B}$  deux catégories fibrées,  $F$  et  $G: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  deux foncteurs cartésiens,  $\Lambda: F \rightarrow G$  une transformation naturelle au-dessus de  $\mathbb{B}$ : pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de  $\mathbb{B}$  on a

$F u^* X \xrightarrow{u^* F} u^* F X$  et  $\Lambda u^* X \xrightarrow{u^* \Lambda} u^* \Lambda X$ . les flèches canoniques  $u^* F X \rightarrow u^* G X$ ,  $u^* F X \rightarrow u^* G X$  sont des isomorphismes reliant commutatif à diagramme:

$$\begin{array}{ccc} u^* F X & \xrightarrow{u^* F} & u^* G X \\ \downarrow \Lambda u^* & & \downarrow u^* \Lambda \\ F u^* X & \xrightarrow{u^* \Lambda} & G u^* X \end{array}$$

1.8.4 Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{P} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{P'} \mathbb{B}$  deux catégories fibrées. Un couple de foncteurs cartésiens  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ ,  $G: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$  adjoints au-dessus de  $\mathbb{B}$  est appelé couple de foncteurs adjoints entre les deux catégories fibrées. Il est équivalent de demander que pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  les foncteurs  $F(I): \mathbb{E}(I) \rightarrow \mathbb{E}'(I)$ ,  $G(I): \mathbb{E}'(I) \rightarrow \mathbb{E}(I)$  soient adjoints et que les transformations naturelles d'adjonction commutent aux images réciproques.

Une équivalence de catégories fibrées  $\mathbb{E} \xrightarrow{P} \mathbb{B}$ ,  $\mathbb{E}' \xrightarrow{P'} \mathbb{B}$  est un couple de foncteurs cartésiens définissant une équivalence entre  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  au-dessus de  $\mathbb{B}$ .

1.8.5. Proposition: Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{P} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{P'} \mathbb{B}$  deux catégories fibrées et  $F$  un foncteur cartésien:  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ ;

$F$  est fidèle (resp: plein, resp: pleinement fidèle) si, et seulement si, pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$   $F(I)$  est fidèle (resp: plein, resp: pleinement fidèle) (cf 2.5.1)

Vérifions, par exemple, que si  $F$  restreint à  $\mathbb{E}(I)$  est fidèle pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$ ,  $F$  est fidèle: soient  $\varphi, \varphi': X \rightarrow Y$  deux flèches de  $\mathbb{E}$  tels que  $F\varphi = F\varphi'$ ; posons  $u = \beta\varphi = \beta\varphi': I \rightarrow J$ , et soit  $\psi: u^*Y \rightarrow Y$  une flèche cartésienne; il existe deux flèches  $\chi, \chi'$  de  $\mathbb{E}(I)$  tels que  $\psi\chi = \varphi$ ,  $\psi\chi' = \varphi'$ ; d'autre part  $F\psi$  est cartésien et il existe une flèche  $\sigma$  unique de  $\mathbb{E}'(I)$  telle que  $F\psi \circ \sigma = F\varphi = F\varphi'$ ; donc on a  $F\chi = F\chi' = \sigma$ , et la fidélité de  $F$  sur les fibres implique  $\chi = \chi'$ , d'où  $\varphi = \varphi'$ .

## 2. Quelques exemples

2.1. Le foncteur d'oubli de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des ensembles est fibrant.

2.2. Le foncteur identique  $\mathbb{B} = \mathbb{B}$  est fibrant.

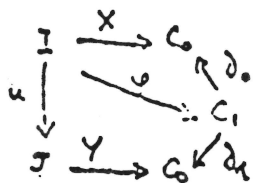
2.3 Le foncteur but  $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$  ainsi que sa restriction aux monomorphismes de  $\mathbb{B}$  sont fibrants (les images réciproques sont définies par produit fibre). Nous notons  $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{B}$  et  $\text{Mono}(\mathbb{B}) \xrightarrow{\Omega} \mathbb{B}$  ces catégories fibrées. Le foncteur but  $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{B}$  est également cofibrant (les images directes sont définies par composition)

2.4 Pour toute catégorie  $A$  le foncteur  $A \rightarrow \mathbb{1}$  est fibrant

## 3. Catégories fibrées associées à une $\mathbb{B}$ -catégorie.

3.1 Soit  $C$  une  $\mathbb{B}$ -catégorie. On définit une catégorie fibrée, notée  $\mathbb{B}(C) \xrightarrow{C} \mathbb{B}$ , de la manière suivante : les objets de la fibre  $\mathbb{B}(C)(I)$  sont les flèches  $I \rightarrow C_0$  de  $\mathbb{B}$  ; une flèche de l'objet  $x$  de  $\mathbb{B}(C)(I)$  vers l'objet  $y$  de  $\mathbb{B}(C)(J)$  est un couple  $(u, \varphi)$  où  $u: I \rightarrow J$ ,  $\varphi: I \rightarrow C_1$  sont des flèches de  $\mathbb{B}$  rendant commutatif le diagramme :





; le composé d'une flèche  $(u, \varphi): X \rightarrow Y$  et d'une flèche  $(v, \psi): Y \rightarrow Z$  est la flèche  $(vu, \psi \circ \varphi)$ ; le foncteur  $c: \mathcal{B}(C) \rightarrow \mathcal{B}$  est défini par  $c(I \xrightarrow{X} C_0) = I$ ,  $c(u, \varphi) = u$ ; la flèche cartésienne  $u^*Y \rightarrow Y$  que nous choisirons est  $\eta \gamma u: Y_u \rightarrow Y$  ( $\eta$  et  $\gamma$  sont les mêmes flèches qu'en 1.3.1.)

3.2 Cette catégorie fibrée donne toute l'information sur la  $\mathcal{B}$ -catégorie  $C$ : sur  $C_0$  par la fibre  $\mathcal{B}(C)(C_0)$ , sur  $C_1$  par la fibre  $\mathcal{B}(C)(C_1)$ , etc...

3.3. Dans le cas où  $\mathcal{B} = \text{Ens}$ , si  $A$  est une petite catégorie  $\text{Ens}(A)(I)$  a pour objets les familles d'objets de  $A$  indexés par  $I$ , et une flèche  $(X_i)_{i \in I} \rightarrow (Y_j)_{j \in J}$  est la donnée d'une flèche  $u: I \rightarrow J$  et d'une famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de flèches  $\varphi_i: X_i \rightarrow Y_{u(i)}$ ; la flèche cartésienne  $u^*Y \rightarrow Y$  est la famille  $(\text{id}_{Y_{u(i)}})_{i \in I}$ .

3.4. Si  $A$  est une petite catégorie ayant un ensemble d'objets ou de flèches non fini, elle définit une catégorie fibrée  $\text{Ens}_f(A) \xrightarrow{f} \text{Ens}_f$ , comme ci-dessus. Cependant  $A$  n'est pas une  $\text{Ens}_f$ -catégorie; c'est, en quelque sorte, une catégorie trop grosse pour être là.

3.5. Proposition: La 2-catégorie  $\text{cat}(\mathcal{B})$  s'identifie canoniquement à une sous-2-catégorie pleine de  $\text{Fib}(\mathcal{B})$

Plus précisément, soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux  $\mathcal{B}$ -catégories,  $f, g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux  $\mathcal{B}$ -foncteurs,  $\lambda: f \rightarrow g$  une  $\mathcal{B}$ -transformation naturelle. A  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  on associe les catégories fibrées  $\mathcal{B}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\mathcal{C}'} \mathcal{B}$ ; au  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f$  on associe

le foncteur cartésien  $F: \mathcal{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}')$  défini par :

$$F(I \xrightarrow{X} C_0) = f_0 X, \quad F(u, \varphi) = (u, f_1 \varphi);$$

de même pour  $g$ ; à  $\lambda: C_0 \rightarrow C'_0$  on associe  $\Lambda: F \rightarrow G$  telle que

pour  $X: I \rightarrow C_0$  objet de  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  on ait  $\Lambda_X = (\text{id}_I, \lambda X)$ .

L'application décrite ci-dessus est une équivalence de  $\text{cat}(\mathcal{B})(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  dans  $\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(\mathcal{C}), \mathcal{B}(\mathcal{C}'))$ .

3.6 Deux  $\mathcal{B}$ -catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont équivalentes si, et seulement si, les ~~catégories~~ <sup>catégories fibrées</sup> associées  $\mathcal{B}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\mathcal{C}'} \mathcal{B}$  sont équivalentes. (cf. 1.8.4)

3.7 Une catégorie fibrée  $\mathcal{E} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$  est appelée représentable si il existe une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  et une équivalence entre les catégories fibrées  $\mathcal{E} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ ; la catégorie  $\mathcal{C}$ , définie à équivalence près, est appelée représentant de la catégorie fibrée  $\mathcal{E}$ . Une catégorie fibrée associée à une  $\mathcal{B}$ -catégorie est dite petite; Une catégorie fibrée représentable est dite essentiellement petite.

Donnons un exemple: la catégorie fibrée  $\text{Mono}(\mathcal{B})$   
 $\xrightarrow{\mathcal{B}}$   $\mathcal{B}$  est essentiellement petite s'il existe un objet  $\Omega$  de  $\mathcal{B}$   
 et une flèche  $1 \xrightarrow{\nu} \Omega$  de  $\Omega$  classifiant les sous-objets  
 (i.e. pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}$  l'application de  $\mathcal{B}(X, \Omega)$   
 dans les sous-objets de l'objet  $X$  définie par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \nu \\ X & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

et une bijection)

3.8.7. La propriété <sup>2.3.5</sup>/<sub>2.6.4</sub>, l'exemple 2.3.4 et les  
 d'autres remarques que nous avons ultérieurement conduisent  
 à penser la notion de catégorie fibrée sur  $\mathcal{B}$  comme une  
 extension de la notion de  $\mathcal{B}$ -catégorie. C'est pourquoi à partir  
 de maintenant nous utiliserons presque toujours les termes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$   
pour noter des catégories fibrées. Nous dirons qu'une catégorie fibrée  
 est une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  si c'est la catégorie fibrée  $\mathcal{B}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ .

#### 4 Pseudo-foncteurs

Les définitions et démonstrations détaillées sont dans le  
 texte de Grothendieck [ ] p 25.

4.1 Soit  $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée. Pour tout  
 et  $\nu: J \rightarrow K$  ~~soient~~ deux flèches composables de  $\mathcal{B}$ , il existe  
 un isomorphisme naturel entre les foncteurs  $(\nu u)^*$  et  $u^* \nu^*$   
 de  $\mathcal{E}(K)$  vers  $\mathcal{E}(I)$ ; ces isomorphismes vérifient des relations  
 de cohérence que nous n'écrivons pas ici, résultant de  
 l'associativité de la composition dans  $\mathcal{B}$ ; et dis-p

4.2. La donnée pour chaque objet  $I$  de  $\mathcal{B}$ , d'une  
 catégorie  $\phi(I)$  de  $\text{Cat}(\text{Eus})$ ; pour chaque flèche  $u: I \rightarrow J$   
 de  $\mathcal{B}$ , d'un foncteur  $\phi(u): \phi(J) \rightarrow \phi(I)$ ; pour chaque

couple  $(u, v)$  de flèches composables de  $\mathcal{B}$  d'isomorphismes naturels  $\phi(vu) \rightarrow \phi(u)\phi(v)$  vérifiant des conditions de cohérence évoquées en 2.4.1 détermine ce que Grothendieck appelle un pseudo-foncteur  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{no})$ .

Une catégorie fibree  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$  détermine donc un pseudo-foncteur  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{no})$  en posant  $\phi(I) = \mathbb{E}(I)$ ,  $\phi(u) = u^*$  pour tout objet  $I$ , toute flèche  $u$  de  $\mathcal{B}$ .

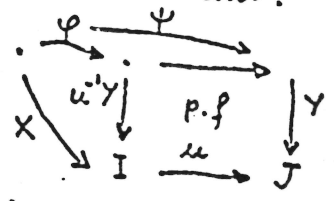
Un foncteur  $\mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{no})$  est un pseudo-foncteur pour lequel les isomorphismes naturels sont des identités. Une catégorie fibree est appelée scindée si le pseudo-foncteur associé est un foncteur.

4.3. Réciproquement, on associe à un pseudo-foncteur  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{no})$  une catégorie fibree  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$  de la manière suivante:  $\mathbb{E}$  a pour classe de objets la somme des classes de objets de  $\phi(I)$ ,  $I$  objet de  $\mathcal{B}$ . Une flèche <sup>dans  $\mathbb{E}$</sup>  de l'objet  $x$  de  $\phi(I)$  vers l'objet  $y$  de  $\phi(J)$  est un couple  $(u, \varphi)$ ,  $u: I \rightarrow J$  flèche de  $\mathcal{B}$  et  $\varphi: x \rightarrow \phi(u)y$  flèche de  $\phi(I)$ ; si  $(u, \varphi): x \rightarrow y$  et  $(v, \psi): y \rightarrow z$  sont deux flèches de  $\mathbb{E}$ , on pose  $(v, \psi) \circ (u, \varphi) = (vu, \chi)$  où  $\chi$  est le composé  $x \xrightarrow{\varphi} \phi(u)y \xrightarrow{\phi(v)\psi} \phi(u)\phi(v)z \xrightarrow{\sim} \phi(vu)z$ ; le foncteur  $p$  est défini par  $p(x) = I$  si  $x$  est objet de  $\phi(I)$  et  $p(u, \varphi) = u$ ; la flèche  $(u, \text{id}_{\phi(u)y})$   $\phi(u)y \rightarrow y$  est la flèche cartésienne que nous choisirons.

Les constructions 2.4.2 et 2.4.3 sont inverses l'une de l'autre (à isomorphisme près).

4.4. Pour illustrer <sup>par un</sup> exemple prenons la catégorie  $\mathcal{B}^2$  fibree  $\mathcal{B}^2 \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{B}$  (cf 2.2.3); nous supposons avoir choisi des produits fibrés dans  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire que pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de  $\mathcal{B}$  on a un foncteur image réciproque de la fibre  $\mathcal{B}^2(J) = \mathcal{B}/_J$  vers la fibre  $\mathcal{B}/_I$ . Soient  $x$

• une flèche de but  $I$ ,  $Y$  une flèche de but  $J$ , et  $\phi: \mathbb{B}^? \rightarrow \text{Cat}(\text{Ens})$  le pseudo foncteur associé à la catégorie fibrée  $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathbb{B}$  : une flèche de  $X$  vers  $Y$  obtenue par la construction 2.4.3 et un couple  $(u, \varphi)$ ,  $u: I \rightarrow J$ , et  $\varphi$  tel que le diagramme suivant :



commute ; le couple  $(u, \varphi)$  s'identifie donc à un couple de flèches  $(u, \Psi)$  définissant une flèche de  $\mathbb{B}^2$  de  $X$  vers  $Y$ .

5. Autre définition de catégories fibrées

5.1. Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{p'} \mathbb{B}$  deux foncteurs.

Un foncteur  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est dit au-dessus de  $\mathbb{B}$  (relativement à  $p, p'$ ) si  $p'F = p$ . Pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$   $F$  définit un foncteur  $F(I): \mathbb{E}(I) \rightarrow \mathbb{E}'(I)$ .

Si  $F$  et  $G$  sont des foncteurs  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  au-dessus de  $\mathbb{B}$ , une transformation naturelle  $\Lambda: F \rightarrow G$  est au-dessus de  $\mathbb{B}$  si pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}$  on a  $p' \Lambda_X = \text{id}_p X$ .

Un foncteur  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  adjoint à au-dessus de  $\mathbb{B}$  est adjoint à gauche d'un foncteur  $G: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$  au-dessus de  $\mathbb{B}$  si  $F$  est adjoint à gauche de  $G$  et si les transformations naturelles  $F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathbb{E}'}$  et  $\text{id}_{\mathbb{E}} \rightarrow F \circ G$  sont au-dessus de  $\mathbb{B}$ .

On définit de même une équivalence entre  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  au-dessus de  $\mathbb{B}$ .

5.2. Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{B}$  un foncteur et  $(\mathbb{B}, p)$  la comm la catégorie catégorie définie par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccccc}
 (B, p) & \xrightarrow{p_2} & B^2 & \xrightarrow{c_0} & B \\
 \downarrow & p.f. & \downarrow \delta_2 & & \\
 \mathbb{E} & \xrightarrow{p} & B & & 
 \end{array}$$

Les objets de  $(B, p)$  sont les couples  $(X, I \xrightarrow{v'} pX)$  formés d'un objet  $X$  de  $\mathbb{E}$  et d'une flèche  $v'$  de  $B$  de but  $pX$ ; une flèche dans  $(B, p)$  de  $(X, I \xrightarrow{v'} pX)$  vers  $(Y, J \xrightarrow{v} pY)$  est un couple  $(u, \psi)$ ,  $u: I \rightarrow J$  étant une flèche de  $B$ ,  $\psi: X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathbb{E}$ , tels que :

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{u} & J \\
 v' \downarrow & & \downarrow v \\
 pX & \xrightarrow{\psi} & pY
 \end{array}$$

commutative.

5.3 Notons  $H$  le foncteur  $\mathbb{E} \rightarrow (B, p)$  défini par  $HX = (X, \text{id } pX)$ ,  $H\psi = (p\psi, \psi)$  pour  $X, \psi$  objet et flèche de  $\mathbb{E}$ ;  $H$  est un foncteur au-dessus de  $B$  relativement à  $p$ ,  $\delta_0, p_2$  la nouvelle définition est donnée par la :

Proposition :  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} B$  est une catégorie fibrée si, et seulement si, le foncteur  $H$  a un adjoint à droite au-dessus de  $B$ .

De même  $\mathbb{E} \xrightarrow{p} B$  est une catégorie cofibrée si le foncteur  $H$  a un adjoint à gauche au-dessus de  $B$ .

5.4 La vérification de l'équivalence des deux définitions est facile et laissée au lecteur : la valeur de l'adjoint à droite de  $H$  pour un objet  $(X, J \xrightarrow{v'} pX)$  de  $(B, p)$  sera le  $v'^*X$ . Notons cependant que nous supposons un choix d'images réciproques, c'est-à-dire l'axiome du choix. Cette présentation permet une définition interne de catégories fibrées : un  $B$ -foncteur  $C' \rightarrow C$  détermine une  $B$ -catégorie  $(C, p)$ , puis on construit un  $B$ -foncteur  $C' \rightarrow (C, p)$  et on sait dire de manière interne que deux  $B$ -foncteurs sont adjoints (1.11.2).

Les résultats du paragraphe 2 pourront souvent s'énoncer de manière interne à la catégorie  $B$ . Nous laisseront le lecteur faire la traduction.

## 7. Lemme de Yoneda

7.1 Lemme de Yoneda. Soit  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  une catégorie fibree et soit  $I$  un objet de  $\mathbb{B}$ . La catégorie fibree associée à la  $\mathbb{B}$ -catégorie  $I$  est  $\mathbb{E}_{/I}$  définie par le foncteur source  $\mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{B}$ . Les catégories  $\text{Cart}(\mathbb{B}/I, \mathbb{E})$  et  $\mathbb{E}(I)$  sont équivalentes.

Démonstration : on définit un foncteur  $\Psi: \text{Cart}(\mathbb{B}/I, \mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}(I)$  en posant, pour tout foncteur cartésien  $F: \mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $\Psi(F) = F(\text{id } I)$ . D'autre part, on définit un foncteur  $\Psi': \mathbb{E}(I) \rightarrow \text{Cart}(\mathbb{B}/I, \mathbb{E})$  en posant, pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}(I)$  et toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $\mathbb{B}$  :  $\Psi'(X)(u) = u^* X$ . On a défini, comme il est facile de le vérifier, une équivalence de catégories.

7.2. Corollaire. Pour toute catégorie fibree  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  il existe une catégorie scindée (cf 2.4.2) qui lui est équivalente; elle est obtenue par la construction de 2.4.3 à partir du foncteur  $\phi: \mathbb{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{cat}(\mathbb{E}_{\text{ens}})$  qui a  $I$  objet de  $\mathbb{B}$  associe  $\text{Cart}(\mathbb{B}/I, \mathbb{E})$

Remark on 7.1 : This really is the Yoneda Lemma, for if we think of fibrations as pseudofunctors, then  $\mathbb{E}(I)$  is the image of  $I$  under the pseudofunctor (associated with)  $\mathbb{E}$ , and  $\mathbb{B}/I$  is (associated with) the pseudofunctor  $\mathbb{B}^{\text{op}} \xrightarrow{(-, I)} \text{cat}(\mathbb{E}_{\text{ens}})$  represented by  $I$ .

$J \mapsto (J, I)$

## 8 Constructions dans $\text{Fib}(\mathcal{B})$ .

8.1. Introduction.  $\text{cat}(\mathcal{B})$  est une sous-catégorie de  $\text{Fib}(\mathcal{B})$ ; nous étendons à  $\text{Fib}(\mathcal{B})$  les constructions faites au paragraphe 1 dans  $\text{cat}(\mathcal{B})$ . Le <sup>rapport entre  $\text{cat}(\mathcal{B})$  et  $\text{Fib}(\mathcal{B})$</sup>  ~~comportement~~ est analogue à celui d'une <sup>petite</sup> catégorie  $\mathcal{A}$  et de sa catégorie  $\hat{\mathcal{A}}$  de préfaisceaux  $\hat{\mathcal{A}}$  dans le ensemble: même si deux objets  $A$  et  $A'$  de  $\mathcal{A}$  n'ont pas de produits dans  $\mathcal{A}$  les foncteurs  $(\cdot, A)$  et  $(\cdot, A')$  ont un produit dans  $\hat{\mathcal{A}}$ , et si  $A \times A'$  existe on a  $(\cdot, A) \times (\cdot, A') \simeq (\cdot, A \times A')$ .

8.2 Application de 2.4.3. Plusieurs constructions dans  $\text{Fib}(\mathcal{B})$  s'obtiendront de la manière suivante: une catégorie fibree  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  détermine un pseudo-foncteur  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{us})$ ; il est facile de composer  $\phi$  avec un foncteur  $\text{Cat}(\mathbb{E}\text{us}) \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{us})$  pour obtenir un nouveau pseudo-foncteur; on prend alors la catégorie fibree associée par 2.4.3. On peut dire de cette méthode que c'est une construction fibree par fibree avec "recollement" des fibres.

Les procédés pour construire des foncteurs cartésiens, des transformations naturelles sont analogues, utilisant une extension de la construction 2.4.3 que nous n'écrivons pas.

8.3. catégorie fibree duale. Notons  $\text{op}: \text{Cat}(\mathbb{E}\text{us}) \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{us})$  le foncteur qui associe à une catégorie sa duale. Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  une catégorie fibree, et  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}\text{us})$  le pseudo-foncteur associé. Le pseudo-foncteur composé  $\text{op} \circ \phi$  définit une catégorie fibree que nous noterons  $\mathcal{E}^{(\text{op})} \xrightarrow{\mathcal{B}^{\text{op}}} \mathcal{B}$ . ( $\mathcal{E}^{(\text{op})}$  n'est pas  $\mathcal{E}^{\text{op}}$  en général). Décrivons le résultat obtenu: Les objets de  $\mathcal{E}^{(\text{op})}$  sont ceux de  $\mathcal{E}$ ; si  $X \in \mathcal{E}(I)$  et  $Y \in \mathcal{E}(J)$ , une flèche de  $X$  vers  $Y$  dans  $\mathcal{E}^{(\text{op})}$  est un couple  $(u, \varphi)$  ou  $u: I \rightarrow J$  est une flèche de  $\mathcal{B}$  et  $\varphi: u^*Y \rightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{E}(I)$  ( $u^*Y$  étant pris au sens de la catégorie fibree  $\mathcal{E}$ )



$\cdot$ , on a  $\mathcal{E}^{\text{op}} = \mathcal{E}^{\text{fib}}$  et  $\mathcal{E}^{\text{op}}(u, \varphi) = u$ ; la composition d'une  
 flèche  $(u, \varphi) : X \rightarrow Y$  et d'une flèche  $(v, \psi) : Y \rightarrow Z$  de  $\mathcal{E}^{\text{op}}$   
 est la flèche  $(vu, \chi)$  où  $\chi$  est la composée :  $(vu)^* Z \xrightarrow{\sim} u^* v^* Z \xrightarrow{u^* \psi} u^* Y \xrightarrow{\varphi} X$  (les images réciproques sont ici  
 aussi au sens de la fibration  $\mathcal{E}$ ); l'image réciproque, dans  $\mathcal{E}^{\text{op}}$ ,  
 d'un objet  $Y$  de  $\mathcal{E}(\mathcal{J})$  par une flèche  $u : I \rightarrow J$  est  $u^* Y$   
 pris au sens de  $\mathcal{E}$ , et la flèche cartésienne  $u^* Y \rightarrow Y$  dans  
 $\mathcal{E}^{\text{op}}$  est le couple  $(u, \text{id}_{u^* Y})$ .

Si une catégorie fibrée est (représentable par) une  
 B. catégorie  $\mathcal{C}$ , la catégorie fibrée dual est (représentable par)  
 la B. catégorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$

**3.4 Exponentielle par  $\mathcal{A}$** . Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie.

Elle définit un foncteur  $( )^{\mathcal{A}} : \text{Cat}(\mathcal{E}\text{us}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{E}\text{us})$ .  
 On définit un foncteur  $( )^{\mathcal{A}} : \text{Fib}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{B})$  en associant  
 à une catégorie fibrée  $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}$  définie par un pseudo-foncteur  
 $\mathcal{F} : \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E}\text{us})$ , la catégorie fibrée, notée  $\mathcal{E}^{(\mathcal{A})} \xrightarrow{\mathcal{F}^{\mathcal{A}}} \mathcal{B}$ ,  
 associée au pseudo-foncteur composé  $( )^{\mathcal{A}} \mathcal{F}$ ; et en associant  
 à un foncteur cartésien  $F$  de la catégorie fibrée  $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}$  vers la  
 catégorie fibrée  $\mathcal{E}' \xrightarrow{\mathcal{F}'} \mathcal{B}$  le foncteur  $F^{(\mathcal{A})}$  défini par la  
 "pseudo-transformation naturelle"  $( )^{\mathcal{A}} \Lambda F$ , où  $\Lambda F$  est la  
 "pseudo-transformation naturelle" associée à  $F$ .

Pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$  les objets de  $\mathcal{E}^{(\mathcal{A})}(I)$  sont  
 ceux de  $(\mathcal{E}(I))^{\mathcal{A}}$ , mais en général  $\mathcal{E}^{(\mathcal{A})}$  est distinct de  $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$   
 (c'est cependant vrai si  $\mathcal{B} = \mathbb{1}$ )

Soit  $\mathcal{P}$  une catégorie de présentation finie. Si une catégorie  
 fibrée est (représentable par) une B. catégorie  $\mathcal{C}$ , son  
 exponentielle par  $\mathcal{P}$  est (représentable par) la B. catégorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ .

Notons enfin qu'on peut définir un bifoncteur  
 $\text{Fib}(\mathcal{B}) \xleftarrow{\text{Fib}(\mathcal{E})} \text{cat}(\mathcal{E}\text{us}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{B})$ ,  $(\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}, \mathcal{A}) \mapsto \mathcal{E}^{(\mathcal{A})}$

8.5 Produit. Les produits dans  $\text{Fib}(\mathbb{B})$  se calculent comme dans  $\text{Cat}(\mathbb{E}us)/\mathbb{B}$  : le produit de la catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  par la catégorie fibrée  $\mathbb{E}' \xrightarrow{c'} \mathbb{B}$  est défini par la flèche diagonale du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E}' & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \Gamma \downarrow & \text{Pf.} & \downarrow c \\ \mathbb{E}' & \xrightarrow{c'} & \mathbb{B} \end{array}$$

(on sait que  $c' \Gamma$  est fibrant : 2.1.7)

Si deux catégories fibrées sont (représentées par) des  $\mathbb{B}$ -catégories  $c$  et  $c'$  respectivement, leur produit dans  $\text{Fib}(\mathbb{B})$  est (représentable par) la  $\mathbb{B}$ -catégorie  $c \times c'$ .

8.7  $\text{Fib}(\mathbb{B})$  est cartésienne fermée Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{c'} \mathbb{B}$  deux catégories fibrées. Pour montrer que  $\text{Fib}(\mathbb{B})$  est cartésienne fermée, nous utilisons, comme dans les topos des préfaisceaux, le lemme de Yoneda. Le pseudo-foncteur  $\phi: \mathbb{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}us)$  tel que  $\phi(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(c'_I, c_I)$  définit une catégorie fibrée notée  $c^{c'}: \mathbb{E}^{(\mathbb{E}')} \rightarrow \mathbb{B}$ , telle que  $\mathbb{E}^{(\mathbb{E}')} (I)$ , équivalent à  $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}/I, \mathbb{E}^{(\mathbb{E}')} )$  soit égal à  $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}/I \times \mathbb{E}', \mathbb{E})$ .

Proposition: Pour toute catégorie fibrée  $D: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{B}$  on a :

$\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, c^{c'})$  équivalent à  $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(c' \times D, c)$ .

Si deux catégories fibrées sont des  $\mathbb{B}$ -catégories  $c$  et  $c'$  la catégorie fibrée  $c^{c'}$  existe toujours; elle est représentable si, et seulement si,  $c^{c'}$  existe dans  $\text{cat}(\mathbb{B})$ .

- Exemple: Soit  $c: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  une catégorie fibrée.

L'image réciproque de  $c$  par le foncteur  $\bullet \times I: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  est la catégorie fibrée  $c^I$ .

2.6. Dans la situation précédente, si  $E \xrightarrow{C} B$  est la catégorie fibrée  $B/I \xrightarrow{I} B$ , où  $I$  est un objet de  $B$ ,  $\Gamma$  est noté  $C_I$ . Si une catégorie fibrée est une  $B$ -catégorie  $C$ ,  $C_I$  est la catégorie fibrée sur  $B/I$  définie par la  $B/I$ -catégorie  $C \times I \rightarrow I$ .

### 9 limites dans les catégories fibrées

9.1. Ce qu'on a dit en 1.12 des limites dans une  $B$ -catégorie s'étend aux catégories fibrées :

Soit  $D$  un type de diagramme de  $B$ -objets, et  $k$  le diagramme  $D \rightarrow B$ . Une catégorie fibrée  $E \xrightarrow{C} B$  a des  $D$ -limites (resp.  $D$ -colimites) si le foncteur cartésien  $C^{(k)} : E \rightarrow E^{(D)}$  a un adjoint à droite (resp. à gauche)  $: E^{(D)} \rightarrow E$ .

Il est équivalent de demander que pour tout objet  $I$  de  $B$  la fibre  $E(I)$  ait des  $D$ -limites (resp.  $D$ -colimites) et que les foncteurs images réciproques commutent avec elles

(d'après 2.8.4 et 2.6.5)

9.2. D'après 2.6.4, quand  $D$  est un type de diagramme ~~et fini~~ <sup>fini</sup>  $\text{cop}$ , l'existence de  $D$ -limites dans une  $B$ -catégorie  $C$  est équivalente à l'existence de  $D$ -limites dans la catégorie fibrée  $B(C) \xrightarrow{C} B$ .

9.3. Soit  $E \xrightarrow{C} B$  une catégorie fibrée. La condition  $C$  a des  $D$ -limites équivaut à  $C^{\text{op}}$  a des  $D$ -colimites (2.8.3)

9.4. Les catégories fibrées  $\text{Mono}(\mathbb{B}) \xrightarrow{\Omega} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathbb{B}$  (cf 2.2.3) ont des limites projectives finies.

### 10. Familles.

à reprendre 10.1. Introduction. Etant donnée une famille de familles d'objets d'une catégorie  $A$  ayant des sommes quelconques,  $((X_i)_{i \in I_i})_{i \in I}$ , on peut construire la famille  $(\coprod_{i \in I_i} X_i)_{i \in I}$ . Cette propriété nous guidera dans l'introduction de  $\mathbb{B}$  (sommes 2.11.2). Quand  $A$  est une petite catégorie, l'information sur les familles d'objets de  $A$  est donnée dans la ~~catégorie~~ <sup>catégorie fibrée</sup>  $\text{Euo}(A) \xrightarrow{A} \text{Euo}$ : un objet de  $\text{Euo}(A)(I)$  est une flèche  $X: I' \rightarrow \text{Ob}(A)$ , c'est-à-dire une famille  $(X_i)_{i \in I'}$  d'objets de  $A$ ; une famille de familles d'objets de  $A$  peut être considérée comme un couple  $(X, v')$  où  $X: I' \rightarrow \text{Ob}(A)$  et  $v': I' \rightarrow I$  sont deux flèches (avec  $I'_i = v'^{-1}(i)$  on retrouve la première présentation). On va voir que les propriétés des familles s'énoncent de façon naturelle dans les catégories fibrées.

10.2. le triple  $(\text{Fam}, H, M)$  Soit  $p: E \rightarrow B$  un foncteur et  $(p, B)$  la comma-catégorie obtenue par produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} (p, B) & \xrightarrow{p_2} & B^2 \\ \downarrow p.f & & \downarrow \partial_0 \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Les objets de  $(p, B)$  sont les couples  $(X, v')$  où  $X$  est un objet de  $E$  et  $v': I' \rightarrow I$  une flèche de  $B$  de source  $I' = pX$ . La description des flèches de  $(p, B)$  est analogue à celle faite en 2.5.2 pour  $(B, p)$ . On définit ~~noté~~  $\partial_1 p_2$  par  $\text{Fam } p$  on a  $\text{Fam } p (X, I' \xrightarrow{v'} I) = I$ ,  $\text{Fam } p (\psi, u) = u$  pour  $(X, v'), (\psi, u)$  objet, flèche de  $(p, B)$ .

Soit  $E' \xrightarrow{p'} B$  une seconde foncteur et  $F: E \rightarrow E'$  un foncteur au-dessus de  $B$ ; on définit par produit fibre un foncteur  $Fam F: (p, B) \rightarrow (p', B)$  au-dessus de  $B$ :  $Fam F (X, v') = (FX, v')$  pour tout objet  $(X, v')$  de  $(p, B)$

Enfin, le lecteur vérifiera que l'on définit ainsi un foncteur  $Fam: Cat(Eus)/B \rightarrow Cat(Eus)/B$ , et que le triplet  $(Fam, H, M)$  définit un triple,  $H$  et  $M$  étant les ~~foncteurs~~ transformations naturelles  $H: id_{Cat(Eus)/B} \rightarrow Fam$ ,  $M: Fam Fam \rightarrow Fam$  définies pour tout foncteur  $p: E \rightarrow B$  par les foncteurs  $H_p: E \rightarrow (p, B)$ ,  $H_p(X) = (X, id_{pX})$  et  $M_p: ((p, B), B) \rightarrow (p, B)$ ,  $M_p(X, I|pX \xrightarrow{v'} I| \xrightarrow{u} J) = (X, pX \xrightarrow{u v'} J)$ .

10.3 Cas de catégories fibrées. Soit  $E \xrightarrow{c} B$  une catégorie fibrée. Le foncteur  $Fam c: (c, B) \rightarrow B$  est fibrant d'après 2.1.7. Décrivons les foncteurs image réciproque: soit  $u: I \rightarrow J$  une flèche de  $B$  et  $(Y, v \xrightarrow{v'} J)$  un objet de  $(c, B)$  ( $J$ ).

On construit le produit fibre:

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & J' \\ \downarrow u' & \text{p.f.} & \downarrow v' \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

L'image réciproque de  $(Y, v)$  par  $u$  dans la catégorie fibrée  $(c, B) \xrightarrow{Fam c} B$  est  $(u'^* Y, v')$ , où  $u'^*$  est au sens de la catégorie fibrée  $E \xrightarrow{c} B$ , et la flèche cartésienne  $(u'^* Y, v') \rightarrow (Y, v)$  est  $(\varphi, u)$ , où  $\varphi$  est la flèche cartésienne  $u'^* Y \rightarrow Y$  au-dessus de  $u$  dans  $E \xrightarrow{c} B$ .

Soient  $E' \xrightarrow{c'} B$  une seconde catégorie fibrée et  $F: E \rightarrow E'$  un foncteur cartésien; le foncteur  $Fam F$  défini en 2.10.2 est cartésien, D'autre part, le foncteur

$H_c$  et  $M_c$  définies en 2.10.2 sont cartésiennes. On obtient donc un triple sur  $Fib(B)$  en usant du triple  $Fam$  de 2.10.2. exemple. (10.1)

11. B. sommes, B. produits, conditions de Chevalley

11.1 Proposition Soit  $E \xrightarrow{C} B$  une catégorie fibrée.

Le foncteur  $C$  est cofibrant si, et seulement si, pour toute flèche  $I \xrightarrow{u} J$  de  $B$  le foncteur  $u^*: E(J) \rightarrow E(I)$  a un adjoint à gauche.

pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de  $B$

En effet, si  $C$  est cofibrant, le foncteur image directe  $u_*: E(I) \rightarrow E(J)$  (cf: 2.1.6) est adjoint à gauche du foncteur  $u^*$  puisque pour tout objet  $x$  de  $E(I)$  et tout objet  $y$  de  $E(J)$  on a:  $E(I)(x, u^*y) \cong E(J)(u_*x, y)$ , ces deux ensembles étant isomorphes à l'ensemble des flèches  $z$  de  $E$  au-dessus de  $u$ . La réciproque s'en suit.

11.2. Définition: on dit qu'une catégorie fibrée  $E \xrightarrow{C} B$  a des B-sommes si le foncteur  $H_c$  défini en 2.10.2. a un adjoint à gauche. ~~Appellons~~ <sup>Appellons</sup>  $L$  cet adjoint.

11.3 Pour toute flèche  $v: J' \rightarrow J$  de  $B$  le foncteur  $L$  définit un foncteur  $E(J') \rightarrow E(J)$ , noté  $\Downarrow_v$ , défini, pour tout objet  $Y$  de  $E(J')$ , par  $\Downarrow_v Y = L(Y, v)$ . On a:  $E(I)(\Downarrow_v Y, Z) \cong (C, B)(J')(Y, v), (Z, id J) \cong E(I)(Y, v^*Z)$  pour tout objet  $Z$  de  $E(J)$ , ce qui prouve que  $\Downarrow_v$  est adjoint à gauche de  $v^*$ ; on conclut, d'après 2.11.1,

Une catégorie fibrée ayant des B-sommes est aussi une catégorie cofibrée mais

la situation de 2.11.1 n'est pas <sup>la plus</sup> intéressante: on n'a pas de relation entre les foncteurs images directs et images réciproques. De telles relations existent (2.11.6)

dans une catégorie fibrée ayant des B. sommes. c'est cette situation que nous étudions dans la suite.

11.4 Le lecteur pourra vérifier que pour une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  la donnée d'un adjoint à gauche  $L$  de foncteur  $H$  est équivalente à celle d'une structure de ~~algèbre~~ <sup>Fam</sup> algèbre ~~sur C~~ sur  $C$ .

11.5. Catégorie de Chevalley. Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  une catégorie fibrée et cofibrée, et pour toute flèche  $u$  de  $\mathbb{B}$ ,  $u^*, u_*$  les foncteurs image réciproque, image directe par  $u$ ;  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  est appelée catégorie de Chevalley si pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & J' \\ v' \downarrow & \text{Pf} & \downarrow v \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

le transfert naturel canonique  $v'_* u'^* \rightarrow u^* v_*$  est un isomorphisme pair: le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(I') & \xleftarrow{u'^*} & \mathbb{E}(J') \\ v'_* \uparrow & \curvearrowright & \uparrow v_* \\ \mathbb{E}(I) & \xleftarrow{u^*} & \mathbb{E}(J) \end{array} \quad (\text{condition de Chevalley})$$

11.6. Proposition. Une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  a des B. sommes si, et seulement si, c'est une catégorie de Chevalley.

Utilisons les notations de 2.10.3 et 2.11.5.; si la catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  a des B. sommes, la flèche  $\xrightarrow{u'} \mathbb{E}(J')$  image par  $L$  de la flèche cartésienne  $(\varphi, u)$ , est cartésienne; la condition de Chevalley est donc satisfaite.

Réciproquement, si la condition de Chevalley est satisfaite, on construit un foncteur  $L : (C, \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{E}$  en posant  $L(Y, v) = v_* Y$ , et on vérifie les conditions de 2.11.2.

11.7. B. produits <sup>on dit</sup> qu'une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  a des B. produits si la catégorie fibrée duale:  $\mathbb{E}^{(op)} \xrightarrow{C^{(op)}} \mathbb{B}$ , défini en 2.9.3 a des B. sommes.

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow I & \dots & I \\ & & \downarrow u \\ \Rightarrow J & \dots & J \end{array}$$

On a ~~du~~ <sup>un</sup> résultat analogue à 2.11.6: une catégorie fibree a des B. produits si, et seulement si, pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de B le foncteur  $u^*$  a un adjoint à droite (que nous noterons  $\Pi$ ) et la cocondition de Chevalley est satisfait, i.e. pour tout carré cartésien:

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & I' \\ v' \downarrow & p.f. & \downarrow v \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

le carré suivante commute à l'isomorphisme <sup>canonique</sup> près:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(I') & \xleftarrow{u'^*} & \mathbb{E}(J') \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{E}(I) & \xleftarrow{u^*} & \mathbb{E}(J) \end{array}$$

Notons enfin qu'une catégorie de Chevalley a des B. produits dès que pour toute flèche  $u$  de B le foncteur  $u^*$  a un adjoint à droite (il n'est pas utile de vérifier la cocondition de Chevalley)

Exemple  
11.8.  $\nabla$  La catégorie fibree  $B^2 \xrightarrow{B} B$  a toujours des B. sommes, ~~et est une catégorie de Chevalley~~; elle a des B. produits si, par exemple, B est un topos. Nous reviendrons sur ce point en 3.2.3.

La catégorie  $\text{Mono}(B) \xrightarrow{B} B$  est de Chevalley si les "E" existent dans B, et a des B. produits si les "V" existent dans B; c'est le cas si B est un topos. ~~(à vérifier)~~

11.9. Exemple. Si A est une petite catégorie ~~avec~~ <sup>avec</sup> sommes et produits finis, la catégorie fibree  $\mathbb{E}us_f(A) \xrightarrow{A} \mathbb{E}us_f$

(définie comme en 2.3.4) a des B. sommes (resp des B. produits) si, et seulement si, A a des sommes (resp: produits) finis.

Si  $X = (X_i)_{i \in I}$  est une famille finie d'objets de A et

$u: I \rightarrow J$  une flèche de  $\mathbb{E}us_f$ , les familles  $Y = \coprod_u X, Z = \prod_u X$

sont définies par:  $Y_j = \coprod_{u(i)=j} X_i, Z_j = \prod_{u(i)=j} X_i$



11.10. Exemple. Notons  $\mathbb{E}us_d$  la catégorie des ensembles au plus dénombrables, et soit  $\Delta$  un ensemble ordonné avec sup dénombrables;  $\Delta$  définit, comme en 2.3.3 une catégorie fibrée  $\mathbb{E}us_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{E}us_d$ .  
 Soit  $\mathcal{C}$  vérifie la condition de Chevalley <sup>et vérifiée:</sup> Soit un carré cartésien de  $\mathbb{E}us_d$ :

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & J' \\ v' \downarrow & p.f. & \downarrow v \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

et  $(Y_{j'})_{j' \in J'}$  une famille d'éléments de  $\Delta$ ; on a

$$\begin{aligned} u^* \prod_{v'} (Y_{j'})_{j' \in J'} &= \left( \sup_{v(j')=u(i)} Y_{j'} \right)_{i \in I} = \left( \sup_{v'(i')=i} Y_{u'(i')} \right)_{i \in I} \\ &= \prod_{v'} u'^* (Y_{j'})_{j' \in J'} \quad \text{puisque } \{ j' : v(j')=u(i) \} = \\ &\quad \{ j' : \exists i' v'(i')=i \} \text{ pour tout } i \text{ de } I. \end{aligned}$$

11.11. 3<sup>es</sup> Théorème Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{C'} \mathbb{B}$  deux catégories <sup>fibrées avec  $\mathbb{B}$  comme</sup> ~~de Chevalley~~ et  $F: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$  un foncteur cartésien adjoint à gauche au-dessus de  $\mathbb{B}$  (cf 2.6.5) d'un foncteur cartésien  $G: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ . Alors  $F$  est cocartésien (2.6.4)

Pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de  $\mathbb{B}$ , tout objet  $Y$  de  $\mathbb{E}(J)$  et tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}'(I)$  on a:  $\mathbb{E}(J)(F \prod_u X, Y) \simeq \mathbb{E}'(J)(\prod_u X, GY) \simeq \mathbb{E}'(I)(X, u^* GY) \simeq \mathbb{E}'(I)(X, G u^* Y) \simeq \mathbb{E}(I)(FX, u^* Y) \simeq \mathbb{E}(J)(\prod_u FX, Y)$ . D'où le résultat.

## 12 Hyperdoctrines

12.1 Une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{B}$  est dite cartésienne fermée si pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  la fibre  $\mathbb{E}(I)$  est cartésienne fermée et si pour toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $\mathbb{B}$  la foncteur  $u^*$  préserve la structure de catégorie cartésienne fermée.

12.2. Une hyperdoctrine est une catégorie <sup>fibrée</sup> ~~de Chevalley~~  $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{B}$  cartésienne fermée avec  $\mathbb{B}$ -produits et  $\mathbb{B}$ -sommes.

Cette notion est développée dans l'article de Lawvere ([ ]) où sont indiqués plusieurs exemples. Parmi eux donnons le suivant :

12.3. Une théorie classique, intuitionniste ... à plusieurs sortes de variables, à prédicats de type fini définit  $\mathbb{B}$  à pour objets les sortes de variables et pour flèches une hyperdoctrine  $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{B}$  :  $\forall$  pour chaque objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  les objets la fibre  $\mathbb{E}(I)$  a pour objets les formules dont l'ensemble de variables libres est contenu dans  $I$ , et l'ensemble de flèches de  $\mathbb{E}(I)(X, Y)$  d'une formule  $X$  de  $\mathbb{E}(I)$  vers une formule  $Y$  de  $\mathbb{E}(I)$  est l'ensemble des démonstrations de  $Y$  à partir de  $X$ . La conjonction et l'implication définissent la structure de catégorie cartésienne fermée ; les  $\mathbb{B}$ -sommes ~~et~~  $\mathbb{B}$  sont données par les quantificateurs existentiels ; de plus de  $\mathbb{B}$ -produits existent, on les obtient avec les quantificateurs universels.

## 13. $\mathbb{B}$ -logique <sup>théorie</sup>

13.1 Définition. on appelle  $\mathbb{B}$ -lattice <sup>théorie</sup> une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{B}$  telle que pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$ , la fibre  $\mathbb{E}(I)$  soit un ensemble préordonné. (~~est muni d'une relation binaire réflexive et transitive~~) et pour toute flèche  $u$  de  $\mathbb{B}$  la foncteur image réciproque  $u^*$  <sup>est une</sup> ~~soit~~ croissant.

13.2. Exemple a. La catégorie fibrée  $\text{Mono}(B) \xrightarrow{\Omega} B$  et une B-logique appelée B-logique canonique de B.

Exemple b. Si B est un topos muni d'une topologie non discrète, on construit une B-logique différente de la B-logique canonique de B en prenant la restriction du foncteur  $\Omega: \text{Mono}(B) \rightarrow B$  aux monomorphismes fermés de B (on sait que l'image réciproque d'un monomorphisme fermé par une flèche de même but de B est un monomorphisme fermé)

Exemple c. Si H est un objet ordonné de B, la catégorie fibrée  $B(H) \xrightarrow{H} B$  et une B-logique.

13.3 B-logique associée à une catégorie fibrée sur B.

Désignons par  $\text{PrOrd}$  la catégorie des ensembles préordonnés et des applications croissantes; nous la considérerons comme une sous-catégorie pleine de  $\text{Cat}(\mathbb{E}us)$ . Notons  $\mathcal{O}$  le foncteur  $\text{Cat}(\mathbb{E}us) \rightarrow \text{PrOrd}$  qui à toute catégorie A associe l'ensemble préordonné obtenu en identifiant les flèches ayant même source et même but. ( $\mathcal{O}$  est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  $\text{PrOrd} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}us)$ )

Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} B$  une catégorie fibrée, et  $\phi: B^{op} \rightarrow \text{Cat}(\mathbb{E}us)$  le pseudo-foncteur associé. Le pseudo-foncteur composé  $\mathcal{O} \cdot \phi$  définit une catégorie fibrée que nous noterons  $\mathcal{O}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\mathcal{O}(c)} B$ ; il est facile de vérifier que  $\mathcal{O}(c)$  est une B-logique; nous l'appelons B-logique de c. La transformation naturelle  $\text{id}_{\text{Cat}(\mathbb{E}us)} \rightarrow \mathcal{O}$  induit un foncteur cartésien plein  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{E})$ .

Exemple d. Considérons la B-logique  $\mathcal{O}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\mathcal{O}(c)} B$  associée à l'hyperdoctrine  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} B$  de l'exemple 2.12.3. C'est une hyperdoctrine telle qu'il existe  $\forall$  dans  $\mathcal{O}(\mathbb{E})(I)$

. d'une formule  $X$  vers une formule  $Y$  si, et seulement si, il existe une démonstration de  $Y$  à partir de  $X$ .

13.4 Proposition Si  $E \xrightarrow{C} B$  est une  $B$ -catégorie, sa  $B$ -logique  $\mathcal{O}(E) \xrightarrow{\mathcal{O}C} B$  est une  $B$ -catégorie si, et seulement si, la flèche  $c_1 \xrightarrow{(i_0, i_1)} C_0 \times C_0$  admet une décomposition "épi-mono"  $c_1 \xrightarrow{\Pi} c'_1 \xrightarrow{i} C_0 \times C_0$  telle que  $\Pi$  soit scindée.

En effet, si  $\mathcal{O}(C)$  est une  $B$ -catégorie  $c'$ , on a  $c'_0 = C_0$  et pour toute flèche  $\varphi: I \rightarrow c_1$  de  $B$   $F(id_I, \varphi) = F(\varphi^*(id_{C_1}, id_C))$   
 $= (id_I, \Pi \varphi)$  (Fétant la fonction définie en 13.3). Comme  $F$  est plein, il existe une flèche  $s: c'_1 \rightarrow C_1$  telle que  $\Pi s = id_{c'_1}$ ; la suite de calculs est laissée au lecteur.

13.5. Remarque. Toutes les notions introduites pour les catégories fibrées se particularisent dans le cas des  $B$ -logiques de façon naturelle. Ainsi une  $B$ -logique avec produits finis (resp: sommes finies; resp: objet final; resp: objet initial) est une  $B$ -logique telle que chaque fibre soit un ensemble préordonné avec inf (resp: sup; resp: plus grand élément; resp: plus petit élément) commutant aux images réciproques; nous appellerons une telle  $B$ -logique:  $B$ -logique avec conjonction (resp: disjonction; resp: vrai; resp: faux). Et aussi: une  $B$ -logique est cartésienne pour si chaque fibre admet des inf finis et des implications stables par image réciproque; ou encore: une  $B$ -logique est à  $B$ -sommes (resp:  $B$ -produits) si, et seulement si, il y a dans chaque fibre des quantificateurs existentiels (resp: universels) commutant aux images réciproques.

Notons par ailleurs que si  $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{B}$  est une catégorie  
 fibrée avec sommes (resp: produit) <sup>finis</sup> la  $\mathbb{B}$ -logique associée  $\mathbb{C}$   
 à des sup (resp: des ~~finis~~ inf) finis commutant aux images  
 réciproques.

Notons enfin que les catégories avec déduction (Bénabou  
 Séminaire, 1973) sont les  $\mathbb{B}$ -logiques à produits finis et  $\mathbb{B}$ -sommes  
 et que les catégories <sup>fibrées</sup> régulières sont des catégories fibrées dont la  
 $\mathbb{B}$ -logique est à produits finis et  $\mathbb{B}$ -sommes. Les catégories  
 logiques de Volger sont les ...

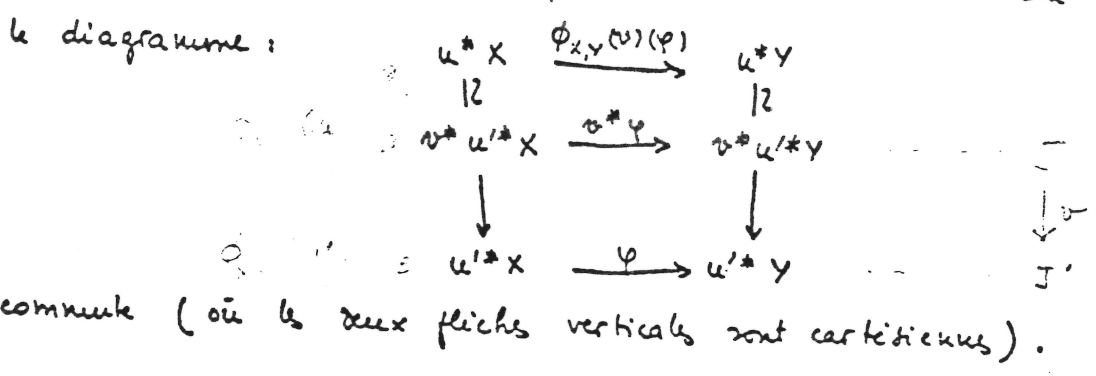
duale ?

Paragraphe 3. Catégories fibrées localement petites.

1 Définition.

1.1 Etant donné une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$ ,  $I$  un objet de  $\mathbb{B}$ ,  $X$  et  $Y$  des objets de  $\mathbb{E}(I)$ , nous noterons  $\phi_{X,Y}$  le foncteur  $\mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{E}ns$  défini par  $\phi_{X,Y}(u) = \mathbb{E}(I)(u^*X, u^*Y)$  pour tout objet  $u$  de  $\mathbb{B}/I$ ; et si  $v: J \rightarrow J'$ ,  $u': J' \rightarrow I$  sont des flèches de  $\mathbb{B}$  telles que  $u'v = u$ , et si  $\phi: u'^*X \rightarrow u'^*Y$  est un élément de  $\phi_{X,Y}(u')$ ,  $\phi_{X,Y}(v)(\phi)$  est l'unique flèche de  $u^*X$  vers  $u^*Y$  telle que

$u: J \rightarrow I$   
 $v: u \rightarrow u'$   
(in  $\mathbb{B}/I$ )

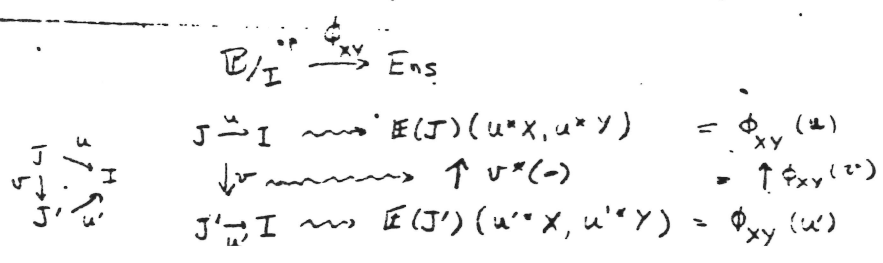


1.2. Une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  est localement petite si pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  et pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathbb{E}(I)$  le foncteur  $\phi_{X,Y}$  est représentable par une flèche  $k$  de  $\mathbb{B}/I$  on a donc pour toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B}/I(u, k) \simeq \mathbb{E}(J)(u^*X, u^*Y)$$

1.3 Nous noterons la flèche  $k: \text{Hom}_{\mathbb{E}}^c(X, Y) \rightarrow I$  et l'abrégerons en  $\text{Hom}_{\mathbb{E}}(X, Y)$  si cela ne crée pas de confusion.

1.4 La flèche  $q: k^*X \rightarrow k^*Y$  correspondant par l'isomorphisme précédent à la flèche  $\text{id}_k$  de  $\mathbb{B}/I$  et appelée flèche générique de  $X$  vers  $Y$  au-dessus de  $I$



done par l'isomorphisme de 3.1.3 l'unique flèche  $\varphi: u^*X \rightarrow u^*Y$

telle que le diagramme 
$$\begin{array}{ccc} u^*X & \xrightarrow{\varphi} & u^*Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^*X & \xrightarrow{g} & k^*Y \end{array}$$
 commute, où les

$$\begin{array}{ccc} u^*X & \xrightarrow{\varphi} & u^*Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^*X & \xrightarrow{g} & k^*Y \end{array}$$

flèches verticales sont cartésiennes (i.e.  $\sigma^*g = \varphi$  à isomorphisme près)

1.5. Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  une catégorie fibrée localement petite, et

soit  $I$  un objet de  $\mathbb{B}$ . Si  $X, X', Y, Y'$  sont quatre objets de  $\mathbb{E}(I)$  et

$v: X' \rightarrow X, w: Y \rightarrow Y'$  deux flèches de  $\mathbb{E}(I)$ , on définit une

transformation naturelle  $\mathbb{B} \ni \phi_{X,Y} \rightarrow \phi_{X',Y'}$  en associant à

la flèche générique  $g$  de  $X$  vers  $Y$  au-dessus de  $I$  la flèche

$k^*w \circ g \circ k^*(v)$ . Ceci permet de définir une flèche que

nous noterons  $\text{Hom}_I(v, w): \text{Hom}_I(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_I(X', Y')$  dans  $\mathbb{B}/I$ .

1.6 Remarquons que si  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  est une catégorie fibrée localement petite  $\mathbb{E}$  n'est pas forcément petite: le contre-exemple le plus simple est  $\mathbb{E} = \text{Set} \rightarrow \mathbb{1}$ .

1.7 Un peu d'histoire:

m 15

$X, Y'$  over  $I$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow k_0 \\ \rightarrow k_0^* X & & \\ \rightarrow k_0^* Y' & & \text{over } K_0 \end{array}$$

$$K_0 = \text{Hom}_I(X, Y) \xrightarrow{k_0} I$$

$$K_1 = \text{Hom}_I(X', Y') \xrightarrow{k_1} I$$

Note on 1.3, 1.4

$\forall J, u:$

$$J \xrightarrow{\sigma} \text{Hom}_I(X, Y)$$

$$u^* \downarrow \swarrow \kappa$$

$$u^* X \xrightarrow{\sigma^* g} u^* Y$$

(ie over  $I$ , or in  $\mathbb{B}/I$ )

$J$  (ie, over  $J$ , or in  $\mathbb{E}(J)$ )

$\rightarrow \phi_{X', Y'}$  induced by

$$\rightarrow k_0^* w \cdot g \cdot k_0^* v : k_0^* X' \rightarrow k_0^* Y'$$

$$k_0^* X \rightarrow k_0^* Y$$

by think:

$\phi$  is induced [by isomorphism (1.3)] by

$$k_0^* X' \rightarrow k_0^* Y' \text{ as above}$$

uses  $\phi_{X, Y} \rightarrow \phi_{X', Y'}$  [by (1.3)]

note "Hom $_I(-, -)$  is contravariant

in the first argument and covariant in the second."

where  $g: k^* X \rightarrow k^* Y$  is

induced by  $\sigma = \text{id}: \text{Hom}_I(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_I(X, Y)$

$I$

2.1. Soit  $A$  une petite catégorie, et  $\text{Eus}(A) \xrightarrow{A} \text{Eus}$  la catégorie fibrée associée. Cette catégorie fibrée est localement petite : si  $X = (X_i)_{i \in I}$  et  $Y = (Y_i)_{i \in I}$  sont deux familles d'objets de  $A$  indexés par le même ensemble  $I$ , la famille d'ensembles  $(\text{Hom}(X_i, Y_i))_{i \in I}$  qui s'identifie à un objet de  $\text{Eus}/I$  représente le foncteur  $\mathcal{C}_{X,Y}$

2.2 généralisation : si la catégorie fibrée  $\mathcal{C}$  est une B. catégorie, elle est localement petite. Soient  $X : I \rightarrow \mathcal{C}_0$  et  $Y : I \rightarrow \mathcal{C}_0$  deux objets de  $\mathcal{B}\mathcal{C}(I)$  ; la flèche  $\text{Hom}_I(X, Y) \xrightarrow{k} I$  est définie par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_I(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 \\ k \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ I & \xrightarrow{(X, Y)} & \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \end{array}$$

(ce qui est bien naturel!) La vérification de la propriété universelle est immédiate (cf 2.3.1)

Proposition

2.3. La catégorie fibrée  $\mathcal{B}^2 \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{B}$  est localement petite si, et seulement si, elle a des B. produits. Ceci est vérifié en particulier si  $\mathcal{B}$  est un topos.

3.  $\mathcal{I}\mathcal{E}(I)$  catégorie relative à  $\mathcal{B}/I$

3.1 quand  $\mathcal{B}$  a des limites projectives finies  $\mathcal{B}/I$  a des produits et peut être considéré comme une catégorie multiplicative (1.19.3)

3.2 Soit  $\mathcal{I}\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée localement petite, et vérifions que pour tout objet  $I$  la fibre  $\mathcal{I}\mathcal{E}(I)$  a une structure de catégorie relative à  $\mathcal{B}/I$  : il suffit de définir pour chaque triplet  $(X, Y, Z)$  d'objets de  $\mathcal{I}\mathcal{E}(I)$  une flèche de  $\mathcal{B}/I$  :

$$\text{Hom}_I(X, Y) \times \text{Hom}_I(Y, Z) \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{Hom}(X, Z)$$



et pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{E}(I)$  une flèche de  $\mathbb{B}/I$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_I & \xrightarrow{i} & \text{Hom}_I(X, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & & I \end{array}$$

La flèche  $c$  est définie par la transformation naturelle  $\phi_{x,y} \circ \phi_{y,z} \xrightarrow{\bar{c}} \phi_{x,z}$  donnée, pour toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $\mathbb{B}$ , par la formule  $\bar{c}_u(\varphi, \psi) = \psi \circ \varphi$ , où  $\varphi: u^*X \rightarrow u^*Y, \psi: u^*Y \rightarrow u^*Z$  sont des flèches de  $\mathbb{E}(J)$ .

La flèche  $i$  est définie par la transformation naturelle  $\bar{i}: \{1\} \rightarrow \phi_{x,x}$  donnée par la formule  $\bar{i}_u = \text{id}_{u^*X}$  pour toute flèche  $u$  de but  $I$  de  $\mathbb{B}$ . (on peut aussi bien définir  $i, c$  avec les flèches génériques)

3.3 Une flèche  $v: I \rightarrow J$  détermine par produit fibré un foncteur  $v^*: \mathbb{B}/J \rightarrow \mathbb{B}/I$ . Le couple  $(v^*, v^{-1})$  est un foncteur relatif de la catégorie  $\mathbb{E}(J)$  relatif à  $\mathbb{B}/J$  dans la catégorie  $\mathbb{E}(I)$  relatif à  $\mathbb{B}/I$ .

3.4. Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{c'} \mathbb{B}$  deux catégories fibrées et  $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  un foncteur cartésien. Si  $c$  et  $c'$  sont localement petits,  $F$  induit pour chaque objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  un foncteur  $F(I): \mathbb{E}(I) \rightarrow \mathbb{E}'(I)$  qui est un foncteur relatif à  $\mathbb{B}/I$ : en effet, notons  $\Lambda_{x,y}: \phi_{x,y} \rightarrow \phi_{Fx, Fy}$  la transformation naturelle définie par:  $\Lambda_{x,y} \circ u(\varphi) = u^*Fx \xrightarrow{\sim} Fu^*x \xrightarrow{F\varphi} Fu^*y \xrightarrow{\sim} u^*Fy$  pour tout  $u: J \rightarrow I$  flèche de  $\mathbb{B}$  et tout  $\varphi: u^*x \rightarrow u^*y$  de  $\mathbb{E}(J)$ ;  $\Lambda_{x,y}$  détermine une flèche de  $\mathbb{B}/I$ , que nous noterons  $F(I)_{x,y}$  entre les représentants des foncteurs:

$$\begin{array}{ccc} F(I)_{x,y}: \text{Hom}_I(x, y) & \longrightarrow & \text{Hom}_I(Fx, Fy) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & & I \end{array}$$

#### 4 Fidélité

4.1 Proposition Soient  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathbb{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{c'} \mathbb{B}$  deux

. catégories fibrées localement petits et  $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  un foncteur cartésien. Le foncteur  $F$  est fidèle (resp: plein, resp: pleinement fidèle) si, et seulement si, pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{E}(I)$  la flèche  $F(I)_{X, Y}$  est un monomorphisme (resp: un épimorphisme avec section, resp: un isomorphisme).

4.2. La traduction de la proposition ci-dessus dans le cas de l'exemple 3.2.1 est claire et naturelle. (cf 2.5.4)

4.3 Démonstration.  $F(I)$  est fidèle (resp: plein, resp: pleinement fidèle) pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$  si, et seulement si, pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$  et pour tout couple d'objets  $X, Y$  de  $\mathcal{E}(I)$  la transformation naturelle  $\Lambda_{X, Y}$  est un monomorphisme (resp: un épimorphisme; resp: un isomorphisme) c'est-à-dire si, et seulement si, pour tout  $I$  de  $\mathcal{B}$  et pour tout couple d'objets  $X, Y$  de  $\mathcal{E}(I)$  la flèche  $F(I)_{X, Y}$  est un monomorphisme (resp: un épimorphisme avec section, resp: un isomorphisme). Le résultat est acquis grâce à 2.5.7.

### 5. B. logique <sup>théorie</sup>.

5.1 Soit  $\mathcal{O} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une B-logique (cf 2.13.1) et  $\phi: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{PrOrd}$  le pseudo-foncteur associé. Composons  $\phi$  avec le foncteur qui à un ensemble  $X$  préordonné associe l'ensemble  $X$  muni de l'ordre chaotique ( $x \leq y$  pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $X$ ); on obtient, par 2.4.3, une catégorie fibrée  $\mathcal{P} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{B}$  et un foncteur fidèle  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ ;  $\mathcal{P}$  est équivalente à la catégorie fibrée  $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ .

5.2 Remarquons que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}$  est une catégorie fibrée localement petite:  $\text{Hom}_I(X, Y) = \text{id}_I$  pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathcal{O} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une  $\mathcal{B}$ -logique localement petite.

Ensuite il existe d'après 3.5.1 une foncteur fidèle  $\alpha$  de

$\mathcal{B}$ -logique  $\mathcal{O} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B} = \mathcal{B}$  on déduit de 3.4.1

que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}(\mathcal{I})}^{c(c)}(X, Y)$  est un monomorphisme pour tout objet  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{B}$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{O}(\mathcal{I})$ .

Proposition:  
5.3.1 Soit  $\mathcal{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée localement petite

et  $\mathcal{O}(\mathcal{E}) \xrightarrow{c(c)} \mathcal{B}$  la  $\mathcal{B}$ -logique associée (cf 2.12.3). La

$\mathcal{B}$ -logique  $\mathcal{O}(\mathcal{E})$  est localement petite si, et seulement si,

pour tout objet  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{B}$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{E}(\mathcal{I})$

la flèche  $k: \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})}^c(X, Y)$  a une décomposition "épi-mono"  $k = i \circ \pi$ , où  $i$  est un monomorphisme,  $\pi$  un épimorphisme ayant une section  $s$ .

Démonstration. Comme le foncteur cartésien  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$  est plein la condition nécessaire résulte de 3.5.2 et 3.4.1.

Réciproquement, pour toute flèche  $u: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$  de  $\mathcal{B}$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{E}(\mathcal{I})$  si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})}^c(X, Y) & \xrightarrow{\pi} & \\ \downarrow k & \swarrow i & \\ \mathcal{I} & & \end{array}$$

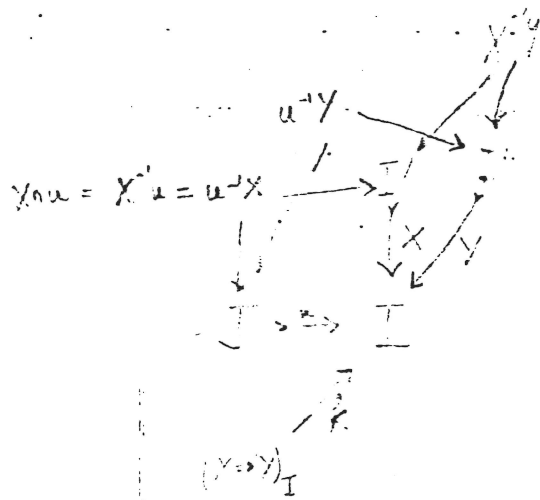
avec une section  $s: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}$ , on a  $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(u, i') \neq \emptyset$  équivalent à  $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(u, k) \neq \emptyset$ , i.e.  $\mathcal{E}(\mathcal{J})(u^*X, u^*Y) \neq \emptyset$  cette dernière condition étant équivalente à  $\mathcal{O}(\mathcal{E})(\mathcal{J})(u^*X, u^*Y) \neq \emptyset$ .

(la notation  $u^*$  étant prise successivement au sens de  $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ ). La flèche  $k \circ i$  est donc  $\text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})}^{c(c)}(X, Y)$

5.4. Exemple reprenons ce qui précède pour l'hypothèse donnée dans l'exemple 2.12.3. Si  $X$  et  $Y$  sont deux formules au-dessus de  $I$ ,  $\text{Hom}_I(X, Y)$  est l'ensemble des démonstrations au-dessus de  $I$  de  $Y$  à partir de  $X$ . La B. logique associée est localement petite quand on peut choisir une démonstration pour toute inférence. (c'est ce choix qui fait la section de  $\Pi$  dans la proposition précédente)

5.5 Terminons en examinant quand la B. logique canonique de  $B$ :  $\text{Mono}(B) \xrightarrow{\Omega} B$  est localement petite.

Pour tout monomorphisme  $u: J \rightarrow I$  de  $B$  et tout couple  $(X, Y)$  de monomorphismes de but  $I$  de  $B$  on trouve si  $\Omega$  est localement petite:  $B_{I'}(u, k) \cong B_{I'}(X^{-1}u, X^{-1}Y)$  et ce dernier ensemble est égal à  $B_{I'}(X \cap u, Y)$  où  $k$  désigne un représentant de  $\phi_{X, Y}$  et  $I'$  la source de  $X$ . Si  $\Omega$  est localement petite



$\Omega$   
(certain)  $\nu$   
 $k$

$B_{I'}(u, k)$

$B_{I'}(X^{-1}u, X^{-1}Y)$

$B_{I'}(X \cap u, Y)$  is easy.

• ~~Si  $\mathcal{B}$  est une catégorie~~, pour tout monomorphisme  $X$  de  $\mathcal{B}$  le foncteur  $X_{\cap} : \text{Mono}(\mathcal{B})(I) \rightarrow \text{Mono}(\mathcal{B})(I)$  a <sup>donc</sup> un adjoint à droite que nous notons  $X \rightarrow \cdot$ ; de plus, pour toute flèche  $v$  de  $\mathcal{B}$  on a  $\mathbb{B}_J(v, u^{-1}x \rightarrow u^{-1}y) \cong \mathbb{B}_J(v, u^{-1}x \rightarrow u^{-1}y) \cong \text{Mono}(\mathcal{B})(K) : (v^{-1}u^{-1}x, v^{-1}u^{-1}y) \cong \text{Mono}(\mathcal{B})(K) : ((uv)^{-1}x, (uv)^{-1}y) \cong \mathbb{B}_I(uv, x \rightarrow y) \cong \mathbb{B}_J(v, u^{-1}(x \rightarrow y))$  ce qui prouve la stabilité par image réciproque des foncteurs  $\rightarrow$ .

Réciproquement, si  $\mathcal{B}$  est telle que'il existe des foncteurs  $\rightarrow$  commutant aux images réciproques on a  $\mathbb{B}_I(u, x \rightarrow y) \cong \mathbb{B}_J(\text{id}_J, u^{-1}(x \rightarrow y)) \cong \mathbb{B}_J(\text{id}_J, u^{-1}x \rightarrow u^{-1}y) \cong \mathbb{B}_J(u^{-1}x, u^{-1}y)$  ce qui prouve que la catégorie fibrée  $\text{Mono}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathcal{B}$  est localement petite.

6 Construction dans la catégorie fibrée localement petite.

6.1 Produits de catégories fibrées localement petites. Soient

$\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  et  $\mathbb{E}' \xrightarrow{c'} \mathcal{B}$  deux catégories fibrées localement petites. Leur produit (cf 2.3.5) est une catégorie fibrée localement petite : pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$ , pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $\mathbb{E}(I)$  et tout couple  $(x', y')$  d'objets de  $\mathbb{E}'(I)$  tels que  $cx = c'x'$ ,  $cy = c'y'$  on a

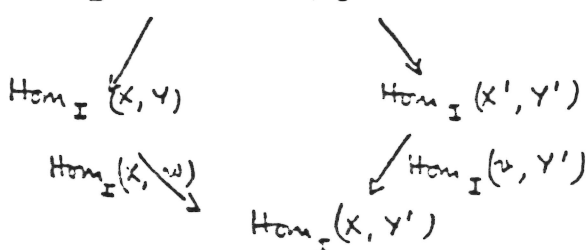
$$\text{Hom}_I^{c, c'}((x, x'), (y, y')) \cong \text{Hom}_I^c(x, y) \times_{\mathcal{B}_I} \text{Hom}_I^{c'}(x', y')$$

(le produit dans le second membre, pris au sens de  $\mathcal{B}_I$ , est obtenu par produit fibré.)

6.2. Soit  $\mathbb{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée localement petite. La catégorie fibrée  $\mathbb{E}^{(2)} \xrightarrow{c^2} \mathcal{B}$  est aussi localement petite.

Soit  $I$  un objet de  $\mathcal{B}$  et  $x \xrightarrow{v} x'$ ,  $y \xrightarrow{w} y'$  deux flèches de  $\mathbb{E}(I)$ , i.e. deux objets de  $\mathbb{E}^{(2)}(I)$ . Construisons

$\text{Hom}_I^{C^2} (X \xrightarrow{u} X', Y \xrightarrow{v} Y')$ . c'est l'égalisateur (dans  $\mathcal{B}/I$ ) de couple de flèches défini par le diagramme



où les deux flèches supérieures sont des projections et les flèches inférieures sont définies en 3.1.4. L'interprétation pour le cas de l'exemple 3.2.1 est claire.

6.3 La démonstration précédente se généralise facilement au cas de  $C^D$  où  $D$  est un type de diagramme de  $\text{Ens}$ . D'autre part il est clair que toute catégorie

fibrée  $\mathcal{E}' \xrightarrow{c'} \mathcal{B}$  telle qu'il existe un foncteur cartésien  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$  plinement fidèle est aussi localement petite. On en conclut:

Proposition: Soit  $\mathcal{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée localement petite,  $D$  un type de diagramme de  $\text{Ens}$ ,  $\mathcal{P}$  une catégorie de présentation finie,  $\mathcal{A}$  une théorie algébrique (1.15.2). Les catégories fibrées  $\mathcal{E} \xrightarrow{(D, D)} \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{E} \xrightarrow{(\mathcal{P}, \mathcal{P})} \mathcal{B}$  (construits en 2.8.4) sont localement petites. Si certains limites (cf 1.16.3) existent dans  $\mathcal{C}$ , on sait construire par (2.4.3) la catégorie fibrée  $\mathcal{E} \xrightarrow{(\mathcal{A})} \mathcal{B}$  et elle est localement petite.

7. ~~Autres objets Hom~~ Flèches génériques

7.1. Soit  $\mathcal{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée. Pour tout couple  $(I, J)$  d'objets de  $\mathcal{B}$ , tout objet  $X$  de  $\mathcal{E}(I)$ , tout objet  $Y$  de  $\mathcal{E}(J)$ , on définit un foncteur  $\Psi_{X, Y} : \mathcal{B}_{I \times J}^{op} \rightarrow \mathcal{E}_u$  par la formule  $\Psi_{X, Y}(u) = \mathcal{E}(k) (u_0^* X, u_1^* Y)$  pour toute flèche  $u = (u_0, u_1) : K \rightarrow I \times J$

Proposition: La catégorie fibrée  $\mathcal{E} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$  est localement petite si, et seulement si, pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{B}$

Le foncteur  $\Psi_{x,y}$  est représentable.

Si  $CX = I, CY = J$  nous notons  $\text{Hom}^C(X, Y) \rightarrow I \times J$  (ou

$\text{Hom}(X, Y)$ ) un représentant  $k = (k_0, k_1)$ ; la flèche  $g: k_0^* X \rightarrow k_1^* Y$  correspondant à  $\text{id}_k$  dans  $\mathcal{B}_{I \times J}$  et appelée flèche zéro de  $X$  dans  $Y$ .

Démonstration Supposons que  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{B}$  soit localement

petite, et soient  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{E}, CX = I, CY = J$ , et  $p_0: I \times J \rightarrow I, p_1: I \times J \rightarrow J$  les projections canoniques.

On a, pour toute flèche  $u = (u_0, u_1): K \rightarrow I \times J$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{x,y}(u) &= \mathcal{E}(K) (u_0^* X, u_1^* Y) \simeq \mathcal{E}(K) (u^* p_0^* X, u^* p_1^* Y) \\ &\simeq \mathcal{B}_{I \times J} (u, \text{Hom}_{I \times J}(p_0^* X, p_1^* Y)) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit  $I$  un objet de  $\mathcal{B}$  et  $x, y$  deux objets de  $\mathcal{E}(I)$ ; on obtient  $\text{Hom}_I(x, y) \rightarrow I$  par le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_I(x, y) & \longrightarrow & \text{Hom}(x, y) \\ \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \\ I & \xrightarrow{\text{diag}} & I \times I \end{array}$$

La vérification est immédiate. On remarquera que  $\text{Hom}_I(x, y)$  est un sous-objet de  $\text{Hom}(x, y)$  dans  $\mathcal{E}$ .

7.2. Exemples Reprenons l'exemple 3.2.1. Si  $X = (X_i)_{i \in I}$  et  $Y = (Y_j)_{j \in J}$  sont deux familles d'objets d'une petite catégorie  $\mathcal{A}$ , la famille d'ensembles  $(\mathcal{A}(X_i, Y_j))_{(i,j) \in I \times J}$  s'identifie à un objet de  $\mathcal{Eus}_{I \times J}$  représentant du foncteur  $\Psi_{x,y}$ .

à 3.2.2 la construction résultant de  $\Psi_{x,y}$   $X \in \mathcal{E}(I), Y \in \mathcal{E}(J)$  et donnée

7.3. Composition et unité. Reprenons 3.3.2 pour les

objets  $\text{Hom}(X, Y)$ , comme le suggère l'exemple ci-dessus.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(X, Y) & \longrightarrow & I \times J \\ \downarrow \text{p.f.} & & \downarrow \\ \mathcal{E}(I) & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathcal{E}(I \times J) \end{array}$$

Soit  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{B}$  une catégorie fibrée localement petite,  $X$  un objet de  $\mathcal{E}, I = CX$ . On définit une flèche de  $\mathcal{B}_{I \times I}$  de  $I \xrightarrow{\text{diag}} I \times I$  vers  $\text{Hom}(X, X)$  en composant l'unité, définie en 3.3.2, de  $\text{Hom}_I(X, X)$  avec le monomorphisme  $\text{Hom}_I(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$  ci-dessus.

D'autre part, soient  $X, Y, Z$  trois objets de  $\mathcal{E}, I = CX, J = CY, K = CZ$ ;  $k = (k_0, k_1), k' = (k'_0, k'_1)$  des représentants de

•  $\Psi_{x,y}, \Psi_{y,z}$  respectivement, et  $g: k_0^* x \rightarrow k_1^* y, g': k_0^* y \rightarrow k_1^* z$  les flèches génériques de  $x$  vers  $y$ , de  $y$  vers  $z$  respectivement. on peut définir une loi de composition :

$\text{Hom}(x,y) \times_J \text{Hom}(y,z) \rightarrow \text{Hom}(x,z)$ , où le premier membre note l'objet flèche  $(k_0 q, k_1 q')$  de  $\mathcal{B}/_{I \times K}$ ,  $q$  et  $q'$  étant définis

par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(x,y) \times_J \text{Hom}(y,z) & \xrightarrow{q'} & \text{Hom}(y,z) \\ q \downarrow & \text{P.f.} & \downarrow k' \\ \text{Hom}(x,y) & \xrightarrow{k_1} & J \end{array}$$

Il suffit pour cela de donner une image à la flèche  $\text{id} (k_0 q, k_1 q')$  de  $\mathcal{B}/_{I \times K}$  : ce sera le composé :  $q'^* (g') \circ q^* (g)$ .

Les flèches de composition et d'unité que nous venons de construire vérifient les propriétés habituelles.

Terminons par une digression :

7.4. Soit  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{B}$  une catégorie fibrée (seulement),  $x$  un objet de  $\mathcal{B}$ ,  $I = Cx$  ; on appelle sous-catégorie pleine engendrée par  $x$  dans  $\mathcal{E}$ , la catégorie fibrée  $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{B}$  telle que :

- pour tout objet  $J$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{E}'(J)$  a pour objets ensemble d'objets  $\mathcal{B}(J \rightarrow I)$
- si  $\eta: J \rightarrow I, \xi: K \rightarrow I$  sont des objets de  $\mathcal{E}'(J)$  et  $\mathcal{E}'(K)$  respectivement, une flèche dans  $\mathcal{E}'$  de  $\eta$  vers  $\xi$  est un couple  $(u, \varphi)$  où  $u: J \rightarrow K$  est une flèche de  $\mathcal{B}$  telle que  $\xi u = \eta$ , et  $\varphi: \eta^* x \rightarrow u^* \xi^* x$  une flèche de  $\mathcal{E}(J)$ .

on vérifie qu'on a bien construit une catégorie fibrée et qu'on a un foncteur cartésien pleinement fidèle  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$  défini par  $\eta \rightarrow \eta^* x$ .

Si  $A$  est une petite catégorie et  $X = (X_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $A$ , la sous-catégorie pleine engendrée



par  $X$  dans  $\text{Ens}(A) \xrightarrow{A} \text{Ens}$  a pour flèches  $\eta \rightarrow \xi$   
 les familles  $(\varphi_j)_{j \in J}$ , où  $\varphi_j$  est une flèche  $X_{\eta(j)} \rightarrow X_{\xi(j)}$   
 généralisons :

7.5. Théorème. Soit  $\mathcal{E} \xrightarrow{C} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée  
 localement petite,  $X$  un objet de  $\mathcal{E}$ ,  $I = C_X$ . La sous-catégorie  
 pleine engendrée par  $X$  dans  $\mathcal{E}$  est essentiellement petite (2.6.6).  
 Éléments Si  $k = (k_0, k_1) : \text{Hom}(X, X) \rightarrow I$  est un représentant  
 de  $\psi_{X, X}$ , elle est équivalente à la  $\mathcal{B}$ -catégorie  $C'$  telle que  
 $C'_0 = I$ ,  $C'_1 = \text{Hom}^C(X, X)$ , dont les flèches source et but sont  
 $k_0, k_1$ , la composition et l'unité étant définies par 3.7.3

En effet, si  $(u, \varphi)$  est une flèche  $\eta \rightarrow \xi$  dans  $\mathcal{B}(C')$ ,  
 i.e. telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\eta} & I \\ u \downarrow & \searrow \varphi & \uparrow k_0 \\ K & \xrightarrow{\xi} & \text{Hom}(X, X) \\ & & \downarrow k_1 \end{array}$$

elle s'identifie, par la propriété universelle de  $k$  à une  
 flèche  $(\xi u)^* X \rightarrow \eta^* X \rightarrow (\xi u)^* X$ , et les vérifications se  
 font sans difficulté.

### 8. Rappel: calcul de fraction.

Ce rappel sera utilisé en 3.9 et 3.10. Les détails sont  
 dans [ ] ch 1.

8.1 Théorème ([ ] p. 277) : Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie et  $\Sigma$  un ensemble  
 de flèches de  $\mathcal{A}$ . Il existe une catégorie, notée  $\mathcal{A}/\Sigma$ , et  
 un foncteur  $\mathcal{A}/\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\Sigma$  transformant les flèches de  $\Sigma$   
 en isomorphismes et tel que tout foncteur de source  $\mathcal{A}$   
 possédant la même propriété factorise par  $\mathcal{A}/\Sigma$  de manière  
 unique

Notons que  $\mathcal{A}/\Sigma$  a les mêmes objets que  $\mathcal{A}$ .

8.2. Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie. Un ensemble  $\Sigma$  de flèches de  $\mathcal{A}$  est dit admettre un calcul de fractions à droite si :

- $\Sigma$  contient les identités de  $\mathcal{A}$
- $\Sigma$  est stable par composition.
- pour chaque couple  $(\sigma, f)$  de flèches de  $\mathcal{A}$  de même but, si  $\sigma \in \Sigma$  il existe deux flèches  $\sigma', f'$  de  $\mathcal{A}$  telles que  $\sigma' \in \Sigma$  et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ \sigma' \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \sigma \\ & f & \end{array} \quad \text{commute.}$$

- pour chaque couple  $(f, g)$  de flèches de  $\mathcal{A}$ , s'il existe  $\sigma$  dans  $\Sigma$  telle que  $\sigma f = \sigma g$ , il existe  $\sigma'$  dans  $\Sigma$  telle que  $f \sigma' = g \sigma'$ .

8.3. Proposition ([ ] p14 duale de 2.4). Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie et  $\Sigma$  un ensemble de flèches de  $\mathcal{A}$  admettant un calcul de fractions à droite. La description des flèches de  $\mathcal{A}/\Sigma$  est simple : une flèche dans  $\mathcal{A}/\Sigma$  d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  vers un objet  $Y$  de  $\mathcal{A}$  est un couple  $(\sigma, f)$  où  $\sigma \in \Sigma$  (précisément : une classe d'équivalence de tels couples) tels que :

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \sigma \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

Proposition 8.4. Soit  $\mathcal{I} \xrightarrow{C} \mathcal{B}$  une catégorie fibrée, et  $S$  un ensemble de flèches de  $\mathcal{B}$  admettant un calcul de fractions à droite. La classe  $\Sigma$  des flèches de  $\mathcal{I}$  cartésiens au-dessus d'une flèche de  $S$  admet un calcul de fractions à droite.

~~Ceci résulte des définitions de 2.1.~~

Vérifions-le. Soit  $\sigma: S^*X \rightarrow X$  une flèche cartésienne au-dessus d'une flèche  $s: J \rightarrow I$  de  $S$

. Si  $\varphi: Y \rightarrow X$  est une flèche de  $\mathbb{E}$ , il existe une flèche  $s'$  de  $S$  de but  $CY$  et une flèche  $u'$  de  $B$  tels que  $Su' = C\varphi s'$ . Il existe donc une flèche cartésienne  $\sigma'$  de but  $CY$  au-dessus de  $s'$  et une flèche  $\varphi'$  de  $\mathbb{E}$  tels que :  $\sigma\varphi' = \varphi\sigma'$ .

. Si  $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$  sont deux flèches de  $\mathbb{E}$  tels que  $\sigma\varphi = \sigma\psi$ , il existe une flèche  $s'$  de  $S$  de but  $CY$  telle que  $C\varphi s' = C\psi s'$ ; si  $\sigma'$  est une flèche cartésienne au-dessus de  $s'$ , de but  $CY$ , on a  $\varphi\sigma' = \psi\sigma'$ .

### 9. Changement de base

Notation : en 3.9 et 3.10  $U$  notera un foncteur  $B \rightarrow B'$  commutant aux limites projectives finies.

9.1. Introduction : Nous avons vu (1.3.2) que  $U$  s'étend en un foncteur  $cat(B) \rightarrow cat(B')$ . Le but de ce numéro est de démontrer :

9.2. Théorème. Le foncteur  $U: B \rightarrow B'$  s'étend en un foncteur  $Fib(B) \rightarrow Fib(B')$ , noté encore  $U$ , adjoint à gauche, modulo à une équivalence de catégories, du foncteur image réciproque par  $U$  :  $U^{-1}: Fib(B') \rightarrow Fib(B)$

défini par  $\begin{matrix} \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \\ \downarrow U \\ \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \end{matrix}$  (cf 2.1.7)

Plus précisément, il existe des transformations naturelles des foncteurs  $Cart_{B'}(U \cdot, \cdot) \xrightarrow{\text{vers } \mathcal{B} \text{ foncteur}} Cart_B(\cdot, U^{-1} \cdot) : Fib(B) \times Fib(B') \rightarrow Cat(Eus)$ , et réciproquement, définissant, pour tout couple de catégories fibrées  $\mathcal{E} \hookrightarrow B, \mathcal{E}' \hookrightarrow B'$  une équivalence entre les catégories  $Cart_B(\mathcal{C}, U^{-1}\mathcal{C}')$  et  $Cart_{B'}(U\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  :

9.3. Exemple et motivation. On pensera souvent dans ce qui suit à une catégorie fibrée  $\mathcal{E} \hookrightarrow B$  comme à une  $B$ -catégorie "trop grosse pour exister" (cf 2.3.4) ; un objet  $x$  au-dessus d'un objet  $I$  de  $B$  sera pensé comme une flèche de  $I$  vers un objet  $c_0$  virtuel de  $B$ , ce que nous traduirons par la notation  $I \overset{x}{\rightarrow} c_0$

Si  $\mathcal{E} \hookrightarrow B$  est une  $B$ -catégorie et  $I'$  un objet de  $B'$ , un objet de  $B'(U\mathcal{C})(I')$ , qui est une flèche  $I' \rightarrow U c_0$

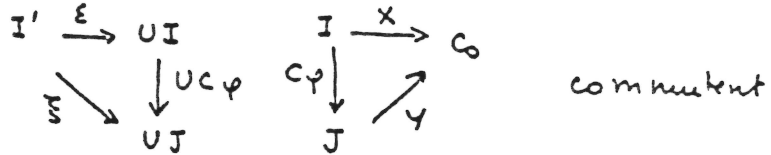
(2.3.1) peut être vu comme un composé

$I' \xrightarrow{\epsilon} UI \xrightarrow{Ux} U c_0$ , où  $x$  est un objet de  $\mathcal{E}$  tel que  $Cx = I$ .

(ici  $x = id_{c_0}$ ). Cette remarque nous conduit à considérer

l'ensemble des objets de  $\mathcal{B}'(UC)(I')$  comme le quotient de l'ensemble de couples  $(E, x) : E : I' \rightarrow UI, I = Cx$  par la relation d'équivalence:  $(E, x)$  équivaut à  $(E, y)$  s'il existe  $\varphi : x \rightarrow y$  dans  $\mathcal{E}$  telle que les diagrammes

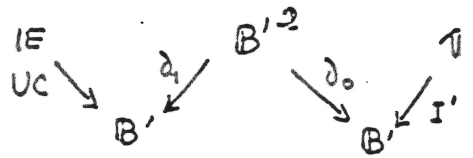
Suffisamment  $\varphi \rightarrow x$  etc :



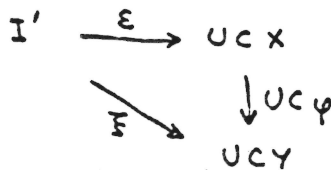
(donc telle que  $x = (C\varphi)^* y$ )

9.4 Cas général. Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  une catégorie fibrée.

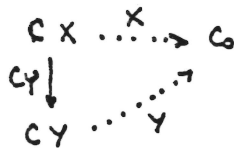
Pour tout objet  $I'$  de  $\mathcal{B}'$ , notons  $(I', UC)$  la comma-catégorie limite projective du diagramme:



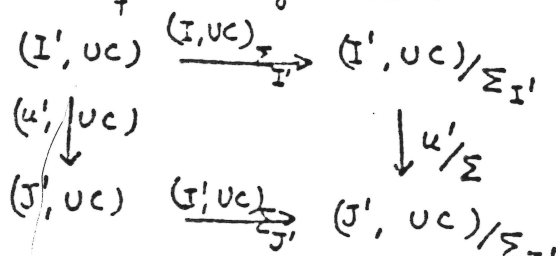
dont les objets sont les couples  $(E, x)$  formés d'un objet  $x$  de  $\mathcal{E}$  et d'une flèche  $E : I' \rightarrow UCx$ , une flèche de  $(E, x)$  vers  $(E, y)$  dans  $(I', UC)$  étant un couple  $(\varphi, UC\varphi)$  où  $\varphi$  est une flèche  $x \rightarrow y$  de  $\mathcal{E}$  telle que:



commute. On note  $\Sigma_{I'}$  l'ensemble des flèches de  $(I', UC)$  définis par des flèches  $\varphi : x \rightarrow y$  cartésiennes (i.e. tels que



"commute"). Soit  $u' : J' \rightarrow I'$  une flèche de  $\mathcal{B}'$ ; elle définit (3.8.1) un foncteur  $u' / \Sigma : (I', UC) / \Sigma_{I'} \rightarrow (J', UC) / \Sigma_{J'}$  rendant commutatif le diagramme:



La catégorie fibrée sur  $B'$  associée au pseudo-foncteur  $B'^{op} \rightarrow \text{Cat}(\text{Ens})$  défini par  $I' \rightarrow (I', UC) / \Sigma_{I'}$ ,  $u' \rightarrow u' / \Sigma$  est la catégorie fibrée  $UC$  que nous cherchons. Enfin il faut définir  $U$  sur les foncteurs cartésiens: on utilisera 3.8.1.

9.5 Equivalence des catégories Soient  $I \xrightarrow{c} B$  et  $I' \xrightarrow{c'} B'$  deux catégories fibrées.

Soit  $F = (F_0, F_1)$  un foncteur cartésien  $I \rightarrow I' \times_{B'} B$ ; on lui associe le foncteur cartésien  $\bar{F} : UI \rightarrow UI'$  en posant pour un représentant  $(\varepsilon, x)$ ,  $\varepsilon : I' \rightarrow UCx$ , d'un objet de la fibre  $UI(I')$   $\bar{F}(\varepsilon, x) = \varepsilon^* F_0 x$ .

Soit  $G$  un foncteur cartésien  $UI \rightarrow UI'$ . On lui associe le foncteur  $\bar{G} : I \rightarrow I' \times_{B'} B$  en posant  $\bar{G}x = (G(\text{id } UCx, x), Cx)$ .

La fin de la vérification du théorème 3.9.2 est un calcul laissé au lecteur.

9.6. U commute aux produits.

Soit  $(I_i \xrightarrow{c_i} B)_{i \in I}$  une famille finie de catégories fibrées. Le <sup>foncteur cartésien</sup> ~~foncteur~~ canonique  $U(\prod_{i \in I} I_i) \rightarrow \prod_{i \in I} (UI_i)$  est un isomorphisme.

10. Conservation de la petitesse locale par changement de base.

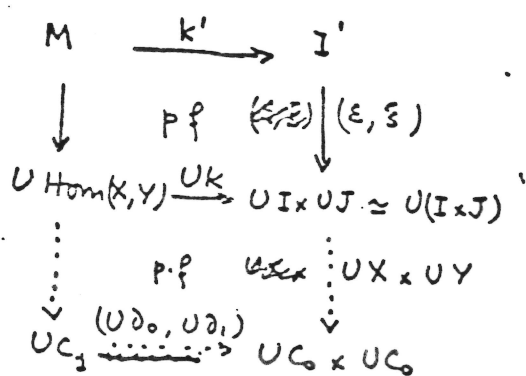
10.1 Théorème Soit  $I \xrightarrow{c} B$  une catégorie fibrée localement petite; la catégorie fibrée  $UI \xrightarrow{Uc} B'$  est localement petite.

10.2 Lemme. L'ensemble  $\Sigma_{I'}$  de flèches de la catégorie  $(I', UC)$  admet, pour tout objet  $I'$  de  $B'$ , un calcul de fractions à droite.

Ceci résulte de l'existence de produits fibrés et d'égalité dans  $\mathcal{D}$ .

10.3 Démonstration du théorème. Soient  $I'$  un objet de  $\mathcal{B}'$ , et  $(\mathcal{E}, X), (\mathcal{F}, Y)$  deux objets de  $U\mathcal{E}(I')$  :  $\mathcal{E} : I' \rightarrow UCX$ ,  $\mathcal{F} : I' \rightarrow UCY$ , et posons  $I = CX, J = CY$ . Il faut montrer que le foncteur  $\Phi_{(\mathcal{E}, X), (\mathcal{F}, Y)}$  est représentable (3.1.2)

Considérons le diagramme:



où:  $k = (k_0, k_1)$  est un représentant de  $\Psi_{X, Y}$  (3.7.1), la partie inférieure virtuelle (3.9.3 et 3.7.2), la partie supérieure toujours définie.

Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une  $\mathcal{B}$ . catégorie la partie inférieure est "viable", le composé  $UX \times UY (\mathcal{E}, \mathcal{F})$  est égal à  $(UX \circ \mathcal{E}, UY \circ \mathcal{F})$ . D'après 3.2.2  $k' : M \rightarrow I'$  est donc  $\text{Hom}_{I'}(UX \circ \mathcal{E}, UY \circ \mathcal{F})$ . Nous allons vérifier que dans le cas général il en est de même,  $k'$  étant définie par la partie supérieure du diagramme ci-dessus.

Soit  $u' : J' \rightarrow I'$  une flèche de  $\mathcal{B}'$  et  $\gamma : u'^*(\mathcal{E}, X) \rightarrow u'^*(\mathcal{F}, Y)$  une flèche de  $U\mathcal{E}(J')$ . D'après 3.10.2 il existe un objet  $(J, Z)$  de  $U\mathcal{E}(J')$  et des flèches  $\psi : Z \rightarrow X, \psi : Z \rightarrow Y$ , la première cartésienne, définissant un représentant de  $\gamma$  dans  $(J', UC)_{\Sigma_{J'}}$ , c'est-à-dire tels que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 I' & \xrightarrow{\varepsilon} & UI \\
 \uparrow u' & & \uparrow U\psi \\
 J' & \xrightarrow{\zeta} & UK \\
 \downarrow u' & & \downarrow U\psi \\
 I' & \xrightarrow{\varepsilon} & UI
 \end{array}$$

commute. La flèche  $\psi$  définit une flèche  $(C\psi)^*x \rightarrow (C\psi)^*y$ , donc, d'après 3.7.1, une flèche  $\theta: K \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$  telle que  $k\theta = (C\psi, C\psi)$ ; on a donc  $Uk \circ \theta \circ U\zeta = (\varepsilon, \varepsilon) u'$  et on a une flèche de  $u'$  vers  $k'$  dans  $B_{A'}$ . La fin des calculs ne pose pas de problèmes.

11 Foncteurs d'une B. catégorie dans une catégorie fibre

11.1 B. préfaisceau. Soit  $C = (C, \eta, \rho)$  une B. catégorie. Un

B. préfaisceau sur  $C$  est un distributeur  $C \dashrightarrow 1$  (cf 1.18) où  $1$  est la B. catégorie finale. Explicitons: un B. préfaisceau sur  $C$  est donc un couple de flèches  $(p, \theta)$ , où  $p: M \rightarrow C_0$  et une flèche de  $B$ , définissant le produit fibre:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\delta_0} & M \\
 q \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow P \\
 C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0
 \end{array}$$

These presheaves are covariant. Objects remain the same as in  $C$ , but  $\delta_0$  by  $\delta_1$ .

et  $\theta: M \times_{C_0} C_1 \rightarrow M$  une flèche de  $B$  telle que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\theta} & M \\
 q \downarrow & & \downarrow P \\
 C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0
 \end{array}
 \quad \cong \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{(M, \eta, P)} & M \times_{C_0} C_1 \\
 & & \downarrow \theta \\
 & & M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{M \times P} & M \times_{C_0} C_1 \\
 \downarrow \theta \times q & & \downarrow \theta \\
 M \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\theta} & M
 \end{array}$$

commutent (on peut dire aussi que  $\theta$  est une algèbre sur un certain triple, cf [7])

Kock & Whith.

(Thinking  $M_0 = M, M_1 = M \times_{C_0} C_1, \delta_0$  as above,  $\delta_1 = \theta$ )



La notion de transformations naturelle entre B. préfaisceaux est évidente.

11.2. Exemple : si A est une petite catégorie, un Eus. préfaisceau sur A est un foncteur  $F: A \rightarrow \text{Eus}$ .  
 On retrouve la description précédente en posant  $M = \coprod_{A \in A_0} FA$   
 et, p la flèche évidente  $M \rightarrow A_0$  et  $\theta: M \times_{A_0} A_1 \rightarrow M$   
 la flèche telle que  $\theta(x, f) = F(f)(x)$  pour  $f: A \rightarrow A'$   
 et  $x \in FA$ .

11.3. Seconde définition des B. préfaisceaux comme foncteurs.

si  $(p, \theta)$  est un B. préfaisceau sur C au sens de

3.11.1: on lui associe un foncteur cartésien  $F: B(C) \rightarrow B^2$   
 de la façon suivante: soit I un objet de B et  
 $Fx$  est la flèche  $x^{-1}(p)$  de  $B/I$  définie par produit fibre:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & M \\ x^{-1}p \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\cdot x} & C_0 \end{array}$$

d'autre part, soient x, y deux objets de B(C),  $I = Cx, J = Cy$   
 et soit  $(u, \varphi): x \rightarrow y$  une flèche de B(C); la flèche  
 $F(u, \varphi)$  est une flèche  $x^{-1}(p) \rightarrow y^{-1}(p)$  de  $B^2$  au-dessus de u;  
 elle est définie par la flèche  $x^{-1}p \rightarrow (Yu)^{-1}(p)$  de  $B/I$   
 factorisation par  $(Yu)^{-1}M$  du couple  $(x^{-1}p, \theta q^{-1}(p))$   
 (où  $q = \varphi_0^{-1}(p)$ ).  $(\varphi, p)^{-1}M$

si F est un foncteur cartésien  $B(C) \rightarrow B^2$   
 on lui associe un B. préfaisceau  $(p, \theta)$  de la manière en posant  
 $p = F(\text{id } C_0)$ ,  $\theta(\partial_1, \theta) = F(\partial_1, \text{id } C_1)$

soit  $C$  une  $B$ -catégorie  
Proposition: Les deux opérations précédentes définissent  
 une équivalence entre la catégorie des  $B$ -préfaïceaux sur  $C$   
 et la catégorie des foncteurs cartésiens  $B(C) \rightarrow B^2$ .

11.4. Soit  $C$  une  $B$ -catégorie et  $c': I \rightarrow B$  une  
 catégorie fibrée. Nous appellerons foncteur de  $C$  vers  $c'$  un  
 foncteur cartésien  $B(C) \rightarrow I$ . En raisonnant comme ci-  
 dessus, on voit qu'on peut aussi bien se donner un objet  $M$   
 de  $I$  au-dessus de  $C_0$ , une flèche  $\theta: \delta_0^* M \rightarrow M$  au-dessus de  
 $\delta_1$  vérifiant des propriétés analogues à celles indiquées en  
 3.11.1 (les <sup>foncteurs</sup> images réciproques ~~sur~~ de  $I$  se substituant  
 aux produits fibrés).

11.5 Composition. Soient  $C, C''$  deux  $B$ -catégories,  $c': I' \rightarrow B$   
 $c'': I'' \rightarrow B$  deux catégories fibrées. Il

est clair qu'on peut composer un foncteur de  $C$  vers  $c'$  avec  
 un  $B$ -foncteur de  $C''$  vers  $C$  pour obtenir un foncteur  
 de  $C''$  vers  $c'$ ; <sup>il suffit de composer des foncteurs cartésiens.</sup> d'autre part on peut composer un foncteur de  
 $C$  vers  $c'$  avec un foncteur ~~de  $c'$~~  cartésien  $I' \rightarrow I'$ ; on  
 obtient ainsi des foncteurs  $C'' \rightarrow c'$ ,  $C \rightarrow C''$ .

Ainsi un  $B$ -préfaïceau sur  $C$  peut être  
 composé avec un foncteur cartésien  $B^2 \rightarrow B^2$  pour  
 donner un autre  $B$ -préfaïceau <sup>contrairement</sup>. On notera qu'un  
 foncteur  $B \rightarrow B$  ne détermine pas nécessairement un  
 foncteur <sup>cartésien</sup> ~~de  $B$~~  de la catégorie fibrée  $B^2 \rightarrow B$  dans  
 elle-même. C'est cependant le cas si  $B = I$  ou si  $F$

et un foncteur  $\mathbb{E}us \rightarrow \mathbb{E}us$ , il définit un foncteur cartésien  $\bar{F}: \mathbb{E}us^2 \rightarrow \mathbb{E}us^2$  en posant  $\bar{F}((X_i)_{i \in T}) = (\bar{F} X_i)_{i \in T}$ .  
 Tous les foncteurs rencontrés sont construits explicitement dans la théorie & topos  
 proarienne et foncteurs cartésiens  $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$   
12 Morphismes géométriques de topos.

12.1 Introduction. Soient  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{B}'$  deux topos et  $U: \mathbb{B}' \rightarrow \mathbb{B}$  un foncteur. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante, portant sur la catégorie fibrée  $U^{-1}(\mathbb{B}) := \mathbb{B}' \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}'$  image réciproque par  $U$  de la catégorie fibrée  $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathbb{B}$ , pour que  $U$  soit un morphisme géométrique de topos (i.e. commute aux limites projectives finies et a un adjoint à droite; cf [ ])

12.2 Schéma de compréhension Une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  satisfait le schéma de compréhension si elle a des objets finaux (au sens de 2.9.1 : pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  il existe un objet <sup>final</sup>, que nous noterons  $V_I$ , de  $\mathbb{E}(I)$ , et pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  de  $\mathbb{B}$  on a  $u^*(V_J) \cong V_I$ ) et si pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  et tout objet  $x$  de  $\mathbb{E}(I)$ ,  $\text{Hom}_I(V_I, x)$  existe.  
 Si  $C$  a des <sup>en outre</sup>  $\mathbb{B}$ -connexes, on a,  $\mathbb{B}$  pour toute flèche  $u: I \rightarrow J$  et tout objet  $x$  de  $\mathbb{E}(J)$  :

$$\mathbb{B}_{/I}(u, \text{Hom}_I(V_I, x)) \cong \mathbb{E}(J)(V_J, u^*x) \cong \mathbb{E}(I)(\coprod_u V_J, x)$$

et on retrouve la définition de [ ] p 12.

Proposition : Une catégorie fibrée  $\mathbb{E} \xrightarrow{C} \mathbb{B}$  cartésienne fermée (cf 2) satisfait le schéma de compréhension si, et seulement si, elle est localement petite.

En effet, si  $C$  satisfait le schéma de compréhension, pour tout objet  $I$  de  $\mathbb{B}$  et tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $\mathbb{E}(I)$  le foncteur  $\Phi_{x, y}$  est représentable

$$(idem) \quad \text{Hom}_I(x, y) \cong_{\mathbb{B}} \text{Hom}_I(V_I, Y^x)$$

puisque, pour toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $\mathcal{B}$  on a  

$$\mathbb{E}(J) (u^*X, u^*Y) \cong \mathbb{E}(J) (v_j, u^*Y \overset{u^*X}{\dashv}) \cong \mathbb{E}(J) (u^*(v_I), u^*(Y^X)) \cong \mathbb{B}_{/I}(u, \text{Hom}_I(v_I, Y^X))$$

12.3 Théorème : Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux topos et  $U: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur.  $U$  définit un morphisme géométrique de topos si, et seulement si,  $U \overset{U^* \dashv U}{\cong} \text{id}$  et la catégorie fibrée  $U^{-1}(\mathcal{B})$  est de Chevalley et satisfait le schéma de compréhension.

Démonstration : D'abord  $U^{-1}(\mathcal{B})$  est de Chevalley si, et seulement si,  $U$  commute aux produits fibrés : supposons que  $U^{-1}(\mathcal{B})$  soit de Chevalley, et soit

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & J' \\ v' \downarrow & \text{pf} & \downarrow v'' \\ I'' & \xrightarrow{u''} & J'' \end{array}$$

un carré cartésien de  $\mathcal{B}'$ ; la condition de Chevalley donne pour l'objet  $(J', \text{id } UJ')$  montre que

$$\begin{array}{ccc} UI' & \xrightarrow{Uu'} & UJ' \\ Uv' \downarrow & & \downarrow Uv'' \\ UI'' & \xrightarrow{Uu''} & UJ'' \end{array}$$

(see facing pg) est un produit fibré. La réciproque est immédiate.

D'autre part si  $U^{-1}(\mathcal{B})$  satisfait le schéma de compréhension, pour tout objet  $I'$  de  $\mathcal{B}'$  et tout objet  $J$  de  $\mathcal{B}$  on a  

$$\mathbb{B}(UI', J) \cong \mathbb{B}_{/1}(UI' \rightarrow 1, J \rightarrow 1) \cong \mathbb{B}_{/1}(U(I' \rightarrow 1), J \rightarrow 1) \cong \mathbb{B}'_{/1}(I' \rightarrow 1, \text{Hom}_1(\text{id } 1, J \rightarrow 1)) \cong \mathbb{B}'(I', \text{Hom}_1(\text{id } 1, J \rightarrow 1))$$
 puisque 'un topos a des  $\mathbb{B}$ -produits (cf 3.2.3).

Some needed surely, by 12.2 on p 61)

Réciproquement si  $U$  a un adjoint à droite  $U'$ ,  $U^{-1}(\mathcal{B})$  est localement petite : si  $(I', X), (I', Y)$  sont deux objets de  $(\mathcal{B}', U)$ ,  $UI' = \partial_1 X = \partial_1 Y$ ,  $\text{Hom}_{U^{-1}(\mathcal{B})}((I', X), (I', Y))$  est

$$\mathbb{B}'(U) \dashv U^{-1}(\mathcal{B})$$

part for 123. The Chevalley cond<sup>n</sup> says that

$$\begin{array}{ccc}
 U' B_I & \xleftarrow{u'} & U' B_J \\
 \downarrow v'_* & & \downarrow v''_* \\
 U'' B_{I''} & \xleftarrow{u''_*} & U'' B_{J''}
 \end{array}
 \quad \text{commutes}$$

where  $u'_*$  is "pb along  $Uu'$ "

(ditto  $u''_*$ ,  $v''_*$  resp)

$v'_*$  is "compose with  $Uv'$ "

So, evaluating at  $\langle UI', UJ' \Rightarrow UI' \rangle$  :

$$\begin{aligned}
 v'_* u'_* (UI' \Rightarrow UJ') &= v'_* (UI' \Rightarrow UI') \\
 &= UI' \xrightarrow{Uv'} UI'' \\
 u''_* v''_* (UJ' \Rightarrow UJ') &= u''_* (UJ' \xrightarrow{Uv''} UJ'') \\
 &= \text{pb} \begin{array}{ccc} \longrightarrow & & UJ' \\ \downarrow & & \downarrow Uv'' \\ UI'' & \xrightarrow{Uu''} & UJ'' \end{array}
 \end{aligned}$$

ie the pb =  $UI'$ , etc., as claimed.

Note the Chevalley cond<sup>n</sup> says precisely that the outer rectangle is a pb in  $\mathcal{B}$  if the top one is (and, of course, if the given one in  $\mathcal{B}'$  is) :

$$\begin{array}{ccc}
 I & \longrightarrow & J \\
 \downarrow u' & & \downarrow \\
 UI' & \xrightarrow{Uu'} & UJ' \\
 \downarrow Uv' & & \downarrow Uv'' \\
 UI'' & \xrightarrow{Uu''} & UJ''
 \end{array}$$

Hence the converse.

construit par :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{I'}((I', X), (I', Y)) & \longrightarrow & U' \text{Hom}_{U(I')} (X, Y) \\
 \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow U'(k) \\
 (*) \quad I' & \xrightarrow{\eta_{I'}} & U' U(I')
 \end{array}$$

où  $k$  est un représentant du foncteur  $\Phi_{X,Y}$  et  $\eta_{I'}$  la transformation naturelle donnée par l'adjonction.

La vérification est immédiate. (voir local isomorphism of  $\frac{B^2}{I}$ ,  $U \rightarrow U'$  and the pt property for  $(*)$ )

### 13. Quelques relations

13.1 Soit  $I \xrightarrow{c} B$  une catégorie de Chevalley localement petite telle que les foncteurs images réciproques dans  $B$  aient des adjoints à droite (si  $u: J \rightarrow I$  est une flèche de  $B$ , on note  $\Pi_u: B_{/J} \rightarrow B_{/I}$  l'adjoint à droite de  $u^*$ ) on a la formule :

$$\text{Hom}_I \left( \coprod_u Y, X \right) \simeq \Pi_u \text{Hom}_J (Y, u^* X)$$

pour toute flèche  $u: J \rightarrow I$  de  $B$ , tout objet  $X$  au-dessus de  $I$  et tout objet  $Y$  au-dessus de  $J$ .

En effet pour toute flèche  $v: I' \rightarrow I$  de  $B$  on définit le produit fibre :

$$\begin{array}{ccc}
 J' & \xrightarrow{u'} & I' \\
 v' \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow v \\
 J & \xrightarrow{u} & I
 \end{array}$$

et on a  $B_{/I} (v, \text{Hom}_I (\coprod_u Y, X)) \simeq IE(I') (v^* \coprod_u Y, v^* X)$   
 $\simeq IE(I') (\coprod_{u'} v'^* Y, v^* X) \simeq IE(J') (v'^* Y, (vv')^* X) \simeq$   
 $IE(J') (v'^* Y, (uv')^* X) \simeq B_{/J} (\coprod_{u'} v'^* Y, \text{Hom}_J (Y, u^* X)) \simeq B_{/I} (v, \Pi_u \text{Hom} (Y, u^* X)).$

13.2 Réciprocité: Si une catégorie fibrée  $E \rightarrow B$  est cofibrée, localement petite et, vérifie  $B$  est une catégorie abélienne et si les adjoints à droite des foncteurs images réciproques existent dans  $B$ ,  $C$  est un chevalley.

13.3 La formule dual de 3.13.1 :

$$\text{Hom}_I(X, \coprod_{i \in I} Y) \simeq \prod_{i \in I} \text{Hom}_I(u^* X, Y)$$

est vraie, l'hypothèse d'existence de  $B$  comme au 3.13.1 étant remplacée par l'existence de  $B$  produit.

13.4. Exemple. Reprenons l'exemple 2.11.5. Si  $u$  est une flèche  $J \rightarrow I$ , on retrouve la formule des sommes

$$\text{Hom}\left(\coprod_{i \in I} Y_i, X\right) \simeq \prod_{j \in J} \text{Hom}(Y_j, X)$$

13.5 Loi de Réciprocité de Frobenius.

Soit  $E \xrightarrow{S} B$  une catégorie fibrée et cofibrée; supposons qu'il existe une fonction cartésienne  $\otimes : C \times C \rightarrow C$  qui lui donne une structure de catégorie cartésienne fermée

~~13.5.1~~ Loi de Réciprocité: pour tout objet  $I$  de  $B$ , tout objet  $u : J \rightarrow I$  de  $E$ , tout objet  $X$  au-dessus de  $I$ , tout objet  $Y$  au-dessus de  $J$  on a :

$$\left( \coprod_{u^*} Y \right) \otimes X \simeq \prod_{u^*} (Y \otimes u^* X)$$

13.6. De plus, à fonction  $\otimes$  commutative  $B$ -donnée, on a les suivantes : pour toutes flèches  $u : I \rightarrow I'$ ,  $v : J \rightarrow J'$  de  $B$  et tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $E$  tels que  $I = C_X$ ,  $J = C_Y$

on a :

$$\prod_{u \times v} (p^* X \otimes q^* Y) \simeq p'^* \prod_{u \times v} X \otimes q'^* \prod_{v} Y$$

où  $p : I \times J \rightarrow I$ ,  $q : I \times J \rightarrow J$ ,  $p' : I' \times J' \rightarrow I'$ ,  $q' : I' \times J' \rightarrow J'$  sont les projections canoniques.

Vérifions la loi de Réciprocité; pour tout objet  $Z \in |E|$

on a :

$$E(I) \left( \prod_{u^*} Y \otimes X, Z \right) \simeq E(I) \left( \prod_{u^*} Y, Z^{\otimes X} \right) \simeq E(J) \left( Y, Z^{\otimes u^* X} \right)$$

$$\simeq \mathbb{E}(J) (Y \otimes u^* X, v^* Z) \simeq \mathbb{E}(I) \left( \prod_u (Y \otimes u^* X), Z \right).$$

Pour la vérifier le second isomorphisme, utilisons la notation définie dans le produit fibré suivants :

$$\begin{array}{ccc} I' \times J & \xrightarrow{I' \times v} & I' \times J' \\ q' \downarrow & & \downarrow q' \\ J & \xrightarrow{v} & J' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \times J' & \xrightarrow{u \times J'} & I' \times J' \\ p' \downarrow & & \downarrow p' \\ I & \xrightarrow{u} & I' \end{array}$$

on a, pour tout objet  $Z$  de  $\mathbb{E}(I' \times J')$  :

$$\mathbb{E}(I' \times J') \left( p'^* \prod_u X \otimes q'^* \prod_v Y, Z \right) \simeq \mathbb{E}(I' \times J')$$

où  $p'', q''$  sont les projections ~~primitives~~ canoniques; on a :

$$\begin{aligned} \prod_{u \times v} (p^* X \otimes q^* Y) &\simeq \prod_{I' \times v} \prod_{u \times J'} (p^* X \otimes (u \times J')^* q'^* Y) \\ &\simeq \prod_{I' \times v} \left( \prod_{u \times J'} p^* X \otimes q'^* Y \right) \quad (\text{Frobenius}) \\ &\simeq \prod_{I' \times v} \left( p'^* \prod_u X \otimes q''^* Y \right) \\ &\simeq \prod_{I' \times v} \left( (I' \times v)^* p'^* \prod_u X \otimes q''^* Y \right) \\ &\simeq p'^* \prod_u X \otimes \prod_{I' \times v} q''^* Y \quad (\text{Frobenius}) \\ &\simeq p'^* \prod_u X \otimes q'^* \prod_v Y. \end{aligned}$$

13.7. Exemple. Pour l'exemple 3.12.3 ~~la loi de~~  
~~primitives~~ sont : la loi de réciproque est  $\exists x (Rxy \text{ et } Sy)$   
 $\leftrightarrow \exists x (Rxy) \text{ et } Sy$ , et la formule 3.13.6  $\exists x \exists y (Rx \text{ et } Sy)$   
 $\leftrightarrow \exists x Rx \text{ et } \exists y Sy$ .

13.8. Exemple.



#### 14. Une question de Mikkelsen

14.1. Présentation. Nous terminons le paragraphe 3 en donnant quelques idées sur les utilisations possibles des techniques que nous venons de ~~construire~~ décrire. Nous remarquerons que les raisonnements dans le cadre des catégories fibrées sont très naturels; donnons un exemple à propos d'une question de Mikkelsen.

Dans le topos des ensembles un ensemble ordonné  $H$  a des sup si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- le foncteur  $\text{seg}: H \rightarrow \Omega^H$ ,  $h \mapsto \{h' \in H, h' \leq h\}$ , déduit de la fonction caractéristique  $H \times H \rightarrow \Omega$  de la relation d'ordre sur  $H$ , a un adjoint à gauche: "sup"

- pour tout ensemble  $X$  le foncteur  $H \rightarrow H^X$ , déduit de la projection  $X \times H \rightarrow H$  a un adjoint à gauche.

Ceci est immédiat. L'équivalence de ces deux propriétés dans un topos  $\mathcal{B}$  quelconque n'est pas encore <sup>encore</sup> élé prouvée. ~~est~~ connue.

Cependant l'équivalence des traductions de ces propriétés dans les catégories fibrées se démontre :

14.2. Traduction. Soit  $\mathcal{B}$  un topos et soit  $(H, r)$  un objet ordonné de  $\mathcal{B}$ ;  $H$  est un objet de  $\mathcal{B}$  <sup>et  $r$  est</sup> ~~mun~~ d'un monomorphisme  $r: H \times H \rightarrow H \times H$  définissant une relation d'ordre sur  $H$ .

Notons  $\chi(r): H \times H \rightarrow \Omega$  la fonction caractéristique de  $r$  et  $\mathcal{B}(H)$  la  $\mathcal{B}$ -catégorie définie par  $H$  et  $r$ . La traduction de la première propriété est alors claire (cf 1.11.2)

La seconde propriété se traduit en demandant que la catégorie fibrée  $\mathcal{B}(H) \xrightarrow{H} \mathcal{B}$  ait des  $\mathcal{B}$ -sommes, i.e. que

Les foncteurs  $u^* = (u, H) : \mathcal{B}(I, H) \longrightarrow \mathcal{B}(J, H)$  ont des adjoints à gauche pour toute flèche  $u : J \longrightarrow I$  de  $\mathcal{B}$ , et que la condition de Chevalley soit satisfaite.

14.3 Théorème. La catégorie fibrée  $\mathcal{B}(H)$  a des  $\mathcal{B}$ -sommes si, et seulement si, le foncteur  $\text{seg} : H \rightarrow \Omega^H$  a un adjoint à gauche.

Démonstration: supposons que la catégorie fibrée  $\mathcal{B}(H)$  a des  $\mathcal{B}$ -sommes. L'adjoint à gauche de  $\text{seg}$  est  $\text{sup} = \coprod_g f$ ,  $f$  et  $g$  étant définies par le produit fibré suivant:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (f, g) \downarrow & p \cdot f & \downarrow v \\ H \times \Omega^H & \xrightarrow{ev} & \Omega \end{array}$$

En effet Utilisons 1.11.2 pour le vérifier; pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{B}$  et tout couple  $(X, Y)$  de flèches  $X : T \rightarrow \Omega^H$ ,  $Y : T \rightarrow H$  on a :  $\text{sup} \circ X \leq Y$  si, et seulement si,  $\coprod_{X' \circ g} (f \circ g^{-1} X) \leq Y$ , c'est-à-dire si, et seulement si  $f \circ g^{-1} X \leq Y \circ X' \circ g$ . Un calcul élémentaire montre que cette dernière propriété équivaut à  $\bar{X} \subset \chi(\tau) \circ H \times Y$  où  $\bar{X} : H \times T \rightarrow \Omega$  correspond à  $X$  par le isomorphisme d'adjonction.

D'autre part on a  $X \subset \text{seg} \circ Y$  si, et seulement si,  $(X, \text{seg} \circ Y)$  factorise par  $j^H$ , où  $j$  est un monomorphisme représentant le sous-objet de  $\Omega \times \Omega$  de fonction caractéristique  $\Rightarrow$  (ceci est la définition de la relation d'ordre sur  $\Omega^H$ ) et il est facile de vérifier que ceci est vrai si, et seulement si,  $\bar{X} \subset \chi(\tau) \circ H \times Y$ .

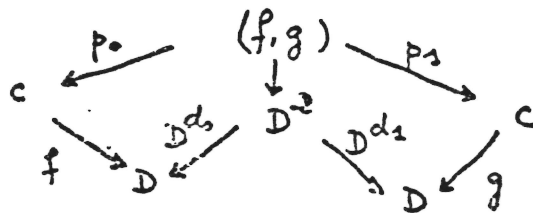
Réciproquement, supposons maintenant que  $\text{seg} : H \rightarrow \Omega^H$  a un adjoint à gauche :  $\text{sup}$ . Pour tout objet  $I$  de  $\mathcal{B}$ , toute flèche  $v : I \rightarrow J$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}(H)(I)$  on pose  $\coprod_v X = \text{sup} \bar{\chi}(X')$ , où  $\bar{\chi}(X')$  est la fonction caractéristique du monomorphisme  $X' : \text{Im}(X, v) \rightarrow H \times J$ . Les vérifications sont analogues aux précédentes.

1. Catégorie fibrée sur  $\text{cat}(\mathcal{B})$  associée à une catégorie fibrée sur  $\mathcal{B}$ . Soit  $D: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  une catégorie fibrée; on définit une catégorie fibrée  $\bar{D}$  sur  $\text{cat}(\mathcal{B})$  en considérant le pseudo-foncteur  $\phi: (\text{cat}(\mathcal{B}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}(\text{Eus})$  qui associe à une  $\mathcal{B}$ -catégorie  $C$   $\phi(C) = \text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)$  et à un  $\mathcal{B}$ -foncteur  $f: C \rightarrow C'$  le foncteur  $\phi(f): \text{Cart}_{\mathcal{B}}(C', D) \rightarrow \text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)$  défini par composition avec le foncteur cartésien  $B(C) \rightarrow B(C')$  défini par  $f$  (2.6.4)

Cette construction est fonctorielle: un foncteur cartésien de la catégorie fibrée  $D: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  vers la catégorie fibrée  $D': \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{B}$  définit un foncteur cartésien  $\bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ .

3. Théorème: Si  $D: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  est une catégorie fibrée localement petite, la catégorie fibrée associée  $\bar{D}$  sur  $\text{cat}(\mathcal{B})$  est localement petite.

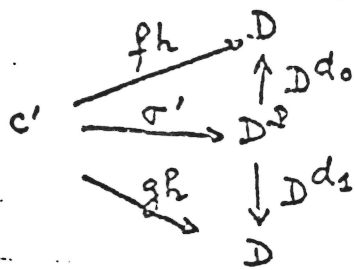
Démonstration: Soient  $f, g: B(C) \rightarrow D$  deux foncteurs cartésiens, et  $(f, g)$  la comma-catégorie limite projective du diagramme



( $d_1, d_2$  sont les deux flèches  $1 \rightarrow 2$ );  $\text{Hom}_C(f, g)$  est l'égalisateur

$$\text{Hom}_C(f, g) \xrightarrow{i} (f, g) \xrightarrow[p_1]{p_0} C$$

au-dessus de  $C$  par la flèche  $p_0 i = p_1 i$ . En effet, pour tout  $\mathcal{B}$ -foncteur  $h: C' \rightarrow C$ , les  $\mathcal{B}$ -foncteurs  $\sigma: C' \rightarrow \text{Hom}_C(f, g)$  tels que  $p_0 \sigma = h$  sont en bijection avec les  $\mathcal{B}$ -foncteurs  $\sigma': C' \rightarrow D^2$  tels que:



i.e. avec les transformations naturelles de  $fh$  vers  $gh$  dans  $\text{Cart}_{\mathbb{A}}(c', D)$  (cf 1.6.3)

Dans le cas où on considère la catégorie fibrée de l'exemp

2.3.3., si  $F, G$  sont des foncteurs  $A' \rightarrow A$  entre petits

catégories,  $\text{Hom}_{A'}(F, G)$  a pour objets les couples  $(X, \lambda_X)$

où  $X$  est un objet de  $A'$  et  $\lambda_X : F(X) \rightarrow G(X)$  une flèche de  $A$ ; une flèche du couple  $(X, \lambda_X)$  vers le couple  $(Y, \lambda_Y)$

est définie par une flèche  $\xi : X \rightarrow Y$  de  $A'$  telle que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\lambda_X} & GX \\
 F\xi \downarrow & & \downarrow G\xi \\
 FY & \xrightarrow{\lambda_Y} & GY
 \end{array}$$

commute.

Dans le cas où  $D$  est la catégorie fibrée  $\text{Eu}^2 \rightarrow \text{Eu}$  et où  $F, G$  sont des foncteurs d'une petite catégorie  $A$  dans  $\text{Eu}$  tels que  $G$  soit constant et égal à  $1$ ,  $\text{Hom}_{A'}(F, G) \rightarrow A$  est la catégorie fibrée associée au foncteur  $F: A \rightarrow \text{Eu}$  par la construction 2.4.3. Notons enfin <sup>dans ce même cas</sup> que la construction de  $\text{Hom}_{A'}(1, F)$  est elle faite par Lawvere pour

démontrer que  $\bar{D}$  vérifie le schéma de compréhension (cf [ ] th. p. 14)

Biographie

Bénabou J. Introduction to bicategories. Reports of  
the Midwest category seminar. Lecture Notes n° 47  
~~1967~~.

Bénabou J. Les distributeurs. Rapport n° 33. Université de  
Louvain. (nots rédigés par J.R. Roisin)

Bénabou J. Les catégories multiplicatives. Rapport n° 27. Université  
de Louvain (nots rédigés par F. Borceux, J. Dewuyl,  
M. Zandarin)

Bénabou J. et Roubaud J. Monads et descentes. C.R.  
Acad. Sc. Paris, t. 270 (12 janvier 1970)

celeyrette Thèse (à paraître)

Chevally C. Séminaire sur la descente 1964. 1965 (non publié)

Dekinder

Gabriel P. et Zisman M. Calculus of fractions and  
homotopy theory. Springer 1967. 35.

Giraud J. ~~Méthode de~~ Méthode de la descente. Mémoires Soc.  
Math. Fr. 2. 1964

Giraud J. Cohomologie non abélienne. Springer 1971. 179.